

РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ M -СЕКСТИКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ

С. Ю. ОРЕВКОВ

А н н о т а ц и я . Изучаются взаимные расположения вещественной алгебраической или вещественной псевдоголоморфной плоской проективной M -секстики и прямой с точностью до изотопии. Получен полный список псевдоголоморфных расположений. Доказано, что четыре из них алгебраически нереализуемы. Все остальные за двумя исключениями реализованы алгебраически.

Вещественной алгебраической кривой в $\mathbb{R}P^2$ мы будем называть комплексную алгебраическую кривую в $\mathbb{C}P^2$, инвариантную относительно комплексного сопряжения. Если C такая кривая, через $\mathbb{R}C$ будем обозначать множество ее вещественных точек. В настоящей статье изучаются взаимные расположения в $\mathbb{R}P^2$ множеств $\mathbb{R}C_6$ и $\mathbb{R}C_1$, где C_6 — вещественная алгебраическая M -кривая степени 6 (тогда у нее 11 овалов) и C_1 — трансверсальная ей вещественная прямая. Мы рассматриваем такие расположения с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$. Мы исследуем также ту же проблему для *вещественных псевдоголоморфных кривых* (см. [9] и приведенные там ссылки).

В случае, когда $C_6 \cap C_1$ сосредоточено на одном-единственном овале кривой $\mathbb{R}C_6$, число компонент связности дополнения $\mathbb{R}C_6 \setminus C_1$ максимально, поэтому будем говорить в этом случае, что пара (C_6, C_1) реализует *максимальное расположение*, а $C_6 \setminus C_1$ является *аффинной M -секстикой*. Полная классификация максимальных расположений уже известна (см. [11], [1]): имеется ровно 38 псевдоголоморфно реализуемых расположений, и только 35 из них реализуемы алгебраически.

Е. И. Шустин в [12] анонсировал алгебраическую классификацию (с единственным исключением) в немаксимальном случае. Однако доказательств в [12] нет — только описание используемого метода. Более того, по крайней мере для четырех расположений доказательства их нереализуемости заведомо были ошибочны, так как эти расположения реализуемы псевдоголоморфно, в то время как использовавшаяся в доказательствах техника не различает алгебраическую реализуемость и псевдоголоморфную.

В настоящей статье мы даем полный список псевдоголоморфно реализуемых немаксимальных расположений. Мы доказываем, что четыре из них нереализуемы алгебраически. Вопрос об алгебраической реализуемости еще двух остается открытым, а все остальные мы реализуем вещественными алгебраическими кривыми.

Для плоских проективных M -секстик алгебраическая и псевдоголоморфная классификации совпадают. Есть три изотопических типа: $9 \sqcup 1\langle 1 \rangle$, $5 \sqcup 1\langle 5 \rangle$ и $1 \sqcup 1\langle 9 \rangle$ в обозначениях Виро [13]. Любое псевдоголоморфно реализуемое немаксимальное

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

расположение M -секстики и прямой принадлежит одной из серий, изображенных на рис. 1, где через a , b и c обозначены числа не вложенных друг в друга овалов в соответственных областях. Это легко следует из теоремы Безу, примененной к C_6 и к вспомогательной прямой, проходящей через те или иные пары овалов (а также к вспомогательной конике для серии E). Обозначения серий на рис. 1 примерно те же, что в [4], [12]. Расположения на рис. 1 (при условии, что удаление прямой дает один из трех вышеуказанных изотопических типов) будем называть *допустимыми*.

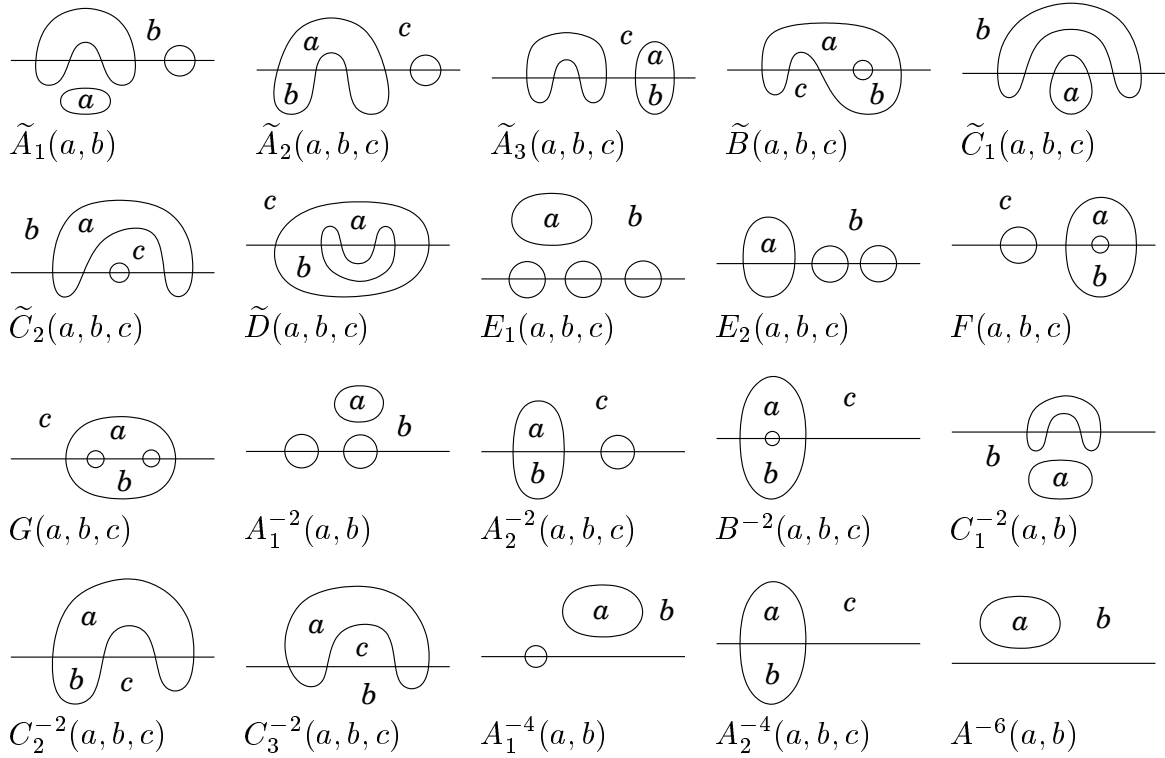


Рис. 1. Допустимые расположения.

Теорема 1.1. Следующие изотопические типы реализуемы в виде $\mathbb{R}C_6 \cup \mathbb{R}C_1$, где C_6 — вещественная алгебраическая секстика, а C_1 — вещественная прямая в \mathbb{P}^2 :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(a, b, c), & \quad (a, b, c) = (2, 7, 0), (8, 1, 0), (0, 5, 4), (2, 3, 4), (4, 1, 4), (5, 0, 4), \\ & \quad (0, 1, 8), (1, 0, 8), \\ \tilde{A}_3(a, b, c), & \quad (a, b, c) = (0, 5, 4), (0, 1, 8), \\ \tilde{C}_2(a, b, c), & \quad (a, b, c) = (1, 5, 3), (1, 6, 2), (1, 7, 1), (1, 8, 0), (5, 1, 3), (5, 2, 2), \\ & \quad (5, 3, 1), (5, 4, 0), \\ \tilde{D}(a, b, c), & \quad (a, b, c) = (1, 7, 1), (8, 0, 1), (0, 4, 5), (1, 3, 5), (4, 0, 5), (0, 0, 9), \\ C_3^{-2}(a, b, c), & \quad (a, b, c) = (1, 5, 4), (1, 6, 3), (1, 7, 2), (1, 8, 1), (1, 9, 0), (5, 1, 4), \\ & \quad (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (5, 5, 0), (9, 1, 0), \end{aligned}$$

а также все допустимые расположения остальных серий, т. е. серий

$$\tilde{A}_1, \tilde{B}, \tilde{C}_1, E, F, G, A_1^{-2}, A_2^{-2}, B^{-2}, C_1^{-2}, C_2^{-2}, A^{-4}, A^{-6}.$$

Теорема 1.2. Пусть J — ручная сопј-антиинвариантная почти комплексная структура на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, и пусть C_6 и C_1 — гладкие вещественные J -голоморфные кривые степени 6 и 1 соответственно. Предположим, что C_6 есть M -секстика (т.е. $\mathbb{R}C_6$ имеет 11 овалов), $\mathbb{R}C_1$ трансверсальна $\mathbb{R}C_6$ и расположение (C_6, C_1) не максимально, т.е. $C_6 \cap C_1$ не лежит в одном-единственном овале кривой C_6 .

