Компактификация пространства разветвленных накрытий двумерной сферы

Звонилов В.И., Оревков С.Ю.*

10 апреля 2017 г.

УДК 515.179.25

Аннотация

Для замкнутой ориентированной поверхности Σ определяются ее вырождения в особые поверхности, локально гомеоморфные букетам кругов. Множество $X_{\Sigma,n}$ классов изоморфности n-листных сохраняющих ориентацию разветвленных накрытий $\Sigma \to S^2$ двумерной сферы пополняется классами отображений, накрывающих сферу вырождениями поверхности Σ. Топология, вводимая в полученном пополнении $\bar{X}_{\Sigma,n}$, в случае $\Sigma = S^2$ совпадает на $X_{S^2,n}$ с топологией, индуцированной пространством коэффициентов рациональных дробей P/Q, где P, Q – однородные многочлены степени n на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$.

Доказано, что $\bar{X}_{\Sigma,n}$ совпадает с компактификацией Диаса-Эдидина-Натанзона-Тураева пространства Гурвица $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$, состоящего из классов изоморфности накрытий с простыми критическими значениями.

1 Введение

Пусть Σ – замкнутая ориентированная поверхность (фиксированная во всей статье). Сохраняющие ориентацию n-листные разветвленные накрытия $f_1, f_2 : \Sigma \to S^2$ двумерной сферы называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $\alpha : \Sigma \to \Sigma$ с $f_2 \circ \alpha = f_1$. Пусть $X_{\Sigma,n}$ – множество классов изоморфности таких накрытий и $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$ –

*Второй автор работал при поддержке гранта РНФ: соглашение 14-21-00053 от 11.08.14.

подмножество, состоящее из классов изоморфности накрытий с простыми (т.е. имеющими кратность 1) критическими значениями. По формуле Римана-Гурвица сумма кратностей критических значений накрытия $f \in X_{\Sigma,n}$ равна $2n - \chi(\Sigma)$, где χ – эйлерова характеристика.

Обозначим через P^k симметрическую степень сферы S^2, т.е. фактор-пространство пространства $(S^2)^k$ по перестановкам координат. Для $k = 2n - \chi(\Sigma)$ пусть $LL : X_{\Sigma,n} \to P^k$ – отображение, для которого образом класса изоморфности $[f]$ накрытия f является множество, состоящее из критических значений этого накрытия, взятых с их кратностями.

Хорошо известно (см., например, [18, 5.3.5]), что в $H(\Sigma, n)$ можно естественным образом определить топологию, для которой сужение $LL|_{H(\Sigma,n)}$ является неразветвленным накрытием своего образа. Она превращает $H(\Sigma, n)$ в *пространство Гурвица.*

Построению компактификаций пространства $H(\Sigma, n)$ средствами алгебраической геометрии посвящен ряд статей, начинающийся с фундаментальной работы Дж. Харриса и Д. Мамфорда [2]. С. Натанзон и В. Тураев [3] построили компактификацию $N(\Sigma, n)$ этого пространства топологическими средствами. С. Диас [4] доказал совпадение пространства $N(\Sigma, n)$ с компактификацией пространства $H(\Sigma, n)$, построенной в [5] средствами алгебраической геометрии.

Мы описываем компактификацию $N(\Sigma, n)$ пространства Гурвица, на наш взгляд, геометрически более наглядно. Кроме того, наше описание делает очевидным тот факт, что $X_{\Sigma,n}$ естественным образом вкладывается в $N(\Sigma, n)$. В частности, мы компактифицируем пространство классов изоморфности рациональных функций на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$, в котором нас прежде всего интересует подпространство j-инвариантов тригональных кривых на линейчатой поверхности, т.е. отображений базы линейчатой поверхности в модулярную кривую, см. [6, п. 4], а также [7, 2.1.2, 3.1.1]. В дальнейших работах мы намереваемся применить полученные результаты для вычисления фундаментальной группы пространства неособых тригональных кривых.

Часто под пространствами Гурвица также понимаются и более общие объекты, в которых вместо накрытий сферы рассматриваются разветвленные накрытия степени n, базой B которых является замкнутая ориентированная поверхность любого рода. При этом может фиксироваться подгруппа G группы перестановок степени n и классы сопряженности в G, которым принадлежат локальные монодромии критических значений накрытия. В случае, когда $B = S^2$, эти пространства можно отождествить со стратами некоторой естественной стратификации пары пространств $(N(\Sigma, n), X_{\Sigma,n})$. См. [9] – [14].

Структура статьи: в пунктах 2.1, 2.2 вводятся понятия вырожденной (особой) поверхности и накрытия ею двумерной сферы; в п. 2.3 множество $X_{\Sigma,n}$ пополняется классами отображений, накрывающих сферу вырождениями поверхности Σ, в полученном пополнении $\bar{X}_{\Sigma,n}$ определяется топология и доказывается ее хаусдорфовость с помощью продолжения отображения LL на $\bar{X}_{\Sigma,n}$; в п. 3 доказывается, что $X_{S^2,n}$ гомеоморфно пространству классов изоморфности рациональных функций на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$; п. 4 содержит доказательство гомеоморфности пространств $\bar{X}_{\Sigma,n}$ и $N(\Sigma, n)$, в котором ключевой ссылкой является предложение 4 о том, что если край ориентированной поверхности накрывает окружность, сохраняя ориентацию, то это накрытие продолжается до разветвленного накрытия круга самой поверхностью единственным с точностью до изотопии образом (см. [8, следствие 2.2]).

2 Пространство классов изоморфности разветвленных накрытий.

2.1 Особая поверхность

Нам понадобится топологический аналог понятия особой алгебраической кривой.

В настоящей работе *поверхностью* будем называть хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу или букету открытых кругов, (или объединению открытого полукруга с диаметром на его границе – для поверхностей с краем, который определяется стандартным образом). Назовем такую окрестность *допустимой*, а круги букета – *ветвями поверхности* в центре букета. Мы будем считать, что каждой точке v такой поверхности приписано некоторое целое неотрицательное число g_v, называемое *локальным родом поверхности в точке* v, причем для всех точек кроме конечного числа и для точек на крае поверхности локальный род равен нулю. То есть, говоря более формально, поверхность – это пара, состоящая из топологического пространства и заданной на нем целозначной функции $v \mapsto g_v$, обладающих перечисленными свойствами. Обозначим через m_v число ветвей поверхности в точке v и через $\mu_v = 2g_v + m_v - 1$ – *число Милнора* точки v. Точки с $\mu_v > 0$ назовем *особыми точками* поверхности. Поверхность с особыми точками назовем *вырожденной*, или *особой*, а без особых точек – *неособой поверхностью*.

