

НОВАЯ АФФИННАЯ M -СЕКСТИКА. II

С.Ю. ОРЕВКОВ

Аффинная вещественная алгебраическая кривая называется *аффинной M -кривой* если она имеет максимально возможное разрешенное неравенством Харнака число компонент связности, в частности, аффинная M -секстика имеет 16 компонент связности, 10 из которых являются овалами, и остальные 6 получены из 11-го овала проективизации выкидыванием бесконечно удаленных точек. В настоящей заметке мы продолжаем изотопическую классификацию аффинных M -секстик, начатую в [1–5], и приводим подробности реализации изотопического типа $A_3(0, 5, 5)$ (см. рис. 1, где L — бесконечно удаленная прямая). Он был ошибочно объявлен запрещенным в [3]. Результат и идея доказательства были анонсированы в [5, §2].

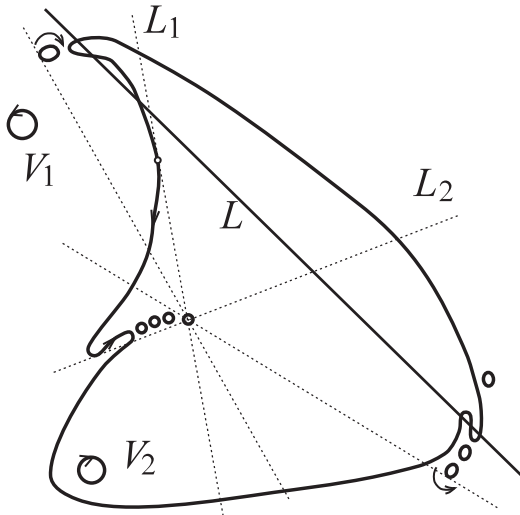


Рис. 1.

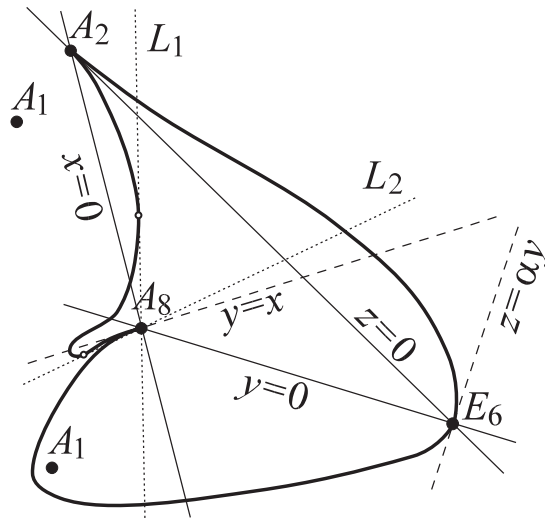


Рис. 2.

Построение очень похоже на реализацию $B_2(1, 8, 1)$, приведенную в [4]: мы возмущаем рациональную кривую, полученную непосредственным решением системы уравнений на коэффициенты, определяемую некоторым заданным набором типов особенностей. Однако, мы здесь используем геометрические рассуждения, позволяющие сократить вычисления. Такими же рассуждениями можно упростить доказательство в [4].

Построим плоскую рациональную секстику C с особенностями E_6, A_8, A_2, A_1, A_1 , такую, что прямая, проходящая через E_6 и A_2 (обозначим ее через L),

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и DGICYT SAB95-0502

касается C в A_2 . Выберем координаты $(x : y : z)$ как на рис. 2 и рассмотрим параметризацию $t \mapsto (x : y : z)$ кривой C , такую что $0 \mapsto A_8$, $1 \mapsto A_2$, $\infty \mapsto E_6$. Тогда

$$x(t) = t^2(bt^2 + ct + 1)(t - 1)^2, \quad y(t) = t^2(at + 1), \quad z(t) = (t - 1)^3. \quad (1)$$

Особенности E_6 и A_2 обеспечены (1). Условие на A_8 имеет вид

$$\exists \gamma_2, \gamma_3 \text{ такие, что } \text{ord}_{t=0}(vz^2 - \gamma_2u^2z - \gamma_3u^3) = 8, \quad (2)$$

где $u = x + y$, $v = x - y$. Раскладывая $vz^2 - \gamma_2u^2z - \gamma_3u^3$ в виде $e_3t^3 + e_4t^4 + \dots$ где e_j — полиномиальные выражения от переменных $a, b, c, \gamma_2, \gamma_3$, мы видим, что (2) дает систему уравнений и неравенств $e_3 = \dots = e_7 = 0$, $e_8 \neq 0$. Эта система имеет 4 решения, два из которых вещественны. Мы выберем решение

$$\begin{aligned} a &= \alpha, & b &= -(6\alpha^2 + 11\alpha + 3)/11, & c &= \alpha + 2, \\ \gamma_2 &= (6\alpha^2 + 33\alpha + 36)/44, & \gamma_3 &= -(111\alpha^2 + 374\alpha + 347)/968, \end{aligned}$$

где $\alpha = -5.1046\dots$ — единственный вещественный корень уравнения

$$3\alpha^3 + 24\alpha^2 + 51\alpha + 34 = 0. \quad (3)$$

Лемма. C расположена относительно координатных осей как на рис. 2.

Следствие. (см. Лемму в [6].) C можно сгладить так, как изображено на рис. 1.

Лемму можно доказать методом работы [4], но это требует больших вычислений, которые наврядли можно выполнить без компьютера. Здесь мы даем геометрическое доказательство, в котором все вычисления можно проверить вручную.

Обозначим через C_0 главную компоненту связности кривой C — образ \mathbf{RP}^1 (остальные компоненты — уединенные двойные точки). Корни (с учетом кратностей) многочленов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ таковы:

$$\begin{array}{l} x(t) : \quad -0.53\dots \quad 0 \quad 0 \quad 0.20\dots \quad 1 \quad 1 \\ y(t) : \quad 0 \quad 0 \quad 1.19\dots \quad \infty \quad \infty \quad \infty \\ z(t) : \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \infty \quad \infty \quad \infty \end{array}$$

Значит, C_0 пересекает координатные оси в порядке, показанном на рис. 2. Поскольку $\gamma_2 \approx 0.543 > 0$, ветвь кривой C в A_8 расположена относительно касательной $x = y$ как на рис. 2. Из формулы рода следует, что у C есть еще две простые двойные точки. Покажем, что они вещественны. Действительно, иначе мы получили бы противоречие с фидлеровским правилом чередования ориентаций [7] на отрезке пучка прямых $[L_1L_2]$ (см. рис. 2).

Покажем, что каждая из точек A_1 дает при надлежащем сглаживании пустой овал.¹ Координатные оси делят C_0 на 6 дуг. Три из них не могут пересекать остальные, так как они разделены координатными осями. Мы имеем

¹Овал называется пустым, если внутри него нет других овалов

$y(t) - \alpha z(t) = (3\alpha + 1)t^2 - 3\alpha t + \alpha$. Дискриминант этого многочлена от t равен $-3\alpha^2 - 4\alpha \approx -57.7 < 0$, значит, касательная $y = \alpha z$ в точке E_6 разделяет все остальные пары дуг кроме тех двух дуг, которые выходят из A_8 . Если они пересекались бы в двух точках, то существовало бы M -сглаживание кривой C с 6 внутренними овалами, что невозможно. Если же они пересекались бы в одной точке, то три внутренних овала были бы отрицательными, что противоречит формуле Рохлина для комплексных ориентаций [8]. Таким образом, каждая из точек A_1 является либо уединенной точкой, либо точкой самопересечения одной из дуг (ниже будет видно, что последнее невозможно). В любом случае есть сглаживание, дающее пустой овал.

Как мы показали выше, одна из точек A_1 должна быть между L_1 и L_2 . Обозначим через V_2 овал, полученный ее сглаживанием. Те же рассуждения применительно к отрезку $-\infty < \lambda < 0$ пучка прямых $y = \lambda x$ (возмущения прямых $x = 0$ и $y = 0$, а также некоторые комплексные ориентации изображены на рис. 1) показывают, что другая точка A_1 (обозначим соответствующий овал через V_1) должна лежать в полуплоскости $H = \{xy > 0\}$. Предположим, что овал V_1 — внутренний. Тогда он не может лежать в левом секторе множества H (по теореме Безу), но если он лежал бы в правом секторе, то он был бы ориентирован по часовой стрелке, что опять противоречит правилу чередования ориентаций.

Таким образом, овал V_1 — внешний, значит, V_2 — внутренний, так как число внутренних овалов M -секстики не может равняться 4. Из формулы комплексных ориентаций следует, что V_2 ориентирован по часовой стрелке, значит, по правилу чередования ориентаций, V_2 лежит в левом нижнем секторе множества $\mathbf{RP}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$. Из комплексных ориентаций видно (см. рис. 1), что обе точки A_1 — уединенные. Лемма доказана.

Замечания. 1. В работе [6] приведено доказательство существования независимого сглаживания особенностей только в случае неприводимой проективной кривой. Однако, требующийся нам аналогичный результат для приводимых кривых доказывается точно также (см. замечание в конце работы [6]). Наше построение можно свести к неприводимому случаю. Для этого достаточно явно выписать деформацию C_ε кривой C , положив $z(t) = (t - 1)^3(1 - \varepsilon t)$ в (1) и сохранив условие (2). Вычисления показывают, что при $\varepsilon = 1/8$ множество вещественных точек кривой C_ε получается из рис. 2 поворотом каспа A_2 против часовой стрелки.

2. Поскольку C имеет точку E_6 кратности 3, можно бирациональными преобразованиями понизить ее степень. Однако, при этом координатные оси отобразятся на коники или кубики, и на наш взгляд задача не упростится.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М.Полотовский, *(M - 2)-кривые 8-го порядка: построения, открытые вопросы*, Депонировано в ВИНТИ, №1185-85Деп, 1984 pages С. 1-195.
2. А.Б. Корчагин, Е.И. Шустин, *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Известия АН СССР, сер. мат., Т. 52, №6, 1988, С. 1181–1199.
3. Е.И. Шустин, *К изотопической классификации аффинных M-кривых степени 6*, Методы качественной теории и теории бифуркаций, Горький, Изд-во ГГУ, 1988, С. 97–105.

4. С.Ю. Оревкин, *Новая аффинная M-секстика*, Функц. Анализ и его Прилож. (в печати).
5. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, *Preprint*, 1997.
6. Е.И. Шустин, *Новая M-кривая 8-й степени*, Мат. Заметки, Т. 42, №2, 1987, С. 180–186.
7. Т. Фидлер, *Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых*, Изв. АН СССР, сер. мат., Т. 46, 1982, С. 853–863.
8. В.А. Рохлин, *Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых*, Функц. Анализ и его Прилож. Т.8, вып. 4, 1974, С. 71-75.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН ИМ. В.А.СТЕКЛОВА, МОСКВА, УЛ. ВАВИЛОВА, 42