Тогда расположение $\mathbb{R}C_6$ относительно $\mathbb{R}C_1$ либо как в теореме 1.1, либо одно из

$$\tilde{A}_3(1, 8, 0), \tilde{A}_3(1, 4, 4), \tag{1}$$

$$\tilde{C}_2(1, 3, 5), \tilde{C}_2(1, 4, 4), C_3^{-2}(1, 3, 6), C_3^{-2}(1, 4, 5). \tag{2}$$

Все эти расположения псевдоголоморфно реализуемы.

Теорема 1.3. Расположения (2) алгебраически не реализуемы.

Вопрос об алгебраической реализуемости расположений (1) открыт. В табл. 1 приведено распределение реализуемых расположений по сериям.

Таблица 1.

	\tilde{A}	\tilde{B}	\tilde{C}	\tilde{D}	E	F	G	A^{-2}	B^{-2}	C^{-2}	A^{-4}	A^{-6}	всего
Допустимые	29	15	18	15	4	9	6	11	9	36	12	3	167
Псевдогол.	14	15	13	6	4	9	6	11	9	31	12	3	133
Алгебраич.	12?	15	11	6	4	9	6	11	9	29	12	3	127?

Замечание 1.4. В [12] сказано, что все расположения из теоремы 1.1, а также $\tilde{A}_3(1, 4, 4)$, были построены А. Б. Корчагиным, Г. М. Полотовским и Е. И. Шустиним и что построения такие же, как в [4], но они в [12] не приведены. Я и в самом деле нашел построения, как в [4], для расположений из теоремы 1.1 (см. §2), но не для $\tilde{A}_3(1, 4, 4)$. Я сомневаюсь в том, что последнее расположение алгебраически реализуемо.

Замечание 1.5. В [4, теорема 2] сказано, что аффинная M -секстика $A_2(8, 1, 1)$ (см. рис. 8 ниже) алгебраически реализуема, но ее построение там не приведено. Построение же (которое я узнал от Г. М. Полотовского) очень простое, и оно дано в §3.3.

В §§2–4 доказываются теоремы 1.1 и 1.2, используя те же методы, что и в [4–8], [13]. В §5 доказывается теорема 1.3. Общая схема доказательства примерно та же, что в [11]: методом Гильберта – Роона – Гудкова задача сводится к алгебраической нереализуемости некоторой квадригональной кривой (которая псевдоголоморфно реализуема) и затем эта кривая запрещается с использованием кубической резольвенты. Однако на втором этапе привлечены некоторые новые соображения (см. §5.1).

Замечание 1.6. Из аффинной M -секстики изотопического типа $C_2(1, 3, 6)$ (см. рис. 8 в §3), двигая прямую, можно получить все расположения (2). Таким образом, теорема 1.3 дает новое доказательство алгебраической нереализуемости аффинной M -секстики $C_2(1, 3, 6)$, в котором существенно сокращен этап, основанный на методе Гильберта – Роона – Гудкова.

Для псевдоголоморфной классификации мы используем подход из [6–8]. В качестве общего введения в тему можно использовать статью [7]. Для удобства читателя мы напомним некоторые термины, обозначения и основные идеи. Если $\pi : E \rightarrow B$ — расслоение, *послойным расположением* подмножества $X \subset E$ называется класс эквивалентности X относительно изотопий $\{H_t\}$ пространства E таких, что $\pi \circ H_t = h_t \circ \pi$ для некоторой изотопии $\{h_t\}$ базы B . При $p \in \mathbb{RP}^2$ и $X \subset \mathbb{RP}^2 \setminus \{p\}$, назовем \mathcal{L}_p -*схемой* подмножества X его послойное расположение относительно линейной проекции $\mathbb{RP}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{RP}^1$. Когда $X = \mathbb{R}C$ для вещественной алгебраической или вещественной псевдоголоморфной кривой C в общем положении, мы кодируем \mathcal{L}_p -схему словом из букв $\subset_k, \supset_k, \times_k$, соответствующих последовательным необщим слоям. Нижний индекс k указывает на высоту точки с вертикальной касательной (для \subset_k или \supset_k) или двойной точки (для \times_k) аналогично нижнему индексу u образующих группы кос. Подслово $\subset_k \supset_k$ сокращается до o_k (овал). Например, верхняя \mathcal{L}_p схема на рис. 3(а) кодируется словом $[\supset_2 o_2^3 \subset_2 \supset_1 o_2 \subset_1]$. \mathcal{L}_p -схема определяет косу (или семейство кос). \mathcal{L}_p -схема псевдоголоморфно реализуема тогда и только тогда, когда коса (хотя бы одна коса из семейства) *квазиположительна*, т. е. является произведением кос, сопряженных стандартным образующим группы кос (см. подробнее в [6, 7]).

2. ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В этом разделе доказывается теорема 1.1. Случаи A^{-4} и A^{-6} очевидны, и ниже мы приводим построения для остальных серий расположений.

2.1. Серии $\tilde{A}_1, \tilde{A}_3, E, A_1^{-2}$. Существуют расположения квинтики C_5 относительно прямой C_1 , изображенные на рис. 2(слева); см. [3] для $a = 1$ и [2; §7.6] для $a = 5$. Возмущая $C_5 \cup C_1$ разными способами, получаем $\tilde{A}_3(0, 5, 4)$, $\tilde{A}_3(0, 1, 8)$ и все восемь допустимых расположений серий \tilde{A}_1, E_1, E_2 и A_1^{-2} (см. рис. 2).

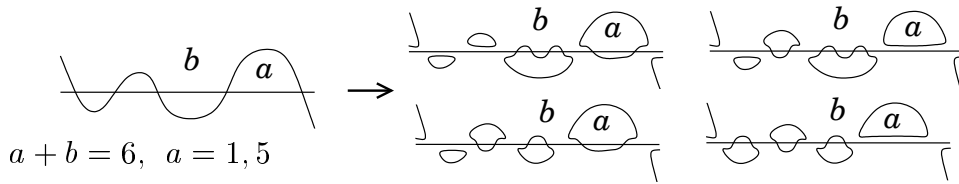


Рис. 2. Построение $\tilde{A}_3(0, 5, 4)$, $\tilde{A}_3(0, 1, 8)$, $\tilde{A}_1(a, b)$, $E_k(a, b)$.

2.2. Серии F, G, A_2^{-2}, B^{-2} . Фиксируем M -секстику C_6 и точку p в одном из ее внешних пустых овалов. Выбирая разными способами прямую C_1 , проходящую через p , можно получить все допустимые расположения серий F и A_2^{-2} .

По лемме 4.1(a), внутренние овалы кривой C_6 расположены выпуклым образом (если выбрать по точке на каждом овале, они будут лежать в вершинах выпуклого многоугольника в некоторой аффинной карте). Поэтому, проводя всеми способами прямую C_1 , проходящую через фиксированную точку, выбранную в одном из внутренних овалов, мы получим все допустимые расположения серий G и B^{-2} .

2.3. Серии $\tilde{A}_2, \tilde{B}, C_2^{-2}$. Согласно [13, §4.2], существуют многочлены $F_k(x, y)$, $k = 1, 2$, с многоугольником Ньютона $[(0, 0), (0, 3), (6, 0)]$, которые задают аффинные кривые, расположенные относительно пучка вертикальных прямых, как на рис. 3(a).