Если для каждой точки v с $m_v > 1$ заменить ее допустимую окрестность несвязным объединением кругов, т.е. вырезать эту окрестность и заклеить полученные дыры кругами, то получим поверхность, которую назовем *нормализацией* исходной поверхности. Имеется естественная проекция π нормализации на исходную поверхность, переводящая каждый приклеенный круг в соответствующий круг букета. *Компонентами* поверхности называются компоненты связности ее нормализации. Таким образом, *компонента поверхности является двумерным многообразием.* Поверхность называется *ориентированной/замкнутой*, если ее нормализация ориентирована/замкнута (компактна и без края).

Всюду ниже мы рассматриваем ориентированные поверхности и отображения, сохраняющие их ориентацию.

Пусть Σ_0 – поверхность (в вышеуказанном смысле, возможно, особая), v – любая ее точка и U_v – замыкание допустимой окрестности этой точки. Склеим по их общему краю поверхность $\Sigma_0 \setminus \mathrm{Int} U_v$ и связную компактную ориентируемую (возможно, особую) поверхность $\tilde{U}_v$ с m_v компонентами края, для которой $b_2(\tilde{U}_v) = 0$ (т.е. $\tilde{U}_v$ не имеет компонент без края) и $b_1(\tilde{U}_v) + \sum_{x \in \tilde{U}_v} \mu_x = \mu_v$; здесь через b_i мы обозначаем i-е число Бетти. Назовем полученную поверхность Σ_1 *возмущением поверхности* Σ_0 *в точке* v, или *локальным возмущением*, а поверхность Σ_0 – *локальным вырождением поверхности* Σ_1, *полученными с помощью* U_v, $\tilde{U}_v$. Композицию конечного числа локальных возмущений/вырождений поверхности назовем *возмущением/вырождением* этой поверхности.

Замечание 1. *Для поверхности* $\tilde{U}_v$ *из предыдущего определения* $b_1(\tilde{U}_v) = 1 - \chi(\tilde{U}_v)$, *а если* $\tilde{U}_v$ *неособа, то* $\mu_v = 1 - \chi(\tilde{U}_v)$.

Доказательство. Первое равенство справедливо для любой поверхности $\tilde{U}_v$ с перечисленными свойствами, а второе следует из определения возмущения. □

2.2 Возмущения/вырождения накрытий

Отображение f поверхности Σ' в двумерную сферу назовем *разветвленным накрытием*, если сужение композиции $f \circ \pi$ (см. п. 2.1) на каждую компоненту этой поверхности является разветвленным накрытием, сохраняющим ориентацию, и особые точки $v \in \Sigma'$ с $m_v = 1$ являются точками ветвления отображения f. Точки ветвления отображения f, а также особые точки поверхности Σ' мы будем называть *критическими точками* отображения f, а их образы — *критическими значениями.*

Для разветвленного накрытия $f_0 : \Sigma_0 \to S^2$ пусть v – его критическая точка и $\bar{U}_w$ – замкнутый круг на сфере, содержащий внутри себя точку $w = f_0(v)$ и не содержащий других критических значений накрытия f_0. Выберем компоненту связности U_v множества $f^{-1}(\bar{U}_w)$, содержащую точку v. Ясно, что это замкнутая допустимая окрестность точки v. Пусть

Σ_1 – возмущение поверхности Σ_0 в точке v, полученное с помощью U_v, $\tilde{U}_v$. Назовем разветвленное накрытие $f_1 : \Sigma_1 \to S^2$ *возмущением накрытия* f_0 *в точке* v, или *локальным возмущением, с областью возмущения* $\bar{U}_w$, а f_0 *локальным вырождением накрытия* f_1, если $f_0 = f_1$ на $\Sigma_0 \setminus \mathrm{Int}U_v = \Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}\tilde{U}_v$. Ясно, что $f_1(\tilde{U}_v) = \bar{U}_w$.

Пусть теперь круги $\bar{U}_w$, выбранные для всех критических значений накрытия f_0, попарно не пересекаются. Композицию f конечного числа локальных возмущений этого накрытия, имеющих области возмущения $\bar{U}_w$, назовем *возмущением* этого накрытия. Объединение $V = \bigcup_w \bar{U}_w$ назовем *областью возмущения* накрытия f_0. При этом накрытие f_0 называется *вырождением* накрытия f.

Следующее замечание сразу получается из определения возмущения.

Замечание 2. Транзитивность возмущаемости: *Пусть* $f_1 : \Sigma_1 \to S^2$ – *возмущение разветвленного накрытия* $f_0 : \Sigma_0 \to S^2$ *с областью возмущения* V_0 *и* $f_2 : \Sigma_2 \to S^2$ – *возмущение разветвленного накрытия* f_1 *с областью возмущения* $V_1 \subset V_0$. *Тогда* f_2 – *возмущение разветвленного накрытия* f_0 *с областью возмущения* V_0.

Далее нам понадобятся вырождения только фиксированной *неособой* поверхности Σ (см. введение).

Пусть $f' : \Sigma' \to S^2$ – вырождение разветвленного накрытия $f : \Sigma \to S^2$, отвечающее области возмущения V. Для каждой критической точки v накрытия f' определены поверхности $U_v \subset \Sigma', \tilde{U}_v \subset \Sigma$. Обозначим через $k_1, k_2, \ldots, k_{m_v}$ степени сужений накрытия f' на граничные окружности букета дисков U_v. Ясно, что сумма $\sum_{i=1}^{m_v} k_i$ равна локальной степени $\deg_v f'$ отображения f' в точке v, т.е. кратности этой точки как корня уравнения $w = f'(v)$. *Индексом точки* $v \in \Sigma'$ назовем число $\mathrm{ind}_v = \mu_v + \deg_v f'$.

Кратностью критического значения разветвленного накрытия f' назовем сумму уменьшенных на 1 индексов прообразов этого значения. Критическое значение кратности 1 называется *простым*, а не простое – *кратным*. Обозначим через $\mathrm{cr}f'$ множество всех критических значений накрытия f'.