К этим кривым и их симметричным образам применим процедуру, изображенную на рис. 3(b). А именно, выберем два сдвига одной и той же достаточно узкой параболы и применим преобразование $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^2)$, где λ выбрано так, чтобы параболы превратились в прямые. Проективные замыкания полученных кривых имеют точку простого касания трех гладких ветвей. Возмущая эту особенность (опять см. [13, §4.2]), получаем расположения M -секстики относительно пучка прямых, как на рис. 3(c) (например, самое левое расположение на рис. 3(c) отвечает случаю, изображенному на рис. 3(b)). Выбирая различные прямые из этого пучка, получаем все расположения серий $\tilde{A}_2, \tilde{B}, C_2^{-2}$, перечисленные в теореме 1.1.

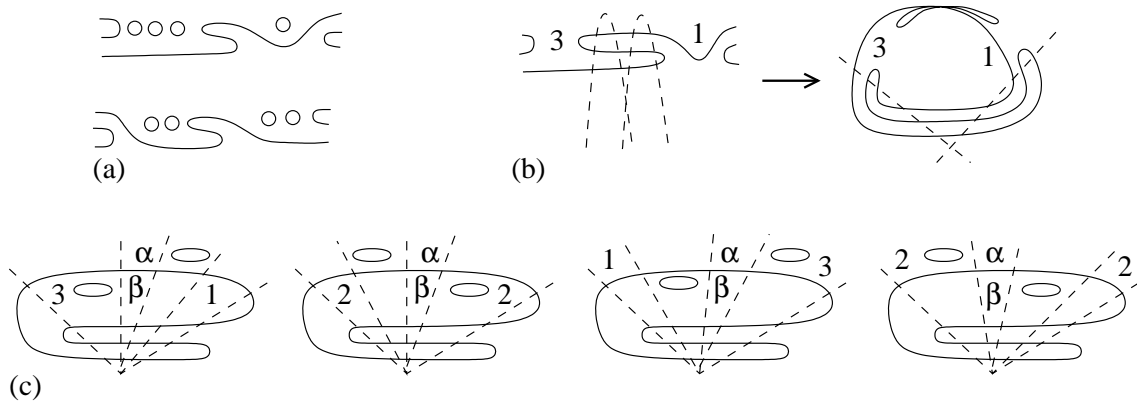


Рис. 3. Построение $\tilde{A}_2, \tilde{B}, C_2^{-2}$; $(\alpha, \beta) \in \{(0, 4), (4, 0)\}$.

2.4. Серии $\tilde{C}_1, \tilde{D}(a, 0, c), C_1^{-2}$. Построение примерно такое же, как в §2.3, дает требуемые расположения (на рис. 3(b) надо выбрать одну узкую параболу, проходящую через один из овалов).

2.5. Серии \tilde{C}_2 и C_3^{-2} . Кривая $(y^2 - xz)(y^2 - 2xz)(y^2 - 3xz) + x^5z = 0$ в однородных координатах $(x : y : z)$ расположена относительно координатных осей, как показано на рис. 4. Она имеет особенность E_8 в $(0 : 0 : 1)$ и точку касания трех локальных ветвей в $(0 : 1 : 0)$. Выберем прямую L и точку p , как на рис. 4. Тогда, возмущая особенности (см. [13, §4]) и вращая L вокруг p (см. рис. 4), мы получаем все расположения \tilde{C}_2 и C_3^{-2} , перечисленные в теореме 1.1.

2.6. Расположения $\tilde{D}(a, b, c)$ при $b \neq 0$.

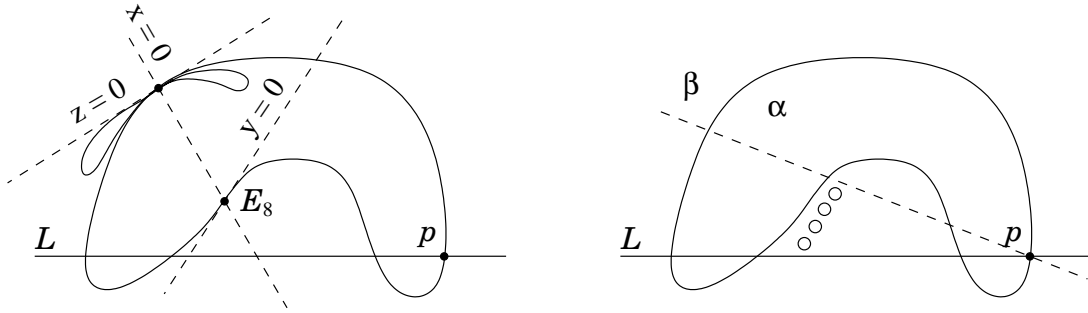


Рис. 4. Построение \tilde{C}_2, C_3^{-2} ; $(\alpha, \beta) \in \{(1, 5), (5, 1)\}$.

Построение $\tilde{D}(1, 7, 1)$ и $\tilde{D}(1, 3, 5)$ приведено на рис. 5. А именно, сначала методом T -кривых Виро (patchwork) в соответствии с левым рисунком строится особая квинтика, расположенная относительно координатных осей, как показано на среднем рисунке. Знаки вершин триангуляции представлены цветами (черным и белым) и предполагается, что полиэдральное разбиение произвольным образом подразбито до примитивной триангуляции. Возмущение особой точки дает требуемые расположения. Доказательство существования таких возмущений см. в [4] или в [13, §4.4].

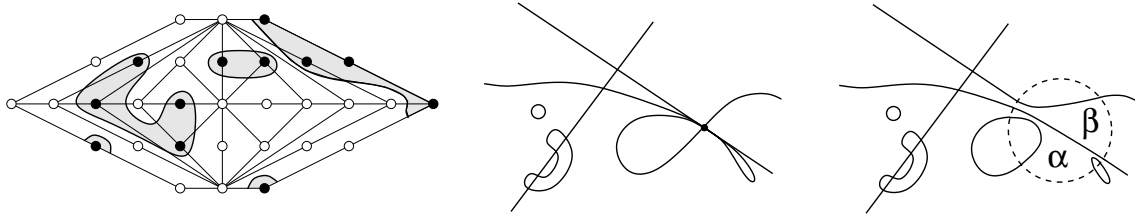


Рис. 5. Построение $\tilde{D}(1, 7, 1), \tilde{D}(1, 3, 5)$; $(\alpha, \beta) \in \{(1, 5), (5, 1)\}$.

Построение $\tilde{D}(0, 4, 5)$ показано на рис. 6. Мы начинаем с каспидальной кубики C_3 и трех прямых на рис. 6(a). Возмутим L_2 в прямую L , пересекающую C_3 в трех вещественных точках, и рассмотрим конику C_2 , заданную как $L_0^2 + \varepsilon L_1 L$, $|\varepsilon| \ll 1$. Получим расположение на рис. 6(b). Возмущением каспа из него получается рис. 6(c). Затем выберем координаты $(x : y : z)$, как на рис. 6(c), и применим гиперболизм (см. [13, §4.5]) $h : (x : y : z) \mapsto (\hat{x} : \hat{y} : \hat{z}) = (xy : x^2 : yz)$. Тогда C_3 и C_2 преобразуются в квинтику и прямую соответственно, расположенные относительно оси $\hat{y} = 0$, как на рис. 6(d). Возмущение особенностей, как на рис. 6(e), дает $\tilde{D}(0, 4, 5)$.

Для удобства читателя на рис. 7 показано, как гиперболизм, преобразующий рис. 6(c) в рис. 6(d), разлагается в три раздутия и три стягивания. На рис. 7(a) изображено расположение с рис. 6(c), но \mathbb{RP}^2 представлено в виде диска с отождествленными противоположными граничными точками, причем граница диска представляет прямую L . Рис. 7(b) получен раздутием точки q и ее бесконечно близкой точки на L с последующим стягиванием собственного прообраза прямой L . Результирующая поверхность есть поверхность Хирцебруха второго порядка. Ее множество вещественных точек – тор, изображенный в виде прямоугольника с отождествленными сторонами, при-

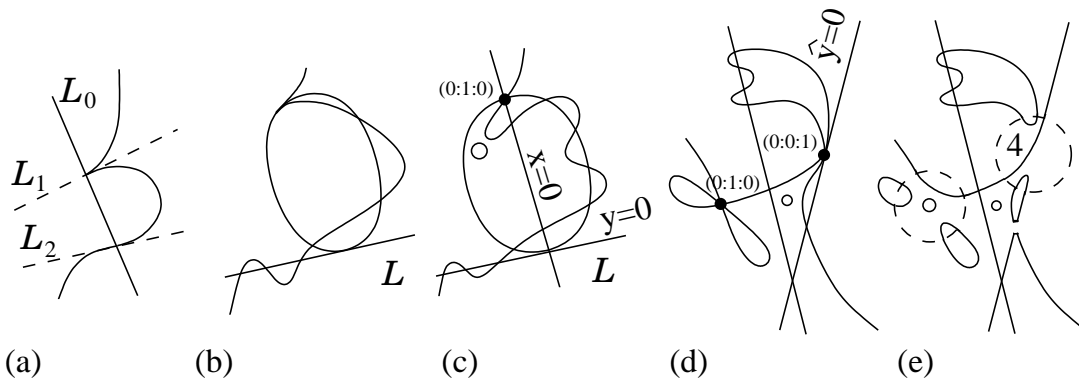


Рис. 6. Построение $\tilde{D}(0, 4, 5)$.

чем горизонтальные стороны соответствуют (-2) -кривой, а вертикальные — слою. На рис. 7(с) изображено то же, что и на рис. 7(б), но поверхность разрезана вдоль другого слоя. Наконец, рис. 7(д) получен раздутием точки p с последующим стягиванием двух кривых, представленных сторонами прямоугольника (это преобразование обратно тому, которое из рис. 7(а) делает рис. 7(б)).

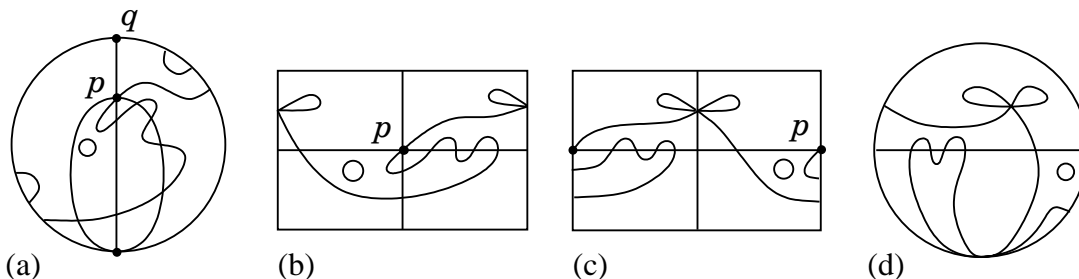


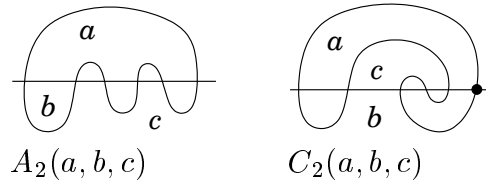
Рис. 7. Гиперболизм, преобразующий рис. 6(с) в рис. 6(д).

3. ПОСТРОЕНИЕ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

В этом разделе мы доказываем утверждение теоремы 1.2 о реализуемости шести расположений (1) и (2).

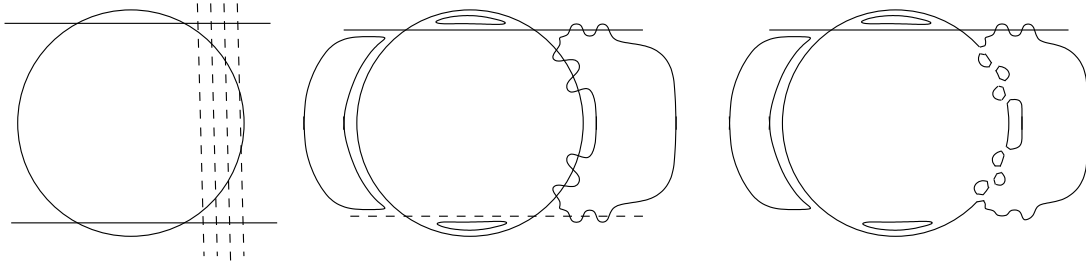
3.1. Построение расположений (2). Аффинная M -секстика $C_2(1, 3, 6)$ (см. рис. 8) псевдоголоморфно реализована в [6, §7.2]. Вращение прямой вокруг точки, отмеченной на рис. 8, дает все четыре расположения из (2). В самом деле, при повороте по часовой стрелке эта прямая не может встретить внутренние овалы, пока $c > 0$ (это следует из теоремы Безу для вспомогательных прямых).

3.2. Построение расположений (1). В [6; §7.2] показано, что косы b_k , $k = 1, 2$, соответствующие \mathcal{L}_p -схемам $[\times_3 \times_4 \times_4 \times_3 \times_2 \supset_3 o_3^4 e_8^{(k)} \times_2 o_3 \subset_3]$ (в обозначениях из [6; §3.5]), где $e_8^{(1)} = o_3^3 \subset_3 \supset_4 o_3$ и $e_8^{(2)} = o_4 \subset_3 \supset_4 o_4^3$, квазиположительны (заметим также, что $b_1 = b_2$ и что эти \mathcal{L}_p -схемы задают расположения $B_2(1, 8, 1)$ и $B_2(5, 4, 1)$ соответственно, из которых первое алгебраически реализуемо [5], а второе — нет [1]). Расположения

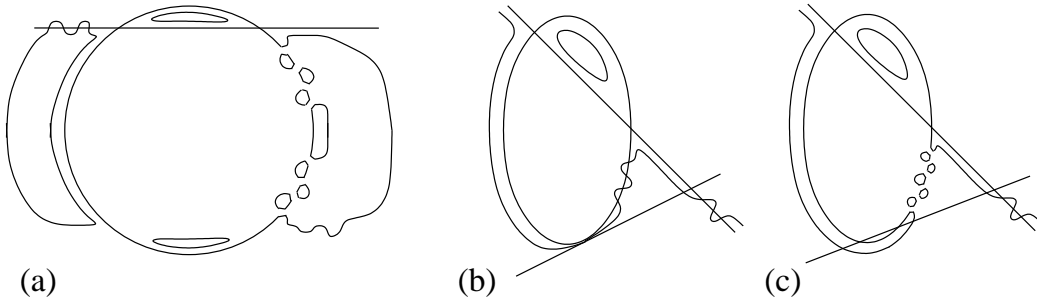
Рис. 8. Аффинные M -секстики серий A_2 и C_2 .

$\tilde{A}_3(1, 8, 0)$ и $\tilde{A}_3(5, 4, 0)$ представимы \mathcal{L}_p -схемами $[\times_3 \times_4 \times_4 \times_3 \times_2 \supset_4 \subset_4 \supset_3 o_3^4 e_8^{(k)} \times_2 \subset_3]$, $k = 1, 2$. Легко проверить, что соответствующие им косы b'_k сопряжены косам b_k , а именно, $b'_k = \sigma_4^{-1} b_k \sigma_4$. Следовательно, косы b'_k тоже квазиположительны, из чего вытекает реализуемость соответствующих расположений.

3.3. Более геометричное построение расположений (1). На рис. 9 (Г. М. Полотовский, частное сообщение; см. замечание 1.5) показана алгебраическая реализация $A_2(8, 1, 1)$ (см. рис. 8).

Рис. 9. Алгебраическое построение $A_2(8, 1, 1)$.

Небольшая модификация этого построения дает псевдоголоморфную реализацию расположения $\tilde{A}_3(1, 8, 0)$, см. рис. 10(a). Похожим образом строится вещественная псевдоголоморфная кубика, расположенная относительно коники и двух прямых, как на рис. 10(b), где кубика и коника касаются одной из прямых в одной и той же точке. При возмущении этой конфигурации получается $\tilde{A}_3(1, 8, 0)$, и $\tilde{A}_3(1, 4, 4)$.

Рис. 10. Псевдоголоморфная реализация $\tilde{A}_3(1, 8, 0)$ и $\tilde{A}_3(1, 4, 4)$.