Предложение 1. *Пусть* $f' : \Sigma' \to S^2$ – *вырождение разветвленного накрытия* $f : \Sigma \to S^2$. *Сумма кратностей критических значений накрытия* f' *не зависит от* f' *и равна* $2n - \chi(\Sigma)$, *где* $n = \deg f = \deg f'$ – *число листов накрытия.*

Доказательство. Пусть f получено из f' с помощью области возмущения V. Критической точке v накрытия f' отвечает компонента связности

$\tilde{U}_v \subset \Sigma$ множества $f^{-1}(V)$, причем, согласно замечанию 1, индекс ind_v этой критической точки равен $1 - \chi(\tilde{U}_v) + \deg_v f'$. Пусть $cr = \mathrm{cr} f'$ и $|cr|$ – число критических значений. Сумма кратностей этих значений равна

$$\sum_{w \in cr} \sum_{v \in f'^{-1}(w)} (\mathrm{ind}_v - 1) = \sum_{w \in cr} \sum_{v \in f'^{-1}(w)} (\deg_v f' - \chi(\tilde{U}_v)) = n|cr| - \sum_v \chi(\tilde{U}_v).$$

Поскольку $\chi(S^2 \setminus V) = 2 - |cr|$ и f над $S^2 \setminus V$ является неразветвленным накрытием,

$$n|cr| - \sum_v \chi(\tilde{U}_v) = 2n - \chi(f^{-1}(S^2 \setminus V)) - \sum_v \chi(\tilde{U}_v) = 2n - \chi(\Sigma).$$

□

Предложение 2. *Для любого разветвленного накрытия $f : \Sigma \to S^2$ и любого разбиения множества его критических значений существует такое вырождение f' этого накрытия, что любое критическое значение накрытия f' отвечает классу разбиения и имеет кратность, равную сумме кратностей критических значений этого класса.*

Доказательство. Поместим каждый класс внутрь замкнутого топологического круга так, чтобы эти круги попарно не пересекались и выберем в каждом круге внутреннюю точку. Пусть $\bar{U}_w$ – любой такой круг с выбранной точкой w. Пометим буквой v компоненту связности $\tilde{U}_v$ прообраза $f^{-1}(\bar{U}_w)$. Пусть m_v – число окружностей в $\partial\tilde{U}_v$. На поверхности Σ заменим $\tilde{U}_v$ букетом $U_v = \bigvee_{i=1}^{m_v} D_i$ замкнутых кругов, обозначив через v его центр. После всех таких замен получим вырождение Σ' поверхности Σ. Сужение на $\Sigma \setminus \bigcup_w \mathrm{Int}\bar{U}_w$ отображения f продолжим до отображения $f' : \Sigma' \to S^2$, полагая, что сужение f' на D_i является имеющим соответствующую кратность разветвленным накрытием круга $\bar{U}_w$ с единственной критической точкой v, переходящей в w. Поскольку поверхность Σ неособа, из замечания 1, формулы Римана-Гурвица для $f : f^{-1}(\bar{U}_w) \to \bar{U}_w$ и определения кратности критического значения w, следует, что эта кратность равна сумме кратностей критических значений накрытия f, лежащих в $\bar{U}_w$. □

Предположим, что критические значения разветвленных накрытий $f_1 : \Sigma_1 \to S^2$, $f_2 : \Sigma_2 \to S^2$ совпадают вместе с кратностями, некоторая изотопия $\{\varphi_t : S^2 \to S^2\}_{t\in[0,1]}$ тождественного отображения сферы при каждом t переводит каждое критическое значение в себя и существует (сохраняющий ориентацию) гомеоморфизм $\beta : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ с $f_2 \circ \beta = \varphi_1 \circ f_1$. Тогда эти накрытия называются *изоморфными*.

Предложение 3. (Ср. [3, доказательство леммы 1.3.1]). *Накрытия f_1 и f_2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $\alpha : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ такой, что $f_2 \circ \alpha = f_1$.* $\square$

Таким образом, данное определение изоморфизма накрытий эквивалентно тому, которое было во введении (заметим, что определение из введения слово в слово переносится на особые накрывающие поверхности).

Ясно, что если два накрытия изоморфны, то для любого возмущения/-вырождения f первого из них существует возмущение/вырождение второго, изоморфное f. Поэтому можно говорить о возмущении/вырождении класса изоморфности накрытия.

Пусть $V = \bigcup_{e\in E} D_e \subset S^2$ – объединение попарно непересекающихся замкнутых топологических кругов, где e – фиксированная внутренняя точка круга D_e. Предположим, что критические значения разветвленных накрытий $f_0 : \Sigma_0 \to S^2$, $f_1 : \Sigma_1 \to S^2$ являются простыми и лежат внутри V. Назовем такие накрытия (V, E)-*эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы $\alpha : \Sigma_0 \to \Sigma_1$ и $\varphi : S^2 \to S^2$, для которых

(i) $\varphi \circ f_0 = f_1 \circ \alpha$;

(ii) гомеоморфизм φ оставляет неподвижными точки множества $E \cup (S^2 \setminus \mathrm{Int}V)$ и изотопен тождественному в классе гомеоморфизмов, оставляющих неподвижными эти точки.

Предложение 4. *Для любого разветвленного накрытия $f_0 : \Sigma_0 \to S^2$ существует его возмущение $f_1 : \Sigma_1 \to S^2$ в критической точке v, для которого поверхность $\tilde{U}_v \subset \Sigma_1$ неособа и $\chi(\tilde{U}_v) = 2 - 2g_v - m_v$. Более того, f_1 можно выбрать так, чтобы все его критические значения в области возмущения $\bar{U}_w$, где $w = f_0(v)$, были простыми и заранее заданными. В последнем случае накрытие f_1 единственно с точностью до $(\bar{U}_w, w)$-эквивалентности.*

Доказательство. Из связной неособой поверхности рода g_v вырежем m_v открытых кругов с непересекающимися замыканиями, получив $\tilde{U}_v$ с $\chi(\tilde{U}_v) = 2 - 2g_v - m_v$. Пусть $f : \tilde{U}_v \to \bar{U}_w$ – разветвленное накрытие с заранее заданными критическими значениями такое, что $f = f_0$ на $\partial U_v = \partial\tilde{U}_v$. Для его построения достаточно разложить m_v непересекающихся циклов (монодромию накрытия вдоль $\partial\bar{U}_w$) в произведение транспозиций, порождающих транзитивную группу перестановок (см., например, [7, следствие 10.12]). Положим $\Sigma_1 = (\Sigma_0 \setminus U_v) \cup \tilde{U}_v$, $f_1 = f_0$ на $\Sigma_0 \setminus U_v$ и $f_1 = f$ на $\tilde{U}_v$.

Единственность доказана в [8, следствие 2.2] (или, например, [7, следствие 10.12]). Доказательство неподвижности точки w при соответствующей изотопии использует поднятие изотопии в пространство накрытия (ср. [3, доказательство леммы 1.3.1]). $\square$

2.3 Топология в множестве классов изоморфности разветвленных накрытий.

Напомним, что Σ – неособая ориентированная замкнутая поверхность. Как и во введении, обозначим через $X_{\Sigma,n}$ множество классов изоморфности n-листных разветвленных накрытий $\Sigma \to S^2$ и через $\bar{X}_{\Sigma,n}$ – множество всех вырождений классов изоморфности накрытий из $X_{\Sigma,n}$.

Для $[f] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$ выберем область возмущения V накрытия f. Обозначим через $U_{[f],V} \subset \bar{X}_{\Sigma,n}$ множество классов изоморфности всех возмущений накрытия f, задаваемых областью возмущения V. Другими словами, это те классы возмущений накрытий из $[f]$, множества критических значений которых лежат в V.