Отметим, что расположение на рис. 10(b) алгебраически нереализуемо, так как алгебраическим возмущением из него получилась бы квинтика, расположенная от-

носителем двух прямых, как на рис. 10(c), что невозможно согласно [8, §4.1]. Однако вопрос об алгебраической реализуемости расположений (1) и расположения на рис. 10(a) открыт.

Отметим также, что при помощи вычислений, как в §4 или в шаге 2 в §5.2, можно доказать, что любое nodальное вырождение расположений (1) может быть получено возмущением расположения на рис. 10(b). Это дает надежду доказать алгебраическую нереализуемость (1) с помощью какого-нибудь варианта метода Гильберта – Роона – Гудкова.

4. ЗАПРЕТЫ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

В этом разделе мы доказываем утверждение теоремы 1.2 о нереализуемости не перечисленных в ней расположений. Следующий факт хорошо известен, и он легко следует из теоремы Безу, примененной к вспомогательной конике.

Лемма 4.1. *M -секстика не может иметь овалов, расположенных относительно некоторых прямых, как на рис. 11 (a), (b) или (c).*

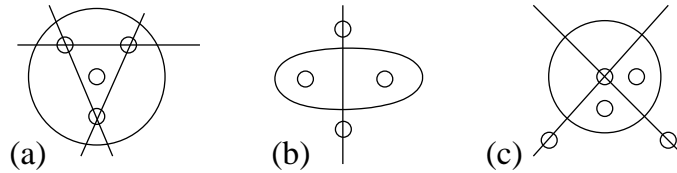


Рис. 11. Невозможные подмножества M -секстики.

4.1. Серия \tilde{A}_2 . Пусть (C_6, C_1) — псевдоголоморфная реализация расположения $\tilde{A}_2(a, b, c)$. Пусть v овал кривой C_6 , пересекающий C_1 в двух точках, и пусть p — точка на C_1 внутри v . Все допустимые расположения $\tilde{A}_2(a, b, c)$ при $c > 0$ и $ab = 0$ реализованы в §2, поэтому мы будем предполагать, что $c = 0$ или $ab \neq 0$. Это условие в сочетании с леммой 4.1(b) влечет, что \mathcal{L}_p -схема кривой C_6 имеет вид $[\supset_3 o_3^a \supset_2 o_2^c \subset_2 o_3^b \subset_2]$. Следовательно, по формуле комплексных ориентаций, a четно и b нечетно. Это наблюдение запрещает все рассматриваемые расположения кроме $\tilde{A}_2(a, 9 - a, 0)$ при $a = 0, 4, 6$.

Согласно [6, 7], \mathcal{L}_p -схема $[\supset_2 o_3^a \supset_2 \subset_2 o_3^{9-a} \subset_2]$ псевдоголоморфно реализуема тогда и только тогда, когда существует $e \in \mathbb{Z}$ такое, что коса

$$\beta_a(e) = \sigma_3^{-a-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{1+e} \sigma_2^{1-e} \sigma_3^{a-9} \sigma_2^{-1} \sigma_3 \Delta$$

квазиположительна. По неравенству Мурасуги – Тристрама необходимым условием квазиположительности является обращение в нуль определителя $\det \beta_a(e)$. С помощью программы `ssmW` (см. приложение в [7]) находим, что $\pm \det \beta_a(e) = 16(a - 2)(a - 8)$ (по какой-то загадочной причине результат не зависит от e). Следовательно, расположение $\tilde{A}_2(a, 9 - a, 0)$ реализуемо только при $a \in \{2, 8\}$.

4.2. Серия \tilde{A}_3 . Нам надо запретить $\tilde{A}_3(2, 3, 4)$ и четыре расположения $\tilde{A}_3(a, 9-a, 0)$, $a = 0, 2, 3, 4$. Пусть (C_6, C_1) — псевдоголоморфная реализация $\tilde{A}_3(a, b, c)$. Пусть v овал кривой C_6 , пересекающий C_1 в четырех точках, и пусть p — точка на том отрезке прямой C_1 с концами на v , который расположен снаружи от v и не имеет внутренних точек пересечения с C_6 .

Тогда \mathcal{L}_p -схема кривой C_6 имеет вид $[\supset_1 o_2^a \supset_1 o_1^c \subset_1 o_2^b \subset_1]$. Априори \mathcal{L}_p -схема, реализующая $\tilde{A}(a, b, c)$, могла бы иметь вхождения o_1 или o_3 между овалами из группы o_2^a или o_2^b , но это невозможно по лемме 4.1(b). По теореме Безу для вспомогательной прямой невозможно также, что какое-то подслово слова o_1^c заменено на $\subset_1 o_2 \dots o_3 \supset_2$ или на $\subset_2 o_3 \dots o_2 \supset_1$, хотя такая замена и сохраняет изотопический тип.

Таким образом, $\tilde{A}_3(a, 9-a, 0)$ псевдоголоморфно реализуемо тогда и только тогда, когда существует $e \in \mathbb{Z}$ такое, что коса

$$\beta_a(e) = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-a} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{1+e} \sigma_1^{1-e} \sigma_2^{a-9} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \Delta$$

квазиположительна. По неравенству Мурасуги – Тристрама необходимым условием квазиположительности является обращение в нуль определителя $\det \beta_a(e)$. Как и в §4.1, используя программу `ssmW`, находим, что

$$\pm \det \beta_a(e) = 4(36 - 36a + 4a^2 - 9e + 2ae - 2e^2).$$

Легко проверить, что этот многочлен от e не имеет целых корней при $a = 0, 2, 3, 4$.

Аналогично $\tilde{A}_3(2, 3, 4)$ псевдоголоморфно реализуемо тогда и только тогда, когда при некотором $e = (e_1, \dots, e_5) \in \mathbb{Z}^5$ коса

$$\gamma(e) = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-a} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \left(\prod_{j=1}^5 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{e_j} \sigma_1^{-e_j} \right) \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{a-9} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \Delta$$

квазиположительна. Вычисление с помощью программы `ssmW` показывает, что $|\det \gamma(e)|$ есть многочлен степени 2, который положителен на \mathbb{R}^5 (квадратичная форма положительно определена и значение в минимуме положительно).

4.3. Серии \tilde{C}_2 и C_3^{-2} . Нам требуется доказать псевдоголоморфную нереализуемость расположений

$$\tilde{C}_2(1, 2, 6), C_3^{-2}(1, 2, 7), \tilde{C}_2(1, 1, 7), C_3^{-2}(1, 1, 8), \tilde{C}_2(1, 0, 8), C_3^{-2}(1, 0, 9), \quad (3)$$

$$\tilde{C}_2(5, 0, 4), C_3^{-2}(5, 0, 5), \quad (4)$$

$$\tilde{C}_2(9, 0, 0), C_3^{-2}(9, 0, 1). \quad (5)$$

Заметим, что если одно из расположений (3) (соотв. (4), (5)) реализуемо, то $\tilde{C}_2(1, 2, 6)$ (соотв. $\tilde{C}_2(5, 0, 4)$, $\tilde{C}_2(9, 0, 0)$) получается из него перемещением прямой. Поэтому достаточно запретить только $\tilde{C}_2(1, 2, 6)$, $\tilde{C}_2(5, 0, 4)$ и $\tilde{C}_2(9, 0, 0)$.

Для этого мы применим подход из [7, §3.3]. Пусть (C_6, C_1) — псевдоголоморфная реализация расположения $\tilde{C}_2(a, b, c)$. Выберем точку p на прямой C_1 внутри того

овала который пересекает C_1 в двух точках. Тогда \mathcal{L}_p -схема нашей кривой имеет вид $[\supset_2 o_{i_1} \dots o_{i_9} \subset_2]$, где $a = \#\{j \mid i_j = 3\}$, $b = \#\{j \mid i_j = 2\}$ и $c = \#\{j \mid i_j = 4\}$. По лемме 4.1(b) все a овалов « o_3 » следуют друг за другом, т.е. $i_j = \dots = i_{j+a-1} = 3$ для некоторого j . Более того, по формуле комплексных ориентаций j четно (из чего уже вытекает, что $\tilde{C}(9, 0, 0)$ нереализуемо). В силу симметрии можно также считать, что $j = 2$ для $\tilde{C}_2(5, 0, 4)$, и что $j = 2$ или 4 для $\tilde{C}_2(1, 2, 6)$.