Предложение 5. *Совокупность* $\{U_{[f],V} \mid f \in \bar{X}_{\Sigma,n}, V$ – область возмущения накрытия $f\}$ *образует базу топологии в множестве* $\bar{X}_{\Sigma,n}$. *Подмножество* $X_{\Sigma,n}$ *всюду плотно в пространстве* $\bar{X}_{\Sigma,n}$ *с этой топологией.*

Доказательство. Ясно, что объединение множеств этой совокупности равно $\bar{X}_{\Sigma,n}$. Кроме того, если $[f] \in U_{[f_1],V_1}$, то для области возмущения $V \subset V_1$ накрытия f по транзитивности возмущаемости (замечание 2) $U_{[f],V} \subset U_{[f_1],V_1}$. Поэтому если $[f] \in U_{[f_1],V_1} \cap U_{[f_2],V_2}$, то для области возмущения $V \subset V_1 \cap V_2$ накрытия f получаем, что $U_{[f],V} \subset U_{[f_1],V_1} \cap U_{[f_2],V_2}$. Следовательно, $\{U_{[f],V}\}$ – база топологии в множестве $\bar{X}_{\Sigma,n}$.

Всюду плотность множества $X_{\Sigma,n}$ сразу следует из определения топологии в $\bar{X}_{\Sigma,n}$. $\square$

Напомним, что $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$ – подмножество, состоящее из классов изоморфности накрытий с простыми критическими значениями (см. введение).

Предложение 6. *Для любого разветвленного накрытия* f_0 *с* $[f_0] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$ *и его области возмущения* V *существует* $[f] \in U_{[f_0],V} \cap H(\Sigma, n)$, *причем* f *единственно с точностью до* $(V, \mathrm{cr} f_0)$*-эквивалентности.*

Доказательство. Пусть v – критическая точка накрытия f_0 и $\bar{U}_w$ – компонента связности множества V, являющаяся замкнутой окрестностью точки $w = f_0(v)$. Согласно предложению 4, существует возмущение $[f_v] \in U_{[f_0],V}$, критические значения которого, лежащие в $\bar{U}_w$, простые, поверхность $\tilde{U}_v$ (компонента связности множества $f^{-1}(V)$, отвечающая точке v) неособа и $\chi(\tilde{U}_v) = 2 - 2g_v - m_v = 1 - \mu_v$. Пусть $f : \Sigma_1 \to S^2$ –композиция всех локальных возмущений f_v.

Поскольку $[f_0] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$, существует возмущение f' накрытия f_0 с $[f'] \in X_{\Sigma,n}$ и с некоторой областью возмущения V'. Докажем, что поверхности Σ и Σ_1 гомеоморфны. Ясно, что поверхности $S^2 \setminus \mathrm{Int}V$ и $S^2 \setminus \mathrm{Int}V'$ гомеоморфны, а f_0 – неразветвленное накрытие над ними. Следовательно, по определению возмущения разветвленного накрытия $f^{-1}(S^2 \setminus \mathrm{Int}V) = f_0^{-1}(S^2 \setminus \mathrm{Int}V) \cong f_0^{-1}(S^2 \setminus \mathrm{Int}V') = f'^{-1}(S^2 \setminus \mathrm{Int}V')$. Пусть $\tilde{U}'_v$ – компонента связности множества $f'^{-1}(V')$, отвечающая критической точке v накрытия f_0. По замечанию 1 и сказанному выше $\chi(\tilde{U}'_v) = 1 - \mu_v = \chi(\tilde{U}_v)$. Края поверхностей $\tilde{U}_v$, $\tilde{U}'_v$ состоят из m_v окружностей. Поэтому $\tilde{U}_v \cong \tilde{U}'_v$. Следовательно, $f^{-1}(V) \cong f'^{-1}(V')$ и $\Sigma_1 \cong \Sigma$.

Из предложения 4 следует единственность построенного накрытия f с точностью до $(V, \mathrm{cr} f_0)$-эквивалентности. □

Согласно предложению 1, для $[f] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$ сумма кратностей критических значений накрытия f равна $2n - \chi(\Sigma)$. Продолжим на $\bar{X}_{\Sigma,n}$ отображение LL (см. введение). Для $k = 2n - \chi(\Sigma)$ пусть $LL : \bar{X}_{\Sigma,n} \to P^k$ – отображение, для которого $LL[f]$ – множество, состоящее из критических значений накрытия f, взятых с их кратностями.

Область возмущения V накрытия f задает окрестность каждого критического значения накрытия f и, тем самым, определяет некоторую окрестность W точки $LL[f]$.

Лемма 1. $W = LL(U_{[f],V})$.

Доказательство. По определению, $LL[f'] \in W$ для любого $[f'] \in U_{[f],V}$.

Для получения обратного включения выберем $x \in W$ и построим накрытие f' с $LL[f'] = x$. Согласно предложению 6, существует накрытие $\tilde{f}$ с $[\tilde{f}] \in U_{[f],V}$, все критические значения которого простые. Для каждого критического значения w накрытия f пусть $\bar{U}_w$ – компонента связности множества V, являющаяся замкнутой окрестностью точки w. Из определения множества W следует, что все точки пересечения $x \cap \bar{U}_w = \{x_1, \dots, x_p\}$ лежат внутри множества $\bar{U}_w$ и сумма $\sum_{i=1}^{p} \nu_i$ их кратностей равна кратности ν_w критического значения w. С другой стороны, множество M_w критических значений накрытия $\tilde{f}$, лежащих в $\bar{U}_w$, состоит из ν_w внутренних точек множества $\bar{U}_w$. Поэтому в $\bar{U}_w$ можно выбрать такие попарно непересекающиеся замкнутые топологические круги $D_1, \dots, D_p$, что $\mathrm{Int}D_i$ содержит точку x_i и ν_i точек множества M_w.

Применив к полученному разбиению множества критических значений накрытия $\tilde{f}$ предложение 2, получим требуемое накрытие f'. Из доказательства указанного предложения следует, что критические значения накрытия f' можно выбрать в точках множества x с учетом их кратностей. $\square$

Предложение 7. *Отображение LL сюръективно, непрерывно, открыто и конечно.*

Доказательство. Элемент $x \in P^k$ определяет множество точек на сфере. Выберем попарно непересекающиеся замкнутые топологические круги $\bar{U}_w \subset S^2$, каждый из которых содержит ровно одну такую точку w. Выберем внутри каждого круга различные точки в количестве, равном кратности точки w в множестве x. Согласно [18, предложение 1.2.15] и формуле Римана-Гурвица, существует $[f] \in X_{\Sigma,n}$ с критическими значениями, равными выбранным точкам, причем круги $\bar{U}_w$ определяют разбиение множества этих критических значений. Применив к f и этому разбиению предложение 2, получим сюръективность отображения LL.

Согласно предложению 5, совокупность областей возмущений накрытия f определяет базу $\{U_{[f],V}\}_V$ в точке $[f]$. По лемме 1 множество $LL(U_{[f],V}) = W$ является окрестностью точки $LL[f]$. Ясно, что совокупность $\{LL(U_{[f],V})\}_V$ – база в точке $LL[f]$. Поэтому LL непрерывно в каждой точке $[f] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$ и открыто.

Прообраз при отображении LL заданного множества критических значений состоит из накрытий, отличающихся, с точностью до изоморфности, вырождениями поверхности Σ и наборами индексов критических точек, которых конечное число. Поэтому LL конечно. $\square$

Теорема 1. *Пространство $\bar{X}_{\Sigma,n}$ хаусдорфово.*

Доказательство. Если $LL[f_1] \neq LL[f_2]$, то прообразы непересекающихся окрестности точек $LL[f_1], LL[f_2]$ дают непересекающиеся окрестности точек $[f_1], [f_2]$.

Пусть $LL[f_1] = LL[f_2]$, т.е. множества критических значений (вместе с их кратностями) накрытий f_1, f_2 совпадают. Пусть V – общая область возмущения накрытий f_1, f_2 и $[f'] \in U_{[f_1],V} \cap U_{[f_2],V}$. Тогда каждая компонета связности $\tilde{U}'$ множества $f'^{-1}(V)$ выделяет пару гомеоморфных компонент $U_{v_1} \cong U_{v_2}$ множеств $f_1^{-1}(V)$, $f_2^{-1}(V)$, где v_i – центр букета кругов U_{v_i}. Поскольку f является общим возмущением накрытий f_1, f_2, из определения локального возмущения следует, что $\mu_{v_1} = \mu_{v_2}$. Кроме того, так как $f_1|_{\Sigma_1 \setminus f_1^{-1}(\mathrm{Int} V)} = f'|_{\Sigma' \setminus f'^{-1}(\mathrm{Int} V)} = f_2|_{\Sigma_2 \setminus f_2^{-1}(\mathrm{Int} V)}$, где $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'$ – соответствующие накрывающие поверхности, то $f_1|_{\partial U_{v_1}} = f_2|_{\partial U_{v_2}}$. Поэтому индексы критических точек v_1, v_2 совпадают и, следовательно,

$f_1|_{U_{v_1}} = f_2|_{U_{v_2}}$ при отождествлении U_{v_1} с U_{v_2}. Таким образом, $[f_1] = [f_2]$. Это доказывает, что для $[f_1] \neq [f_2]$ окрестности $U_{[f_1],V}$, $U_{[f_2],V}$ не пересекаются. $\square$

Следствие 1. *Для $W = LL(U_{[f],V})$ и $w = LL[f]$ множество $U_{[f],V}$ является компонентой связности прообраза $LL^{-1}(W)$, не содержащей точек множества $LL^{-1}(w)$, отличных от $[f]$.*

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $LL^{-1}(W) \subset \bigcup_{[f'] \in LL^{-1}(w)} U_{[f'],V}$. Обратное включение следует из леммы 1. Из доказательства теоремы 1 получается, что члены этого объединения, отвечающие разным точкам множества $LL^{-1}(w)$, не пересекаются. Поэтому, как открытые множества, они являются компонентами связности прообраза $LL^{-1}(W)$. $\square$

3 Пространство модулей рациональных функций

Обозначим через F_n пространство комплексных рациональных функций $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ степени n, т.е. рациональных дробей $f = a(x)/b(x)$, где a и b – взаимно простые однородные многочлены степени n, с топологией, заданной коэффициентами многочленов, т. е. мы рассматриваем F_n как подпространство в $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1}$.

В F_n действует группа $G = PGL(2, \mathbb{C})$: если $x = (x_0, x_1)$ – строка, то для функции $f = a(x)/b(x)$ и матрицы $g \in G$ функция $f^g(x)$ равна $a(xg)/b(xg)$. Обозначим через $\mathcal{X}_n$ фактор-пространство F_n/G и через $pr : F_n \to \mathcal{X}_n$ – проекцию на фактор-пространство.

Из непрерывности действия группы G на F_n следует, что pr – *открытое отображение.*

Лемма 2. *Пространство $\mathcal{X}_n$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Пусть l – произвольная точка из $\mathcal{X}_n$. Любая последовательность в $\mathcal{X}_n$, сходящаяся к l, содержит подпоследовательность, являющуюся образом некоторой последовательности в F_n, сходящейся к некоторому элементу множества $pr^{-1}(l)$.

Доказательство. Отображение pr открыто, поэтому оно переводит счетную базу в точке $f \in F_n$ в счетную базу в точке $pr(f)$.

Пусть $l_m \to l$ – сходящаяся последовательность в $\mathcal{X}_n$ и f – любая точка в $pr^{-1}(l)$. Для каждого множества U из счетной базы в точке f

возьмем член l_{m_U} последовательности l_m с наименьшим номером, лежащий в $pr(U)$, и выберем любую точку $f_{m_U} \in pr^{-1}(l_{m_U}) \cap U$. Ясно, что $f_{m_U} \to f$. □

Лемма 3. *В $\mathcal{X}_n$ предел последовательности единственен.*

Доказательство. Пусть (z_m) – сходящаяся последовательность в $\mathcal{X}_n$ и l, l^* – два ее предела. Любая ее подпоследовательность имеет те же пределы. Поэтому, применяя дважды лемму 2, получаем две сходящиеся последовательности $f_m = a_m/b_m \to f = a/b$, $f^*_m = a^*_m/b^*_m \to f^* = a^*/b^*$ в F_n с $pr(f_m) = pr(f^*_m) = z_m$, $pr(f) = l$ и $pr(f^*) = l^*$. Условие $pr(f_m) = pr(f^*_m)$ означает существование элементов $g_m \in G$ таких, что $f_m^{g_m} = f^*_m$.

Выберем корень α многочлена a. Поскольку $a_m \to a$, у каждого многочлена a_m можно выбрать корень α_m таким образом, что $\alpha_m \to \alpha$. Аналогично выберем последовательности корней β_m и γ_m многочленов b_m и $a_m + b_m$, сходящиеся к корням β и γ многочленов b_m и $a_m + b_m$ соответственно. Положим $\alpha^*_m = \alpha_m g_m^{-1}$, $\beta^* = \beta_m g_m^{-1}$, $\gamma^* = \gamma_m g_m^{-1}$. Поскольку это корни многочленов a^*_m, b^*_m, $a^*_m + b^*_m$ соответственно, то после замены (f_m) ее подпоследовательностью, можно считать, что последовательности (α^*_m), (β^*_m) и (γ^*_m) сходятся к некоторым корням α^*, β^*, γ^* многочленов a^*, b^* и $a^* + b^*$ соответственно. В силу взаимной простоты многочленов a и b (а также a^* и b^*) точки α, β, γ (соответственно, α^*, β^*, γ^*) различны. Поэтому существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $\alpha g = \alpha^*$, $\beta g = \beta^*$, $\gamma g = \gamma^*$.