Итак, нам надо рассмотреть только один случай $[\supset_2 o_4 o_3^5 o_4^3 \subset_2]$ для $\tilde{C}_2(5, 0, 4)$ и $2 \times \binom{8}{2} = 56$ случаев для $\tilde{C}_2(1, 2, 6)$. В каждом из этих случаев мы вычисляем многочлен Александера соответствующей косы и приходим к противоречию с обобщенной теоремой Фокса – Милнора (см. подробности в [7, §3.3]).

4.4. Серия \tilde{D} . Пусть (C_6, C_1) — псевдоголоморфная реализация расположения $\tilde{D}(a, b, c)$. Пусть v — овал кривой C_6 , пересекающий C_1 в четырех точках. Выберем точку p на том отрезке кривой $\mathbb{R}C_1$, который расположен снаружи от v , концы которого лежат на v и который не имеет других общих точек с C_6 . Тогда \mathcal{L}_p -схема кривой C_6 имеет вид $[\supset_1 o_{i_1} \dots o_{i_9} \subset_1]$, где $a = \#\{j \mid i_j = 1\}$, $b = \#\{j \mid i_j = 3\}$ и $c = \#\{j \mid i_j = 2\}$. По лемме 4.1(a), последовательность $(i_1 \dots i_9)$ не может содержать $1 \dots 3 \dots 1$ или $3 \dots 1 \dots 3$. По лемме 4.1(c), она также не может содержать $j \dots 2 \dots k \dots 2$ или $2 \dots j \dots 2 \dots k$ при $j, k \neq 2$. Следовательно, с точностью до симметрии, \mathcal{L}_p -схема — одна из:

- (i) $[\supset_1 o_1^{a_1} o_3^{b_1} o_2^c o_1^{a_2} o_3^{b_2} \subset_1]$, где $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$ и $b_1 a_2 = 0$;
- (ii) $[\supset_1 o_2^{c_1} o_1^a o_3^b o_2^{c_2} \subset_1]$, где $c_1 + c_2 = c$.

По обобщенной теореме Фокса – Милнора [7, §3.3], определитель $\det \beta$ соответствующей косы (с точностью до знака) должен быть квадратом целого числа. При помощи программы `ssmW` (см. приложение к [7]) находим, что $\pm \det \beta = 4c(1 + a + 5b - 4ab)$ в случае (i) и $\pm \det \beta = 4c(1 + a + 5b - 4ab) - 16(a + b)c_1 c_2$ в случае (ii). Поэтому $|\det \beta|$ может быть квадратом лишь для расположений, перечисленных в теореме 1.1.

5. ЗАПРЕТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В этом разделе доказывается теорема 1.3. Как и в §4.3, достаточно доказать алгебраическую нереализуемость расположения $\tilde{C}_2(1, 4, 4)$, так как оно может быть получено из любого из (2) перемещением прямой. Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству алгебраической нереализуемости расположения $\tilde{C}_2(1, 4, 4)$.

5.1. Индекс самозацепления четырехзначной функции. В этом пункте мы уточним наблюдение из [11, лемма 3.7] и [8, §4.1] о кубической резольвенте вещественного многочлена степени 4 от y с коэффициентами, зависящими от x .

Фактически в лемме 3.7 из [11] речь идет только об одном коэффициенте многочлена от y . Поэтому здесь мы будем обсуждать не всю кубическую резольвенту, а только этот коэффициент.

Лемма 5.1. Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 — корни многочлена с комплексными коэффициентами $P(y) = y^4 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0$. Тогда $a_1 = 0$ если и только если y_1, y_2, y_3, y_4 лежат в вершинах параллелограмма (возможно, вырожденного), т.е. $y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = 0$

с точностью до перестановки чисел y_1, y_2, y_3, y_4 . Это условие также эквивалентно тому, что 0 является корнем кубической резольвенты многочлена P .

Доказательство. Поскольку коэффициент при y^3 равен нулю, имеет место равенство $y_4 = -y_1 - y_2 - y_3$. Подставляя это выражение в $a_1 = -(y_1 y_2 y_3 + \dots)$, получаем $a_1 = (y_1 + y_2)(y_1 + y_3)(y_2 + y_3)$. \square

Лемма 5.2. Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 — корни многочлена с вещественными коэффициентами $y^4 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0$. Тогда знак коэффициента a_1 зависит от взаимного расположения корней так, как показано на рис. 12. А именно,

а). Если y_1, \dots, y_4 вещественны и $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4$, то

$$\text{sign } a_1 = \text{sign}((y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)).$$

б). Если y_1 и y_2 вещественны и $y_3 = \bar{y}_4$, то

$$\text{sign } a_1 = \text{sign}((y_3 + y_4) - (y_1 + y_2)) = \text{sign}((2 \text{Re } y_3) - (y_1 + y_2)).$$

с). Если $y_1 = \bar{y}_2$, $y_3 = \bar{y}_4$, $\text{Im } y_1 \geq 0$ и $\text{Im } y_3 \geq 0$, то

$$\text{sign } a_1 = \text{sign}(\text{Re}(y_3 - y_1) \cdot \text{Im}(y_3 - y_1)).$$

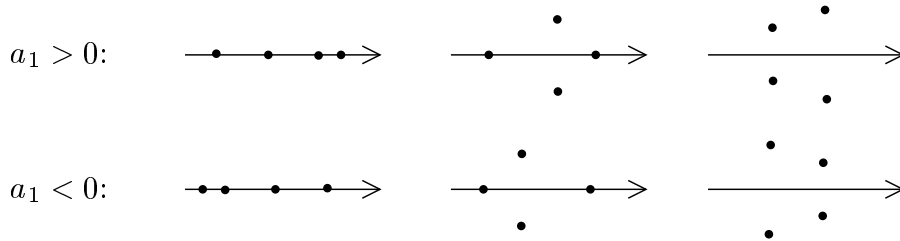


Рис. 12. Зависимость $\text{sign } a_1$ от корней.

Доказательство. В [8, лемма 4.2] дано доказательство утверждения (а), основанное на некоторых элементарных вычислениях. Само собой, что такими же вычислениями можно доказать также (б) и (с), однако мы приведем другое доказательство сразу всех утверждений (а)–(с), никаких вычислений не требующее.

По лемме 5.1 в каждом из случаев (а), (б), (с) правая часть равенства обращается в нуль тогда и только тогда, когда $a_1 = 0$. Рассмотрим случай, когда правые части положительны. Обозначим через A (соотв. B, C) множество многочленов, для которых правая часть равенства (а) (соотв. (б), (с)) положительна. Легко видеть, что эти множества связны, а пересечения $A \cap B$ и $B \cap C$ непусты. В самом деле, многочлен с корнями $(-2, 0, 1, 1)$ лежит в $A \cap B$, а многочлен с корнями $(-1, -1, 1 \pm i)$ лежит в $B \cap C$. Поскольку a_1 не обращается в нуль на $A \cup B \cup C$, его знак постоянен на этом множестве. Значит достаточно знать знак a_1 для произвольного элемента множества A , например, для $(x - 1)^2 x(x + 2) = x^4 - 3x^2 + 2x$. \square

Следствие 5.3. В условиях леммы 5.2(a), если $y_1 < y_2 \leq y_3 = y_4$, то $a_1 > 0$, и если $y_1 = y_2 \leq y_3 < y_4$, то $a_1 < 0$. \square

Определение 5.4. (ср. [11, определение 3.6].) Пусть $y = f(x)$ — вещественная алгебраическая четырехзначная функция, не имеющая полюсов на отрезке $[x_1, x_2]$. Предположим, что

- (1) в каждой из точек x_1 и x_2 две аналитические ветви функции f имеют простое ветвление, а две другие ветви невырождены;
- (2) значения f различны и не вещественны при всех $x \in]x_1, x_2[$.