В силу взаимной простоты многочленов a_m и b_m точки α_m, β_m, γ_m различны, и значит g_m однозначно определяется парой троек $(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)$ и $(\alpha^*_m, \beta^*_m, \gamma^*_m)$, последовательность которых сходится к паре троек (α, β, γ) и $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, однозначно определяющей элемент g. Поэтому $g_m \to g$. Переходя к пределу в равенстве $f_m^{g_m} = f^*_m$, получаем $f^g = f^*$. Следовательно, $l = l^*$.

□

Теорема 2. *Пространство $\mathcal{X}_n$ хаусдорфово.*

Доказательство. Легко проверить, что топологическое пространство с первой аксиомой счетности и единственностью предела последовательности хаусдорфово. □

Заметим, что теорема 2 легко следует также из теоремы Мамфорда о стабильных точках, см., например, [15, ч. II, п. 4.6, теорема 4.16] (в примере 1° п. 4.6 указанной работы надо просто заменить пространство PV_{2g+2} бинарных форм и дискриминант формы, соответственно, на F_n и результант числителя и знаменателя рациональной функции). Более того, по теореме Мамфорда пространство $\mathcal{X}_n$ – алгебраическое многообразие.

3.1 Отображение Ляшко-Лойенги

Отображение Ляшко-Лойенги $\mathcal{LL}$ ставит в соответствие непостоянной рациональной функции $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ унимодальный (т. е. со старшим коэффициентом 1) многочлен $(t-t_1)^{l_1}\dots(t-t_r)^{l_r}$ от переменной t, корнями которого являются конечные критические значения функции f, причем кратность l_i корня t_i равна разности между суммой кратностей всех решений уравнения $f(x) = t_i$ и числом этих решений.

Согласно [16, лемма 4.3], образом рациональной функции $f = P(x)/Q(x)$ при отображении $\mathcal{LL}$ является, с точностью до постоянного множителя, дискриминант многочлена $P(x) - tQ(x)$.

Нам понадобится однородный вариант отображения Ляшко-Лойенги

$$\mathcal{LL}[P(x) : Q(x)] = \mathrm{discr}_x(t_1Q(x) - t_0P(x)).$$

Напомним, что дискриминант однородного многочлена $F(x_0, x_1)$ степени d можно определить как результант многочленов $F'_{x_0}(x_0, 1)$, $F'_{x_1}(x_0, 1)$, он является однородным многочленом степени $2d-2$ относительно коэффициентов многочлена F (см., например, [17, §1]).

Ясно, что отображение $\mathcal{LL}$ инвариантно относительно действия группы G, поэтому на $\mathcal{X}_n$ определено фактор-отображение $\overline{\mathcal{LL}}$ с $\overline{\mathcal{LL}} \circ pr = \mathcal{LL}$.

Замечание 3. *В силу полиномиальности отображения $\mathcal{LL}$ и открытости проекции pr отображение $\overline{\mathcal{LL}}$ непрерывно и открыто.* $\square$

3.2 Связь с разветвленными накрытиями

Пусть $X_n = X_{S^2,n}$, причем накрываемую сферу мы здесь будем отождествлять с $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, и пусть $c : X_n \to \mathcal{X}_n$ – отображение, которое ставит в соответствие классу $[f]$ орбиту $[f^c] = Gf^c$ рациональной функции f^c, полученной поднятием комплексной структуры со сферы $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ на S^2.

Теорема 3. *Отображение c является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [18, §1.8]), что c – биекция. Чтобы доказать, что c является гомеоморфизмом, достаточно доказать, что c переводит базу $\{U_{[f],V}\}$ в точке $[f] \in X_n$ (см. предложение 5) в базу в точке $[f^c] \in \mathcal{X}_n$.

Отождествим P^{2n-2} (напомним, что P^k – это k-я симметрическая степень сферы S^2) с пространством однородных многочленов степени $2n-2$.

Ясно, что $\overline{\mathcal{LL}} \circ c = LL$. Поэтому $\overline{\mathcal{LL}}$, как и LL, конечно (см. п. 7). В силу конечности отображения $\overline{\mathcal{LL}}$ и хаусдорфовости пространства $\mathcal{X}_n$, существует такая окрестность W точки $\overline{\mathcal{LL}}[f^c]$, что компонента связности U множества $\overline{\mathcal{LL}}^{-1}(W)$ является окрестностью точки $[f^c]$. Поскольку $\overline{\mathcal{LL}}$ открыто и непрерывно, $\overline{\mathcal{LL}}|_U^{-1}$ поднимает любую базу в точке $\overline{\mathcal{LL}}[f^c]$, лежащую в W, в базу в точке $[f^c]$. По лемме 1 в качестве окрестностей поднимаемой базы можно взять $LL(U_{[f],V}) \subset W$. Поэтому, учитывая следствие 1, получаем, что $\{c(U_{[f],V})\}_V$ – база в точке $[f^c]$. $\square$

4 Компактификация Натанзона-Тураева

Пусть Σ – замкнутая ориентированная поверхность. Опишем построенную Натанзоном и Тураевым [3] компактификацию $N(\Sigma, n)$ пространства $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$ классов изоморфности n-листных сохраняющих ориентацию разветвленных накрытий $f : \Sigma \to S^2$ с простыми критическими значениями.

Декорированной функцией на поверхности Σ называется тройка $(f, E, \{D_e\}_{e\in E})$, где $f \in H(\Sigma, n)$, E – конечное множество в S^2, не содержащее критических значений накрытия f, а $\{D_e\}_{e\in E}$ – совокупность попарно непересекающихся замкнутых кругов в S^2. При этом для каждого $e \in E$ внутренность круга D_e содержит как точку e, так и не менее двух критических значений накрытия f, а граница круга не содержит критических значений накрытия f.

Кратностью точки $e \in E$ называется число критических значений накрытия f, лежащих в D_e.

Декорированные функции $(f, E, \{D_e\}_{e\in E})$, $(f', E', \{D'_e\}_{e\in E'})$ называются *эквивалентными*, если $E = E'$ и существуют гомеоморфизмы $\alpha : \Sigma \to \Sigma$ и $\varphi : S^2 \to S^2$, для которых

(i) $\varphi \circ f = f' \circ \alpha$;

(ii) φ оставляет неподвижными точки множества E и лежащие вне $\bigcup_e D_e$ критические значения накрытия f;

(iii) гомеоморфизм φ изотопен тождественному в классе гомеоморфизмов, оставляющих неподвижными указанные в (ii) точки;

(iv) $\varphi(D_e) = D'_e$ для всех $e \in E$.