Пусть $x_0 = (x_1 + x_2)/2$. Обозначим через f_j^{sing} и f_j^{reg} , $j = 1, 2$, ветви функции f на $[x_j, x_0]$, мнимые части которых положительны, причем f_j^{sing} имеет ветвление в x_j , а f_j^{reg} не имеет. Положим $V = \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \{(x, y) \mid \text{Im } x = 0\}$. Обозначим через S_+ объединение графиков f_j^{sing} и f_j^{reg} , $j = 1, 2$, и четырех отрезков

$$[(x'_j, 0), (x_j, f_j^{\text{reg}}(x_j))], \quad [(x_j, 0), (x_j, f_j^{\text{sing}}(x_j))], \quad j = 1, 2,$$

где $x'_1 < x_1 < x_2 < x'_2$. Пусть $S = S_+ \cup r(S_+)$, где r — вращение пространства V на 180° вокруг оси $y = 0$. Снабдим S^+ ориентацией, индуцированной проекцией на отрезок $[x'_1, x'_2]$, и продолжим эту ориентацию на всё S . Тогда S — объединение двух непересекающихся ориентированных замкнутых кривых. Их индекс зацепления назовем *индексом самозацепления функции f на отрезке $[x_1, x_2]$* .

Лемма 5.5. (ср. [11, лемма 3.7]). Пусть $f(x)$ — четырехзначная алгебраическая функция, неявно заданная уравнением $y^4 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0$, где a_0, a_1, a_2 — многочлены с вещественными коэффициентами. Предположим, что $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям (1)–(2) определения 5.4. Обозначим через k индекс самозацепления функции f на отрезке $[x_1, x_2]$. Предположим, что $k \neq 0$. Пусть $x'_1 < x_1 < x_2 < x'_2$ и $a_1(x'_j) \neq 0$, $j = 1, 2$. Тогда a_1 имеет не менее $|2k + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2|$ вещественных корней на отрезке $[x'_1, x'_2]$, где $\varepsilon_j = \text{sign } a_1(x'_j)$.

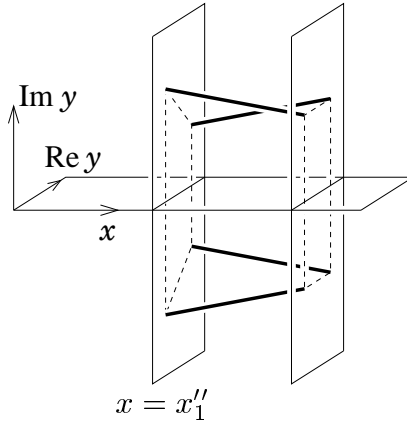
Доказательство. Мы рассмотрим только случай, когда $k > 0$ и образ множества S^+ при проекции $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, \text{Im } y)$, имеет ровно k самопересечений. Другие случаи легко сводятся к этому.

По лемме 5.2(c) в этом случае имеется k корней многочлена $a_1(x)$ в x -координатах точек самопересечения множества $\pi(S^+)$ и еще $k - 1$ корней между каждыми двумя последовательными самопересечениями.

Обозначим через x''_1 (соотв. x''_2) x -координату первого (соотв. последнего) самопересечения. Тогда при $0 < \delta \ll 1$ имеем $a_1(x''_1 - \delta) < 0$ и $a_1(x''_2 + \delta) > 0$ (см. лемму 5.2(c) и рис. 13). Следовательно, есть не менее $(1 + \varepsilon_1)/2$ корней многочлена a_1 на отрезке $[x'_1, x''_1 - \delta]$ и не менее $(1 - \varepsilon_2)/2$ корней на $[x''_2 + \delta, x'_2]$, следовательно, не менее, чем

$$k + (k - 1) + (1 + \varepsilon_1)/2 + (1 - \varepsilon_2)/2 = 2k + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$$

корней на отрезке $[x'_1, x'_2]$. \square

Рис. 13. $a_1(x_1'') < 0$ при $k > 0$.

5.2. Алгебраическая нереализуемость расположения $\tilde{C}_2(1, 4, 4)$. Доказательство похоже на доказательства алгебраической нереализуемости максимальных расположений (аффинных M -секстик) $A_4(1, 5, 4)$ и $C_2(1, 3, 6)$ в [10, 11].

Шаг 1. Расположения псевдоголоморфных кривых относительно вспомогательного пучка прямых. Предположим, что C_6 — псевдоголоморфная M -секстика и C_1 — прямая, имеющие взаимное расположение $\tilde{C}_2(1, 4, 4)$. Выберем p , как в §4.3. Вычисляя, тоже как в §4.3, многочлены Александра для всех априори возможных последовательностей (i_1, \dots, i_9) (их 140), мы убеждаемся, что только две следующие \mathcal{L}_p -схемы не противоречат обобщенной теореме Фокса – Милнора:

$$[\supset_2 o_2^3 o_3 o_4^4 o_2 \subset_2] \quad (6)$$

$$[\supset_2 o_2 o_3 o_4^4 o_2^3 \subset_2] \quad (7)$$

При этом \mathcal{L}_p -схема (6) отвечает псевдоголоморфной кривой, построенной в §3.1, и мне неизвестно, реализуема ли псевдоголоморфно (7).

Шаг 2. Существенные нодальные вырождения \mathcal{L}_p -схем (6) и (7). Будем говорить, что нодальное вырождение \mathcal{L}_p -схемы *существенно*, если оно меняет соответствующую косу, т.е. не является вырождением вида $\supset_i \subset_i \rightarrow \times_i$ или стягиванием пустого овала в уединенную двойную точку. Это значит, что символ \times_i где-то вставляется в кодирующее слово.

Предположим, что C_6' — псевдоголоморфная кривая, \mathcal{L}_p -схема которой получена из (6) или (7) в результате существенного нодального вырождения. Тогда в силу неравенства Мурасуги-Трисирама многочлен Александра соответствующей косы должен тождественно обращаться в нуль. Единственные существенные нодальные вырождения, удовлетворяющие данному условию, это

$$[\supset_2 o_2^3 o_3 o_4^4 o_2 \subset_2] \rightarrow [\supset_2 o_2^3 o_3 o_4^3 \subset_4 \times_5 \supset_4 o_2 \subset_2] \text{ и } [\supset_2 o_2^3 o_3 o_4^5 \subset_2 \times_1 \supset_2 \subset_2]$$

для (6). В частности, (7) не допускает ни одного существенного нодального вырождения.

Отметим, что во всех случаях кроме четырех (по два случая для каждой из \mathcal{L}_p -схем (6) и (7)) нет необходимости вычислять многочлен Александра, так как уже детерминант косы не равен нулю.

Шаг 3. Применение метода Гильберта – Роона – Гудкова. Предположим теперь, что C_6 и C_1 — вещественные алгебраические кривые. Выберем уравнение $f_6 = 0$ кривой C_6 так, что $f_6 < 0$ в неориентируемой компоненте множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_6$.

Рассмотрим непрерывную деформацию C_6 в пучке $f_6 + tg_3^2 = 0$ для общего кубического многочлена g_3 . Тогда (см. подробности в [10]) C_6 должна выродиться в nodальную кривую. Выбирая другой пучок такого же вида, но с общим многочленом g_3 , обращаемся в нуль в образовавшемся ноде, получим следующее вырождение секстики, уже с двумя нодами. Продолжая этот процесс, мы придем к секстике C'_6 с 10 нодами. В силу доказанного на шаге 2, расположение C'_6 и C_1 — одно из изображенных на рис. 14. По формуле рода кривая C'_6 рациональна.

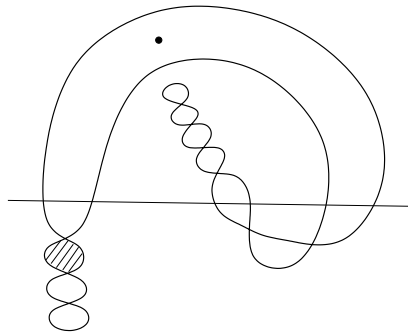


Рис. 14

Рассмотрим теперь эквисингулярную деформацию кривой C'_6 такую, что неподвижны все ноды кроме тех двух, которые примыкают к двуугольнику, заштрихованному на рис. 14. Несложно проверить, что это однопараметрическое семейство, гладкое в C'_6 . Двигаясь в этом семействе в направлении, в котором заштрихованный двуугольник стягивается, мы выродим C'_6 в кривую C''_6 с особой точкой q типа A_3 (точка касания двух гладких ветвей) вместо заштрихованного двуугольника. Вращая C_1 вокруг p — одной из двух средних точек пересечения, получим прямую C''_1 , проходящую через q , такую, что четыре правые точки пересечения кривых C''_1 и C''_6 по-прежнему расположены, как на рис. 14.