Класс эквивалентности декорированной функции $(f, E, \{D_e\}_{e\in E})$ обозначается через $[f, E, \{D_e\}_{e\in E}]$.

Точками пространства $N(\Sigma, n)$ являются классы эквивалентности декорированных функций.

Топология в $N = N(\Sigma, n)$ задается с помощью окрестностей. Для $x \in N$ и декорированной функции $(f, E, \{D_e\}_{e\in E})$ из класса x добавим к E все лежащие вне $\bigcup_{e\in E} D_e$ критические значения накрытия f, получив множество $\bar{E}$. Для $e' \in \bar{E}\setminus E$ пусть $D_{e'} \subset S^2\setminus(\bigcup_{e\in E} D_e)$ – замкнутый круг, содержащий внутри себя точку e'. При этом предполагается, что круги $D_{e'}$ попарно не пересекаются. Положим $D = \{D_e\}_{e\in\bar{E}}$. *Окрестность* U_D *точки* $x \in N$ состоит из классов, представленных декорированными функциями $(f', E', \{D'_{e'}\}_{e'\in E'})$ с $\bigcup_{e'} D'_{e'} \subset \bigcup_{e\in E} D_e$, причем $f' = h \circ f$, где h – некоторый гомеоморфизм сферы, тождественный вне $\bigcup_{e\in\bar{E}} \mathrm{Int} D_e$.

В следующем очевидном замечании использованы обозначения предыдущего определения.

Замечание 4. *Декорированные функции* $(f, E, \{D_e\}_{e\in E})$, $(f', E, \{D_e\}_{e\in E})$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда накрытия* f, f' *являются* $(V, \bar{E})$*-эквивалентными* (см. п. 2.2)*, где* $V = \bigcup_{e\in\bar{E}} D_e$. □

Напомним, что P^k – симметрическая степень сферы. Отображение $q : N(\Sigma, n) \to P^k$ с $k = 2n - \chi(\Sigma)$ задается условием: $q[f, E, \{D_e\}_{e\in E}]$ –множество критических значений накрытия f, лежащих вне $\bigcup_{e\in E} D_e$ и взятых с кратностью 1, и точек $e \in E$ с определенными выше кратностями.

Теорема 4. *Существует единственный гомеоморфизм* $\nu : \bar{X}_{\Sigma,n} \to N(\Sigma, n)$*, тождественный на* $H(\Sigma, n)$*, для которого* $q \circ \nu = LL$.

Доказательство. Для $[f] \in \bar{X}_{\Sigma,n}$ пусть $\bar{E} = \mathrm{cr} f$. Обозначим через E подмножество кратных критических значений этого накрытия. Пусть $V = \bigcup_{e\in\bar{E}} D_e$ – область возмущения накрытия f. Согласно предложению 6, существует возмущение $\tilde{f}$ накрытия f с $[\tilde{f}] \in U_{[f],V} \cap H(\Sigma, n)$, причем согласно предложению 4 можно считать, что $E \cap \mathrm{cr}\tilde{f} = \varnothing$ и $\bar{E} \setminus E \subset \mathrm{cr}\tilde{f}$. Положим $\nu[f] = [\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}]$.

Докажем, что определение $\nu[f]$ не зависит от замены накрытия f изоморфным ему накрытием f', от выбора области возмущения накрытия и от выбора возмущения с простыми критическими значениями, связанного с этой областью. Заметим, что $\mathrm{cr} f' = \bar{E}$, т.к. $f' \cong f$. Пусть $V' = \bigcup_{e\in\bar{E}} D'_e$ – область возмущения накрытия f' и $\tilde{f}'$ – возмущение накрытия f' с $[\tilde{f}'] \in U_{[f'],V'} \cap H(\Sigma, n)$, причем, как и выше, можно считать, что $E \cap \mathrm{cr}\tilde{f}' = \varnothing$ и $\bar{E}\setminus E \subset \mathrm{cr}\tilde{f}'$. Существует изотопия тождественного отображения $\{\varphi_t : S^2 \to S^2\}_{t\in[0,1]}$, оставляющая точки множества $\bar{E}$ неподвижными и такая, что $\varphi_1(D'_e) = D_e$ для всех $e \in \bar{E}$. Поэтому $[\tilde{f}', E, \{D'_e\}_{e\in E}] =$

$[\varphi_1 \circ \tilde{f}', E, \{D_e\}_{e\in E}]$ и $[\varphi_1 \circ \tilde{f}'] \in U_{[f'],V} \cap H(\Sigma, n) = U_{[f],V} \cap H(\Sigma, n)$. В силу предложения 6, накрытия $\varphi_1 \circ \tilde{f}'$ и $\tilde{f}$ являются $(V, \bar{E})$-эквивалентными. Следовательно, $[\varphi_1 \circ \tilde{f}', E, \{D_e\}_{e\in E}] = [\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}]$ по замечанию 4, что доказывает корректность определения отображения ν.

Построим обратное отображение. Пусть $(\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E})$ – декорированная функция и $\bar{E}$ – объединение множества E и множества простых критических значений накрытия $\tilde{f}$, не лежащих в $\bigcup_{e\in E} D_e$. В $S^2 \setminus (\bigcup_{e\in E} D_e)$ выберем попарно непересекающиеся замкнутые круговые окрестности $\{D_e\}_{e\in \bar{E}\setminus E}$ точек множества $\bar{E} \setminus E$. Пусть $V = \bigcup_{e\in \bar{E}} D_e$. Согласно предложению 2, существует вырождение f накрытия $\tilde{f}$, для которого $[\tilde{f}] \in U_{[f],V} \cap H(\Sigma, n)$ и $LL(f) = q(\tilde{f})$. Легко проверить, что отображение $\nu^{-1} : [\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}] \mapsto [f]$ корректно определено (используя данное в п. 2.2 определение изоморфности разветвленных накрытий) и является обратным к ν. Поэтому ν – биекция.

Докажем, что ν переводит базу в произвольной точке $[f]$ в базу в точке $\nu[f]$. Пусть, как и выше, $\bar{E}$ – множество всех критических значений накрытия f, E – множество его кратных критических значений, $V = \bigcup_{e\in \bar{E}} D_e$ – область возмущения накрытия f и $\nu[f] = [\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}]$. Возьмем произвольный элемент $[f']$ множества $U_{[f],V}$. Пусть $\nu[f'] = [\tilde{f}', E', \{D'_{e'}\}_{e'\in E'}]$, где область возмущения $V' = \bigcup_{e'\in \bar{E}'} D'_{e'}$ накрытия f' выбрана внутри области V. Тогда $\bigcup_{e'\in E'} D'_{e'} \subset \bigcup_{e\in E} D_e$. Поэтому для того, чтобы доказать, что $\nu[f']$ лежит в окрестности U_D точки $\nu[f]$, где $D = \{D_e\}_{e\in \bar{E}}$, достаточно получить равенство $[\tilde{f}'] = [h \circ \tilde{f}]$, где h – некоторый гомеоморфизм сферы, тождественный вне $\bigcup_{e\in \bar{E}} \mathrm{Int} D_e = \mathrm{Int} V$. По определению, $[\tilde{f}] \in U_{[f],V} \cap H(\Sigma, n)$. Так как $V' \subset V$, то $[\tilde{f}'] \in U_{[f'],V'} \cap H(\Sigma, n) \subset U_{[f],V} \cap H(\Sigma, n)$ по транзитивности возмущаемости – см. замечание 2. Поэтому, согласно предложению 6, накрытия $\tilde{f}$ и $\tilde{f}'$ являются $(V, \bar{E})$-эквивалентными, так что существуют гомеоморфизмы $\alpha : \Sigma \to \Sigma$ и $h : S^2 \to S^2$ с $h \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ \alpha$. Заменив $\tilde{f}'$ изоморфным накрытием $\tilde{f}' \circ \alpha$, получим нужное равенство $[\tilde{f}'] = [h \circ \tilde{f}]$. Таким образом, $\nu(U_{[f],V}) \subset U_D$.

Обратно, пусть U_D – окрестность точки $[\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}]$, задаваемая семейством замкнутых кругов $D = \{D_e\}_{e\in \bar{E}}$, и $[\tilde{f}', E', \{D'_{e'}\}_{e'\in E'}] \in U_D$. Положим $V = \bigcup_{e\in \bar{E}} D_e$ и $V' = \bigcup_{e'\in E'} D'_{e'} \cup \bigcup_{e\in \bar{E}\setminus E} D_e$. Тогда $V' \subset V$ по определению окрестности U_D. Поэтому для $[f] = \nu^{-1}[\tilde{f}, E, \{D_e\}_{e\in E}]$ и $[f'] = \nu^{-1}[\tilde{f}', E', \{D'_{e'}\}_{e'\in E'}]$ получаем, что $[f'] \in U_{[f],V}$ по транзитивности возмущаемости (замечание 2). Таким образом, $\nu^{-1}(U_D) \subset U_{[f],V}$.

Согласно предложению 5 и [3, теорема 1.5], $\{U_{[f],V}\}_V$, $\{U_D\}_D$ – базы в точках $[f]$, $\nu[f]$. Поэтому ν – гомеоморфизм, единственность которого следует из его построения. Равенство $q \circ \nu = LL$ сразу следует из определения этих отображений. □

Если наделить сферу S^2 комплексной структурой, то симметрическая степень P^k становится комплексным проективным пространством. Поскольку $q|_{H(\Sigma,n)}$ является неразветвленным накрытием над открытым по Зарисскому подмножеством этого пространства, комплексная структура, поднятая с P^k, превращает $H(\Sigma, n)$ в гладкое квазипроективное многообразие.

Замечание 5. *Пространство $H(\Sigma, n)$ связно* (см. [1]; заметим, что сам Гурвиц в работе [1], формулируя этот результат, ссылается на более раннюю статью Клебша), *поэтому $N(\Sigma, n)$ тоже связно.* Согласно Диасу [4, п. 2], *$N(\Sigma, n)$ гомеоморфно нормальному проективному многообразию. В силу нормальности, особенности этого многообразия имеют комплексную коразмерность, не меньшую двух.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за советы и замечания, позволившие устранить недочеты и пробелы, имевшиеся в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

[1] *Hurwitz A.* Uber Riemannsche Flächen mit gegeben Verzweigunspuncten // Math. Ann. 1891. V. 39. P. 1-61.

[2] *Harris J., Mumford D.* On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Curves // Invent. Math. 1982. V. 67, N. 1. P. 23–88.

[3] *Natanzon S., Turaev V.* A compactification of the Hurwitz space // Topology. 1999. V. 38, N. 4. P. 889-914.

[4] *Diaz S.* On the Natanzon-Turaev compactification of the Hurwitz space // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130, N. 3. P. 613-618.

[5] *Diaz S., Edidin D.*. Towards the homology of Hurwitz spaces // J. Differential Geom. 1996. V. 43, N. 1. P. 66–98.

[6] *Orevkov S. Yu.* Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 2003. V. 12, N. 4. P. 517-531.

[7] *Degtyarev A.* Topology of algebraic curves. An approach via dessins d'enfants. De Gruyter Studies in Mathematics, 44. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2012.

[8] *Натанзон С.М.* Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1988. Вып. $XXIII$. С. 79-103. Англ. перевод: *Natanzon S.M.* Topology of 2-dimential coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves // Selecta. Math. Soviet. 1993. V. 12, N. 3. P. 251-291.

[9] *Berstein I., Edmonds A.L.* On the classification of generic branched coverings of surfaces // Illinois J. Math. 1984. V. 28, N. 1. P. 64-82.

[10] *Bogomolov F. A., Kulikov Vik. S.* The ambiguity index of an equipped finite group // Eur. J. Math. 2015. V. 1, N. 2. P. 260-278.

[11] *Fried M., Biggers R.* Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group // J. Reine Angew Math. 1982. V. 335. P. 87–121.

[12] *Fried M. D., Völklein H.* The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces // Math. Ann. 1991. V. 290, N. 1. P. 771–800.

[13] *Куликов Вик. С., Харламов В. М.* Полугруппы накрытий // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, №3. С. 163–198.

[14] *Куликов Вик. С.* Разложения на множители в конечных группах // Матем. сб. 2013. Т. 204, №2. С. 87–116.

[15] *Винберг Э.Б., Попов В.Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направл. М.: 1989. Т. 55. С. 137-309.

[16] *Ландо С.К.* Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых // УМН, 2002. Т. 57, Выпуск 3(345), С. 29-98.

[17] *Coolidge J.L.* A treatise of algebraic plane curves. Oxford Univ. Press, 1931.

[18] *Звонкин А.К., Ландо С.К.* Графы на поверхностях и их приложения. М.: МЦНМО, 2010.

Сведения об авторах

1. Звонилов Виктор Иванович
Место работы: Чукотский филиал Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова, кафедра общих дисциплин.
г. Анадырь, Чукотский автономный округ, 689000, ул. Студенческая, 3.
e-mail: zvonilov@gmail.com

2. Оревков Степан Юрьевич
Места работы: 1) Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
Москва, ул. Губкина 8.
2) IMT, l'université Paul Sabatier.
118 route de Narbonne, Toulouse, France.
3) Национальный исследовательский университет "Высшая школа Экономики".
Москва, ул. Усачева 6.
e-mail: stepan.orevkov@math.univ-toulouse.fr