Шаг 4. Сведение к четырехзначной функции. Обозначим через T касательную прямую к C''_6 в точке q . Точно так же, как и в [11; леммы 3.11 и 3.13(b)], доказывается, что C''_6 расположена относительно T и C''_1 , как на рис. 15 с точностью до изотопии (прямоугольный фрагмент может быть заменен, как показано на рисунке).

Раздуем дважды точку q и затем стянем собственный прообраз прямой T . Обозначим исключительные кривые этих раздутий через E_1 и E_2 (E_2 — раздутие точки пересечения кривой E_1 с собственным прообразом кривой C''_6).

Мы получим кривую C_4 бистепени $(4, 8)$ на поверхности Хирцебруха \mathcal{F}_2 (квадратичный конус с раздутой вершиной). Обозначим собственные прообразы на \mathcal{F}_2 кри-

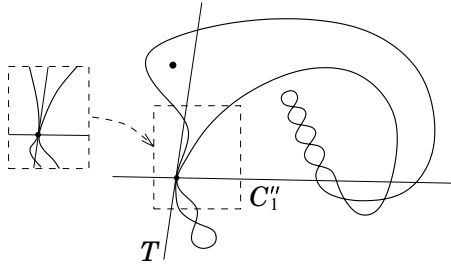


Рис. 15

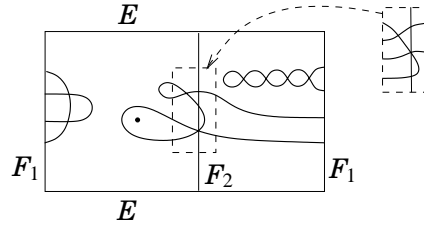


Рис. 16

вых C_1'' , E_1 и E_2 через F_1 , E и F_2 соответственно. Тогда F_1 и F_2 — слои, а E — исключительное сечение расслоения $\pi : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. В стандартной системе координат на \mathcal{F}_2 кривая C_4 задается уравнением $y^4 + a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$, где a_m — многочлен от x и

$$\deg a_m(x) \leq 2(4 - m), \quad m = 0, 1, 2, 3. \quad (8)$$

Стандартной заменой можно убить коэффициент $a_3(x)$.

Из того, что $C_6'' \cup C_1''$ такое, как на рис. 14, следует, что C_4 расположена относительно F_1 , F_2 и E , как на рис. 16, где $\mathbb{R}\mathcal{F}_2$ представлена в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами ($\mathbb{R}\mathcal{F}_2$ — это тор). Следовательно, расположение C_4 относительно слоев проекции π имеет вид $[w_1 \subset_1 o_2 \subset_3 \times_3 w_2 \subset_3 \times_3^4]$, где w_2 — это либо $[\times_1 \supset_2]$, либо $[\times_2 \supset_1]$, а все априори возможные значения для w_1 приведены в таблице 2.

Шаг 5. Применение кубической резольвенты или подсчет числа корней многочлена $a_1(x)$. Для каждого значения w_1 вычислим индекс самозацепления k (см. определение 5.4), как это сделано в [11, лемма 3.13(a)]. Результаты приведены в таблице 2. В столбце d даны нижние оценки $\deg a_1(x)$, вытекающие из леммы 5.5 и следствия 5.3. Как видно из таблицы, во всех случаях имеет место противоречие с условием (8).

Таблица 2.

по.	w_1	k	d	по.	w_1	k	d
1	$\times_3 \times_3 \supset_2 \supset_1$	-4	10	5	$\times_1 \times_3 \supset_2 \supset_1$	-3	10
2	$\times_3 \times_2 \supset_3 \supset_1$	-4	10	6	$\times_1 \times_2 \supset_3 \supset_1$	-3	10
3	$\times_3 \times_2 \supset_1 \supset_1$	-3	10	7	$\times_1 \times_2 \supset_1 \supset_1$	-2	8
4	$\times_3 \times_1 \supset_2 \supset_1$	-3	10	8	$\times_1 \times_1 \supset_2 \supset_1$	-2	8

Разберем более подробно вывод оценки $\deg a_1(x) \geq 8$ в случае, отвечающем последней строке таблицы 2. Остальные случаи аналогичны. Выберем точки $x'_1, x_1, x_2, x'_2, x_3, x_4$ на \mathbb{RP}^1 , как показано на рис. 17.1 (при $w_2 = \times_1 \supset_2$) или на рис. 17.2 (при $w_2 = \times_2 \supset_1$). В обоих случаях мы имеем $a_1(x'_1) < 0$, $a_1(x'_2) > 0$, $a_1(x_3) < 0$ и $a_1(x_4) > 0$ в силу следствия 5.3. Следовательно, a_1 имеет не менее одного корня

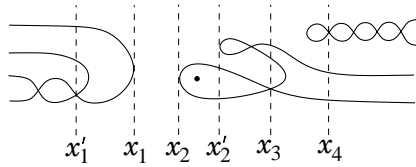


Рис. 17.1

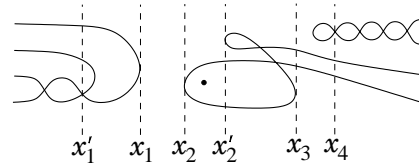


Рис. 17.2

на каждом из интервалов $[x'_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, $[x_4, x'_1]$, а также, по лемме 5.5, не менее $|2 \cdot (-2) + (-1 - 1)/2| = 5$ корней на $[x'_1, x'_2]$. Таким образом, $\deg a_1 \geq 1 + 1 + 1 + 5 = 8$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S. Fiedler-LeTouzé, S. Orevkov, and E. Shustin, *Corrigendum to the paper “A flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable”*, J. of Alg. Geom. **29** (2020), 109-121.
2. Д. А. Гудков, *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*, УМН **29:4** (1974), 3–79.
3. А. Harnack, *Über die Vielfaltigkeit der ebenen algebraischen Kurven*, Math. Ann. **10** (1876), 189–199.
4. А. Б. Корчагин, Е. И. Шустин, *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Изв. АН СССР, сер. мат. **52:6** (1988), 1181–1199.
5. С. Ю. Оревков, *Новая аффинная M -секстика*, Функц. анализ. прилож. **32:2** (1998), 91–94.
6. S. Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology **38** (1999), 779–810.
7. S. Yu. Orevkov, *Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy*, GAFA - Geom. and Funct. Anal. **12** (2002), 723–755.
8. С. Ю. Оревков, *Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь*, Алгебра и анализ **19:4** (2007), 174–242.
9. S. Yu. Orevkov, *Algebraically unrealizable complex orientations of plane real pseudoholomorphic curves*, GAFA - Geom. and Funct. Anal. **31** (2021), 930–947.
10. S. Yu. Orevkov and E. I. Shustin, *Flexible algebraically unrealizable curves: rehabilitation of Hilbert-Rohn-Gudkov approach*, J. für die Reine und Angew. Math. **511** (2002), 145–172.
11. S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, *Pseudoholomorphic algebraically unrealizable curves*, Moscow Math. J. **3** (2003), 1053–1083.
12. Е. И. Шустин, *К изотопической классификации аффинных M -кривых степени 6*, Методы качественной теории и теории бифуркаций, ГГУ, Горький, 1988, pp. 97–105.
13. О. Я. Виро, *Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией*, Алгебра и анализ **1:5** (1989), 1–73.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИН-Т ИМ. В. А. СТЕКЛОВА, РАН, МОСКВА, УЛ. ГУБКИНА 8, РФ

ИМТ, L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, TOULOUSE, FRANCE

ЛАБОРАТОРИЯ АГГА, МФТИ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ), ДОЛГОПРУДНЫЙ, МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ, РФ
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr