

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité : Probabilités

par

Olivier MAZET

**Semigroupes de Markov associés
à une famille de polynômes orthogonaux.**

Soutenue le 12 Janvier 1998 devant le jury composé de Messieurs et

Madame les Professeurs :

D. BAKRY	Université Paul Sabatier	Directeur
F. HIRSCH	Université d'Evry Val d'Essonne	Rapporteur
M. LEDOUX	Université Paul Sabatier	Examineur
D. MICHEL	Université Paul Sabatier	Examinatrice
B. ROYNETTE	Université Nancy I	Examineur
L. SALOFF-COSTE	Université Paul Sabatier	Examineur
M. YOR	Université Paris VI	Rapporteur

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR CNRS 5883, Université Paul Sabatier, Toulouse III

*A Florence,
à ma famille,
à mes amis,
et à tous les autres.*

Remerciements:

Je tiens en tout premier lieu à remercier vivement et profondément le professeur Dominique Bakry, qui a su m'octroyer une disponibilité sans faille et une grande confiance, accompagnées de nombreux conseils qui me furent toujours utiles et profitables.

Ma reconnaissance va aussi sans détour aux professeurs Francis Hirsch et Marc Yor pour le temps qu'ils ont accordé à une lecture patiente et attentive, ainsi que pour leurs remarques constructives.

Enfin, que les professeurs Dominique Michel, Michel Ledoux, Bernard Roynette et Laurent Saloff-Coste soient remerciés d'avoir accepté d'être membres du jury.

Table des matières

<i>Introduction</i>	8
1 Introduction générale	11
1.1 Semigroupes de Markov	11
1.1.1 Notations, Hypothèses	11
1.1.2 Exemples	14
1.2 Semigroupes symétriques	16
1.2.1 Invariance et réversibilité	16
1.2.2 Décomposition spectrale	17
1.3 Semigroupes associés à une famille de polynômes orthogonaux	18
1.3.1 Exemples	19
1.4 Étude des semigroupes de Markov associés aux polynômes or- thogonaux	20
2 Une caractérisation de la positivité des semigroupes de Mar- kov symétriques	24
2.1 Une caractérisation des générateurs de semigroupes Markoviens	24
2.2 Caractérisation de la propriété de positivité	29
3 Semigroupes symétriques de diffusion	36
3.1 Classification des Semigroupes de diffusion sur $\mathbb{R}$ associés à une famille de polynômes orthogonaux	36
3.1.1 Introduction.	36
3.1.2 Notations - Hypothèses.	38
3.1.3 Résultat Principal.	41
3.1.4 Remarques sur l'interprétation géométrique de ces pro- cessus de diffusion particuliers.	47
3.2 Diffusions en dimension supérieure à 1	51

3.3	Un exemple sur $\mathbb{R}$ de semigroupe symétrique de Markov qui n'est pas de diffusion	54
4	Caractérisation du noyau markovien dans les cadres des polynômes de Hermite et de Jacobi	59
4.1	Cadre des polynômes de Hermite: théorème de Sarmanov-Bratoeva	59
4.2	Cadre des polynômes de Jacobi: théorème de Gasper	64
4.3	Liens entre le cadre des polynômes de Jacobi et celui des polynômes de Hermite	72
4.3.1	Lien entre les deux structures de convolution	72
4.3.2	Une autre démonstration du théorème de Sarmanov-Bratoeva	74
4.4	Structure d'hypergroupe associée aux polynômes de Jacobi	78
4.4.1	Hypergroupes: notions générales	79
4.4.2	Hypergroupes polynomiaux	83
4.4.3	Application aux polynômes de Jacobi et aux polynômes de Hermite	86
5	Caractérisation des semigroupes de Markov sur $\mathbb{R}$ associés aux polynômes de Hermite	88
5.1	Présentation du résultat	89
5.1.1	Démonstration	92
5.2	Description du processus associé	100
5.3	Interprétation géométrique	103
6	Semigroupes de Markov associés à une base orthogonale dans le cas d'un ensemble fini	109
6.1	Cas général de l'ensemble fini	109
6.2	Cas de l'espace à deux points	113
6.3	Cas de l'espace à trois points	114
6.4	Quelques exemples dans le cas de l'espace à trois points	115
	Bibliographie	121

Introduction :

L'objet principal de cette thèse est l'étude, sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable d'un ensemble probabilisé que nous notons $L^2(E, \mu)$, des semigroupes vérifiant la propriété de Markov. Cette étude se focalise principalement sur la caractérisation de la propriété de positivité des semigroupes, au moyen de considérations et d'outils algébriques. En effet, nous nous plaçons toujours dans le cas où $L^2(E, \mu)$ admet une base dénombrable $(f_i)_{i \in I}$, et nous étudions les semigroupes d'opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ qui admettent la famille $(f_i)_{i \in I}$ comme base de vecteurs propres. La mesure μ est alors réversible pour ces semigroupes, symétriques dans $L^2(E, \mu)$. C'est donc *via* cette décomposition spectrale que nous caractérisons et classifions dans différents cadres les semigroupes markoviens ou leurs générateurs infinitésimaux.

Après l'exposition, au chapitre 1, du cadre de travail dans lequel nous placerons en général tout au long de la thèse, ainsi que les principales définitions et propriétés des semigroupes de Markov symétriques, nous présentons au chapitre 2 une caractérisation des générateurs de semigroupes markoviens. Ceci est la réponse à une question posée dans [3], pour laquelle on montre l'équivalence entre la positivité du carré du champ associé à un semigroupe de Markov engendré par l'opérateur L , et la propriété suivante :

$$\text{Pour tout polynôme convexe } \phi \text{ et toute fonction } f \text{ de carré intégrable,} \\ L\phi(f) - \phi'(f)L(f) \geq 0.$$

Cette équivalence repose sur des arguments purement algébriques et ne suppose que l'existence d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions incluse dans $L^2(E, \mu)$, engendrée par la famille $(f_i)_{i \in I}$. Cette caractérisation algébrique s'étend analytiquement, dans le cas où $\mathcal{A}$ est dense dans tous les $L^p(E, \mu)$, et vérifie une certaine hypothèse technique, à une caractérisation de la propriété de positivité d'un semigroupe de Markov. Nous arrivons alors à l'équivalence suivante :

Un semigroupe d'opérateurs agissant sur $L^2(E, \mu)$ qui se décomposent sur une famille $(f_i)_{i \in I}$ engendrant l'algèbre $\mathcal{A}$ est positif si et seulement si l'opérateur carré du champ associé est lui-même positif sur $\mathcal{A}$.

En vue d'aborder le travail de classification proprement dite des semigroupes de Markov, nous particularisons le cadre de travail, en posant $E = \mathbb{R}$,

et en prenant la famille $(f_i)_{i \in I}$ comme base de polynômes orthogonaux sur $L^2(E, \mu)$. Le chapitre 3 est ainsi consacré, dans ce cadre particulier, à la classification des semigroupes de diffusion. Sont ainsi mis en évidence trois grands types de semigroupes de Markov associés à des polynômes orthogonaux. Les seuls semigroupes de diffusion dans ce cadre sont en effet les suivants :

- le semigroupe d’Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure gaussienne, associé à la famille des polynômes de Hermite,
- les semigroupes dits de Laguerre sur $\mathbb{R}^+$ muni de la mesure $\mu(dx) = e^{-x}x^\gamma dx$, associés à la famille des polynômes du même nom,
- les semigroupes dits de Jacobi sur $[-1, 1]$ muni de la mesure $\mu(dx) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, associés de nouveau à la famille des polynômes du même nom ; on retrouve les semigroupes ultrasphériques dans le cas où $\alpha = \beta$.

Nous montrons ensuite comment ces semigroupes sont liés les uns avec les autres, comment on les retrouve tous, au moyen de transformations géométriques, de projections et de passages à la limite sur les dimensions, à partir du mouvement brownien sur les sphères.

Cette classification appelle des généralisations dans différentes directions. Le passage en dimension supérieure, $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ne sera presque pas abordé ici. Nous préférons étendre l’étude aux semigroupes de Markov sur $\mathbb{R}$, toujours associés aux polynômes orthogonaux, qui ne sont pas nécessairement de diffusion. De par le caractère assez vaste de l’entreprise, nous nous restreignons aux espaces probabilisés (E, μ) pour lesquels il y a existence de semigroupes de diffusion. Ainsi, nous nous plaçons au chapitre 4 dans le cadre des polynômes de Jacobi, et nous reprenons une étude de G. Gasper ([17]), qui consiste en une caractérisation de la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres d’un opérateur positif sur la base des polynômes par la formule :

$$c_k = \int_{-1}^1 R_k(x) dF(x),$$

où F est une fonction croissante et bornée sur $[-1, 1]$, R_k est le k -ième polynôme de Jacobi normalisé de façon à ce que $R_k(1) = 1$.

Nous étendons alors cette étude dans le cadre des polynômes de Hermite, pour retrouver un résultat dû à Sarmanov et Bratoeva ([33]), par une

démarche qui permet de mettre en exergue, dans ces deux cadres, le rôle fondamental d'une certaine structure de convolution. Cette convolution, au moins dans le premier cadre, est par ailleurs à mettre en rapport avec la théorie des hypergroupes dont nous faisons pour la circonstance une rapide présentation.

Ce résultat de Sarmanov et Bratoeva caractérise les valeurs propres du noyau d'un opérateur positif sur la base des polynômes de Hermite comme étant les moments d'une certaine probabilité sur $[-1, 1]$. A partir de ce théorème, nous établissons au chapitre 5 une formule de type Lévy-Khintchine, dans le cadre des polynômes de Hermite, analogue à celle établie par Gasper dans le cadre des polynômes de Jacobi :

La suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres d'un semigroupe de Markov sur la base des polynômes de Hermite si et seulement s'il existe deux constantes positives c et θ et une mesure de probabilité ν sur $[-1, 1]$ telles que

$$\lambda_k = \theta k + c \int_{-1}^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} \nu(dx).$$

Nous donnons en plus de cette caractérisation des semigroupes de Markov sur l'espace gaussien, des descriptions trajectorielle et géométrique, toujours en liaison avec son analogue dans le cadre Jacobi, par des passages à la limite sur les dimensions des sphères.

Enfin, en vue d'étudier de façon plus générale le rôle de la base de vecteurs propres sur les semigroupes de Markov qui lui sont associés, nous traitons au chapitre 6 le cas de l'ensemble de cardinal fini, pour lequel nous montrons dans un premier temps que quel que soit le choix de la base, il y a toujours existence d'un semigroupe de Markov admettant une décomposition spectrale sur cette base. Nous observons alors sur chaque base l'ensemble des suites de valeurs propres associées à des opérateurs positifs, ensemble qui s'avère être un convexe borné, et que nous examinons en détail dans le cas de l'ensemble fini de cardinal 2 et 3.

Chapitre 1

Introduction générale

Nous consacrons ce chapitre à l'introduction des notions et objets dont nous aurons besoin, du cadre général de travail qui sera le nôtre tout au long de cette thèse. Après l'introduction des définitions et propriétés indispensables, nous revenons dans la dernière section à une description un peu plus détaillée des travaux figurant dans les chapitres suivants.

1.1 Semigroupes de Markov

1.1.1 Notations, Hypothèses

Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. L'objet fondamental auquel nous nous intéressons est une famille d'opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$, agissant sur les fonctions mesurables bornées définies sur E à l'aide d'une famille de noyaux $(p_t(x, dy))_{t \geq 0}$:

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, dy).$$

Les noyaux $p_t(x, dy)$ sont les noyaux de transition d'un processus de Markov homogène $(X_t)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire qu'ils sont définis par :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad p_t(x, A) = P(X_t \in A | X_0 = x),$$

et qu'ils satisfont aux propriétés suivantes :

- $\forall t, s \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}, \quad p_{t+s}(x, A) = \int_E p_t(x, dy) p_s(y, A)$ (Relation de Chapman-Kolmogorov)

- $\forall t \geq 0, \forall x \in E, \quad p_t(x, dy)$ est une mesure de probabilité sur E .

Ces définitions et propriétés se traduisent sur la famille $(P_t)_{t \geq 0}$ par :

- $P_0 = Id$; $\forall t, s \geq 0, \quad P_t \circ P_s = P_{t+s}$ (Propriété de semigroupe),
- $\forall t \geq 0, P_t 1 = 1$ et pour toute fonction f mesurable bornée positive, $P_t f \geq 0$ (Propriété de Markov).

La famille $(P_t)_{t \geq 0}$ est ainsi appelée un *semigroupe de Markov*. On demande en outre à ces opérateurs de vérifier sur $L^2(E, \mu)$ la continuité en 0 :

$$\forall f \in L^2(E, \mu), \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t f = f \text{ dans } L^2(E, \mu),$$

ce qui se traduit sur le processus associé par

$$\forall f \in L^2(E, \mu), \quad \lim_{t \rightarrow 0} E_x(f(X_t)) = f(x).$$

On demande enfin aux opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ de se prolonger en opérateurs continus sur $L^2(E, \mu)$, c'est-à-dire que

$$\forall t \geq 0, \exists C(t) > 0, \quad \forall f \in L^2(E, \mu), \quad \|P_t f\|_2 \leq C(t) \|f\|_2. \quad (1.1)$$

Cette propriété est automatiquement vérifiée, comme nous allons le voir à la section suivante, dans le cas où μ est une mesure invariante. $L^2(E, \mu)$ est l'espace fonctionnel sur lequel nous allons nous placer définitivement.

Commençons par y définir les opérateurs associés au semigroupe qui constituent des outils d'étude efficaces dans le cadre hilbertien $L^2(E, \mu)$.

Notons $\mathcal{D}_2(L)$ l'espace des fonctions f de $L^2(E, \mu)$ pour lesquelles la limite

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

existe. L est appelé le *générateur infinitésimal* du semigroupe $(P_t)_{t \geq 0}$. $\mathcal{D}_2(L)$ est un sous-espace dense de $L^2(E, \mu)$, et

$$\forall f \in \mathcal{D}_2(L), \quad \frac{d}{dt} P_t f = P_t Lf = L P_t f. \quad (1.2)$$

De plus, $P_t 1 = 1 \Rightarrow L1 = 0$.

Réciproquement, le semigroupe de contraction $(P_t)_{t \geq 0}$ est déterminé par la donnée de L et de son domaine, s'il vérifie les conditions du théorème de Lumer-Philipp (voir [21]) :

- $\forall f \in \mathcal{D}_2(L), \quad \langle Lf, f \rangle_{L^2(E, \mu)} \leq 0$ ($-L$ est dit *accrétif*)

- Tout prolongement accréatif de $-L$ est l'opérateur $-L$ lui-même ($-L$ est dit *maximal accréatif*)

Le domaine d'un opérateur maximal accréatif étant dense dans $L^2(E, \mu)$, il suffit même de connaître l'opérateur L sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}_2(L)$, dense pour la topologie du domaine, topologie définie par :

$$\|f\|_{\mathcal{D}_2(L)} = \|f\|_2 + \|Lf\|_2.$$

Pour les cas auxquels nous nous intéresserons par la suite, $\mathcal{A}$ sera choisi comme étant l'ensemble des polynômes duquel nous extrairons une base hilbertienne de $L^2(E, \mu)$. Cette base constituera l'ensemble des vecteurs propres de L , qui sur cette base sera donc défini par l'ensemble de ses valeurs propres. La stabilité de l'ensemble des polynômes par L nous garantira que $\mathcal{A}$ sera dense dans $\mathcal{D}_2(L)$, donc le semigroupe $(P_t)_{t \geq 0}$ sera bien défini par la donnée de l'image de $\mathcal{A}$ par L .

Nous utiliserons un autre opérateur associé au semigroupe, appelé *opérateur carré du champ*, défini pour un couple de fonction (f, g) de $\mathcal{A}$ par

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2}(Lfg - fLg - gLf).$$

Une propriété fondamentale des semigroupes de Markov est la positivité du carré du champ :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \Gamma(f, f) \geq 0.$$

En effet, il suffit pour le voir d'appliquer l'inégalité de Jensen

$$P_t(f^2) \geq (P_t f)^2$$

et de dériver en $t = 0$. On peut de même plus généralement voir que pour toute fonction convexe ϕ dérivable et pour tout élément f de $\mathcal{A}$,

$$L\phi(f) - \phi'(f)Lf \geq 0, \tag{1.3}$$

la positivité du carré du champ que l'on obtient pour $\phi(x) = x^2$.

Nous sommes en mesure, au moyen de l'opérateur carré du champ, de définir la propriété de diffusion d'un semigroupe de Markov $(P_t)_{t \geq 0}$:

P_t est un semigroupe de *diffusion* si, pour toute famille finie $(f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$, et pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, on a :

$$L\Phi(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(f_1, \dots, f_n) Lf_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(f_1, \dots, f_n) \Gamma(f_i, f_j) \tag{1.4}$$

Cette définition signifie que sur l'algèbre $\mathcal{A}$, L est un opérateur différentiel du second ordre sans terme constant.

La propriété de diffusion est liée aux propriétés de régularité des trajectoires du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ associé à $(P_t)_{t \geq 0}$, cette régularité se lisant sur les fonctions f de $\mathcal{A}$. Si $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe de diffusion, alors les processus $f(X_t)$ sont à trajectoires continues (voir [5] par exemple).

1.1.2 Exemples

Semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck

$(E, \mathcal{F}, \mu)$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la tribu de ses boréliens et de la mesure gaussienne $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ est défini sur les fonctions boréliennes bornées par :

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \mu(dy). \quad (1.5)$$

Le générateur infinitésimal s'écrit alors, pour toute fonction suffisamment régulière :

$$Lf(x) = f''(x) - xf'(x),$$

et l'opérateur carré du champ :

$$\Gamma(f, g)(x) = f'g'(x),$$

pour lequel on lit facilement la positivité.

Le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck est de plus un semigroupe de diffusion.

Espace d'états fini

$(E, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace fini, muni de la tribu formée de toutes ses parties, μ est une probabilité chargeant tous les points. $\mathcal{A}$ est l'espace de toutes les fonctions sur E , $\mathcal{A}$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{\text{card}(E)}$. L'opérateur L se décrit par une matrice $(L_{ij})_{(i,j) \in E^2}$:

$$Lf(i) = \sum_{j \in E} L_{ij} f(j),$$

l'opérateur P_t se représente de même par une matrice, et l'équation 1.2 montre qu'en fait, $P_t = \exp tL$, exponentielle usuelle d'une matrice. La positivité de P_t est équivalente à la positivité de chaque élément de la matrice P_t , et se traduit sur la matrice L par

$$\forall i \neq j \quad L_{ij} \geq 0.$$

De plus, $L1 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in E, \sum_{j \in E} L_{ij} = 0$.

Enfin, l'opérateur carré du champ s'écrit :

$$\Gamma(f, g)(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in E} L_{ij} (f(i) - f(j))(g(i) - g(j)).$$

La positivité est là aussi évidente à vérifier.

Remarquons que dans ce cas, le seul opérateur de diffusion est $L = 0$.

Diffusion sur une variété compacte

$(E, \mathcal{F}, \mu)$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte connexe, de dimension n , munie de sa tribu borélienne et d'une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, L est un opérateur différentiel du second ordre sans terme constant, qui s'écrit dans un système de coordonnées :

$$Lf(x) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

où les fonctions $g^{ij}(x)$, $b^i(x)$ sont $\mathcal{C}^\infty$, la matrice $(g^{ij}(x))$ est positive non dégénérée. Le carré du champ s'écrit

$$\Gamma(f, g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Remarquons que si la variété n'est pas compacte, il se peut que le semigroupe soit néanmoins déterminé par l'opérateur différentiel L (par exemple si la variété est complète), mais le semigroupe ainsi engendré n'est pas forcément markovien.

Remarque :

Dans les exemples précédents, il est aisé de vérifier la positivité du carré du champ. De plus, dans les deux derniers exemples, cette positivité est équivalente à l'inégalité 1.3, bien qu'elle n'en soit *a priori* qu'une conséquence. En fait, cette équivalence reste vraie en général, et c'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

1.2 Semigroupes symétriques

1.2.1 Invariance et réversibilité

La mesure μ n'intervient qu'à travers l'espace de Hilbert $L^2(E, \mu)$, et le produit scalaire associé, que nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous noterons de même $\langle f \rangle := \int_E f d\mu$. Notre étude des semigroupes se situera le plus souvent dans un cadre algébrique, au moyen d'une décomposition spectrale dans une base hilbertienne. Pour cela, nous avons besoin des notions suivantes :

- On dit que μ est *invariante* par P_t si, pour toute fonction f μ -intégrable, $P_t f$ l'est aussi, et $\langle P_t f \rangle = \langle f \rangle$.
- On dit que μ est *réversible* pour P_t si, pour tout couple (f, g) d'éléments de $L^2(E, \mu)$, on a $\langle P_t f, g \rangle = \langle f, P_t g \rangle$. Le semigroupe est alors dit *symétrique* pour la mesure μ .

La réversibilité implique l'invariance de la mesure :

$$\langle P_t \rangle = \langle P_t f, 1 \rangle = \langle f, P_t 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle = \langle f \rangle.$$

L'invariance de la mesure μ se lit sur l'opérateur L comme suit : μ est invariante si et seulement si $\forall f \in \mathcal{A}, \langle Lf \rangle = 0$. La suffisance de la condition se démontre par la densité de $\mathcal{A}$ dans $L^1(E, \mu)$, l'égalité 1.2 et le fait que

$$\langle P_t f \rangle - \langle f \rangle = \int_0^t \langle L P_s f \rangle ds.$$

De même, μ est réversible si et seulement si pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{A}$, $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$.

Remarquons de plus que lorsque μ est invariante, si $p \in [1, +\infty[$, pour une fonction f de $L^p(E, \mu)$, on vérifie facilement que

$$\langle |P_t f|^p \rangle \leq \langle P_t(|f|^p) \rangle = \langle |f|^p \rangle.$$

P_t est donc une contraction de $L^p(E, \mu)$, ce qui pour $p = 2$ nous montre que l'inégalité 1.1 est automatiquement vérifiée.

1.2.2 Décomposition spectrale

La symétrie du semigroupe pour une mesure réversible entraîne donc la symétrie de son générateur infinitésimal L . La symétrie et la maximale accrétivité de $-L$ en font un opérateur auto-adjoint dans $L^2(E, \mu)$, (voir par exemple [21], page 279). L admet donc une décomposition spectrale

$$L = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda}$$

où $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une résolution de l'identité (voir [40], p.309), c'est-à-dire, sommairement, que c'est une famille de projecteurs croissants ($E_{\lambda}E_{\mu} = E_{\min(\lambda, \mu)}$), continus à droite ($\forall f \in L^2(E, \mu), \lim_{h \rightarrow 0} E_{\lambda+h}f = E_{\lambda}f$), et de limites :

$$\forall f \in L^2(E, \mu), \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_{\lambda}f = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{\lambda}f = f.$$

De plus, en intégrant l'opérateur carré du champ, on obtient

$$2\langle \Gamma(f, g) \rangle = \langle L(fg) \rangle - \langle f, Lg \rangle - \langle g, Lf \rangle,$$

et par réversibilité de la mesure, $\langle L(fg) \rangle = 0$, $\langle f, Lg \rangle = \langle g, Lf \rangle$, donc $\langle \Gamma(f, g) \rangle = -\langle f, Lg \rangle$, et ce pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{A}$. Ce qui nous donne, pour tout f élément de $\mathcal{A}$, $\langle f, Lf \rangle \leq 0$. Donc le spectre de L est porté par $\mathbb{R}^-$:

$$L = - \int_0^{+\infty} \lambda dE_{\lambda} ; \quad P_t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dE_{\lambda}.$$

L'étude des semigroupes symétriques est de façon évidente facilitée par l'existence de cette décomposition spectrale, qui fournit un cadre algébrique que nous allons exploiter. Pour cela, on suppose que les opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ et L admettent une décomposition spectrale particulière. On admettra que la

famille E_λ soit constante par morceaux, donc que le spectre de L ne soit que ponctuel. Il suffit pour cela, dans le cas général, que L soit à résolvante compacte. Cette condition peut paraître assez restrictive, mais les opérateurs à résolvante compacte se rencontrent fréquemment en physique mathématique, et l'on peut même dire que la plupart des opérateurs différentiels apparaissant dans les problèmes classiques, sur des espaces probabilisés, sont de ce type, (voir [21], page 187).

1.3 Semigroupes associés à une famille de polynômes orthogonaux

Nous nous plaçons à présent dans le cadre où l'algèbre $\mathcal{A}$ et la décomposition spectrale de L sont liées de la manière suivante. Supposons qu'il existe une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, où I est au plus dénombrable, telle que

$$\forall i \in I, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad f_i \in L^p(E, \mu),$$

et telle que

$$\forall i, j \in I, \quad f_i f_j = \sum_{k \in I'} \alpha_{ij}^k f_k,$$

où I' est un sous-ensemble fini de I . Soit alors $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des éléments de cette famille. $\mathcal{A}$ est ainsi une algèbre, stable par les opérateurs L et $(P_t)_{t \geq 0}$, dense dans tous les $L^p(E, \mu)$, avec $1 \leq p < +\infty$. Ce cadre offre une situation idéale d'application du résultat du chapitre 2, essentiellement algébrique, qui démontre l'équivalence entre la positivité du carré du champ sur $\mathcal{A}$ et l'inégalité 1.3. Mais pour les applications à des exemples concrets, nous choisirons un cas particulier de ce cadre algébrique, qui est celui où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des polynômes, et généralement l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$. Cela se traduit sur la décomposition spectrale par la supposition que l'opérateur E_λ est la projection sur l'espace engendré par les polynômes $(Q_0, \dots, Q_n)$, où n est la partie entière de λ , où $d^\circ(Q_k) = k$, et où $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2(E, \mu)$. Ce choix a été motivé par le fait que tous les exemples classiques de semigroupes de Markov symétriques, dont nous allons citer quelques cas dans le paragraphe suivant, se situent dans ce cadre.

Dans une telle base de vecteurs propres, les opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ et L admettent comme valeurs propres respectives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad P_t Q_k = e^{-\lambda_k t} Q_k, \quad L Q_k = -\lambda_k Q_k,$$

où $\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k \geq 0$.

Remarquons que $d^\circ(Q_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.

1.3.1 Exemples

Semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Reprenons l'exemple du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck déjà introduit. La mesure gaussienne μ est réversible pour ce semigroupe sur $\mathbb{R}$, et la famille des polynômes orthogonaux sur $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent est celle des polynômes d'Hermite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$, définis par leur fonction génératrice

$$e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x).$$

Les opérateurs L et P_t admettent comme valeurs propres sur la base $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les suites respectives $(-k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(e^{-kt})_{k \in \mathbb{N}}$.

Semigroupe ultrasphérique

$(E, \mathcal{F}, \mu)$ est ici l'espace $[-1, 1]$ muni de sa tribu des boréliens, de la mesure de probabilité $\mu(dx) = K_n (1 - x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx$, où K_n est la constante de normalisation, et $n > 1$. La suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}^{(n)}$ de polynômes définis par leur fonction génératrice

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^k J_k^{(n)}(x) &= (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \quad \text{si } n \neq 1, \\ &= -\log(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \quad \text{si } n = 1, \end{aligned}$$

appelés *polynômes de Jacobi*, est une base orthonormale de $L^2(E, \mu)$. Soit L l'opérateur défini sur les polynômes par

$$L f = (1 - x^2) f'' - (n - 1) x f'.$$

L admet la suite $(-k(k + n - 2))_{k \in \mathbb{N}}$ comme valeurs propres sur la base des polynômes de Jacobi. Alors L est le générateur infinitésimal du *semigroupe*

ultrasphérique, qui dans le cas où n est un entier supérieur à 2, n'est rien d'autre que la projection du semigroupe de la chaleur sur la sphère S_{n-1} , sur l'un de ses diamètres, et dont l'opérateur carré du champ associé s'écrit :

$$\Gamma(f, g) = (1 - x^2)f'g'.$$

Ce semigroupe est aussi un semigroupe de diffusion.

Espace d'états fini

Dans le cas où E est un ensemble fini, L est une matrice $(L_{ij})_{i,j \in E}$ telle que $\forall i \neq j, L_{ij} \geq 0$, et telle que $\forall i \in E, \sum_{j \in E} L_{ij} = 0$. La mesure réversible, lorsqu'elle existe, vérifie le système d'équation

$$\forall (i, j) \in E^2, \quad \mu(i)L_{ij} = \mu(j)L_{ji}.$$

Le fait de se ramener à l'algèbre de polynômes est dans ce cas d'intérêt nul, puisque le domaine de L coïncide avec l'espace de toutes les fonctions sur E .

1.4 Étude des semigroupes de Markov associés aux polynômes orthogonaux

L'abondance des exemples de semigroupes symétriques admettant une base de polynômes orthogonaux comme vecteurs propres nous a poussé à tenter d'en faire une classification, et de les décrire au moyen d'outils algébriques et analytiques. Il nous a vite paru illusoire d'aborder directement les espaces de dimension quelconque, (que nous évoquerons cependant au chapitre 3), et nous nous sommes donc restreint à la dimension 1, en considérant l'ensemble des semigroupes de Markov symétriques sur $\mathbb{R}$, ensemble qui en lui-même constitue déjà un terrain riche et fertile.

Donnons-nous un intervalle probabilisé (I, μ) , tel que l'ensemble des fonctions de carré intégrable $L^2(I, \mu)$ admette une base de polynômes orthogonaux $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il suffit pour cela que la mesure μ admette un moment exponentiel :

$$\exists \lambda > 0, \quad \int_I e^{\lambda|x|} \mu(dx) < +\infty.$$

En effet, si une fonction f de $L^2(I, \mu)$ est orthogonale à tous les polynômes, la mesure $\tilde{\mu} = f\mu$ admet également au moins un moment exponentiel (par l'inégalité de Schwartz), et donc sa transformée de Laplace est analytique au voisinage de 0. L'hypothèse faite sur f montre alors que cette transformée a en 0 toutes ses dérivées nulles, et par là même est nulle. On en déduit la nullité de f , et par suite la densité des polynômes.

Le but est de classer, parmi les semigroupes symétriques $(P_t)_{t \geq 0}$ décrits précédemment, ceux qui ont la propriété de Markov, c'est-à-dire qui préservent la positivité. En d'autres termes, la question est :

Quelles sont les suites de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec $\lambda_0 = 0$, telles que

$$\forall t \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P_t Q_k = e^{-\lambda_k t} Q_k,$$

de façon à ce que le semigroupe $(P_t)_{t \geq 0}$ vérifie :

Pour toute fonction f de $L^2(E, \mu)$ positive, $P_t f$ est positive.

Le chapitre 3 apporte une réponse à cette question lorsque le semigroupe est une diffusion, dans le sens de la définition 1.4, pour I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. La classification complète dans ce cadre-là met en évidence le fait que les seuls semigroupes de diffusion symétriques dans $L^2(I, \mu)$ admettant une décomposition spectrale dans une base de polynômes orthogonaux, sont les semigroupes associés aux polynômes de Jacobi (généralisation des ultrasphériques), de Laguerre et d'Ornstein-Uhlenbeck, selon que l'intervalle soit respectivement borné, une demi-droite ou la droite réelle en entier.

D'autre part, tous ces semigroupes de diffusion se retrouvent, par des considérations géométriques, à partir du mouvement brownien sur les sphères. En particulier, les semigroupes de Jacobi jouent un rôle de pivot dans les liens entre ces différents semigroupes de diffusion, rôle qui se révélera utile et important en de maintes occasions que nous préciserons par la suite.

Le cas plus général où le semigroupe n'est pas une diffusion est beaucoup plus ardu à appréhender, par manque de critère simple et global pour caractériser la propriété de positivité du semigroupe. Cependant, le problème est résolu pour certains cadres d'étude (E, μ) , que nous explicitons maintenant.

Si l'on se place dans l'espace (E, μ) où

$$E = [-1, 1], \quad \mu(dx) = K_{\alpha, \beta} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx, \quad \alpha > -1, \beta > -1,$$

la famille de polynômes formant une base de $L^2(E, \mu)$ est la famille des polynômes de Jacobi $(Q_k^{\alpha, \beta}(x))_{k \in \mathbb{N}}$. L'ensemble des opérateurs positifs à noyau de Hilbert-Schmidt est caractérisé par leurs valeurs propres dans cette base dans l'article [9] pour le cas $\alpha = \beta$, et dans l'article [17] pour le cas $\alpha \neq \beta$. Nous en donnons une démonstration plus générale, en caractérisant les opérateurs positifs sur la base $(Q_k^{\alpha, \beta})_{k \in \mathbb{N}}$ n'admettant pas forcément de noyau de Hilbert-Schmidt, au moyen de l'outil algébrique puissant que constituent les hypergroupes.

Si l'on se place maintenant dans l'espace (E, μ) où $E = \mathbb{R}$, μ la mesure gaussienne standard, une caractérisation des valeurs propres d'opérateurs positifs sur la base des polynômes de Hermite, basée essentiellement sur l'article [33], nous permet de décrire au chapitre 5 les semigroupes de Markov symétriques sur cette base, au moyen d'une formule du type Lévy-Khintchine.

Dans ces deux cas, nous voyons apparaître un certain rôle d'extrémalité des semigroupes de diffusion au sein de l'ensemble des semigroupes de Markov symétriques, extrémalité que l'on retrouve dans la forme des valeurs propres associées aux familles de polynômes orthogonaux respectives. En effet, les valeurs propres des générateurs infinitésimaux des semigroupes de Markov associés aux polynômes de Jacobi et aux polynômes d'Hermite, s'écrivent dans ces bases respectives :

$$\lambda(k) = \theta k(k + \alpha + \beta + 1) + c \int_{-1}^1 \frac{1 - R_k(x)}{1 - R_k(1)} \nu(dx),$$

$$\tilde{\lambda}(k) = \tilde{\theta} k + \tilde{c} \int_{-1}^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} \tilde{\nu}(dx),$$

où $c, \theta, \tilde{c}, \tilde{\theta}$ sont des constantes positives, ν et $\tilde{\nu}$ sont des mesures de probabilité sur $[-1, 1]$, et où $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la famille des polynômes de Jacobi normalisée, telle que $R_k(1) = 1$.

Or les valeurs propres des générateurs infinitésimaux des semigroupes de diffusion dans les mêmes cadres sont respectivement :

$$d(k) = \theta k(k + \alpha + \beta + 1),$$

$$\tilde{d}(k) = \tilde{\theta} k.$$

Nous voyons enfin que dans le cas général des semigroupes de Markov symétriques, le problème revient à caractériser la propriété de positivité par un critère simple. Nous avons déjà remarqué que dans les cas des diffusions

et des espaces d'états finis, la positivité du carré du champ constitue une condition nécessaire et suffisante à la positivité du semigroupe associé. Nous présentons, dans le chapitre suivant, une extension de ce résultat à un cadre beaucoup plus général, au moyen d'une caractérisation algébrique de la positivité du semigroupe, sous l'angle de son générateur infinitésimal associé.

Chapitre 2

Une caractérisation de la positivité des semigroupes de Markov symétriques

Nous allons présenter, dans ce chapitre, un résultat algébrique sur les générateurs infinitésimaux et leurs carrés du champ associés, sous forme d'une note aux comptes-rendus à l'Académie des Sciences [28]. Ce résultat, énoncé dans la première section, montre l'équivalence entre la positivité du carré du champ et l'inégalité 1.3 dont nous avons parlé au chapitre précédent (voir la remarque page 16).

Dans la section suivante, nous appliquons ce résultat algébrique aux semigroupes engendrés par les opérateurs concernés, et nous montrons comment, moyennant quelques hypothèses techniques et analytiques que doivent vérifier ces semigroupes, l'inégalité 1.3 est équivalente à la propriété de positivité.

L'espace sur lequel agissent les semigroupes dans ce chapitre est beaucoup plus général que dans les exemples cités au premier chapitre, ainsi que dans les chapitres suivants. Nous n'avons ici besoin que de l'existence d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions comprenant une base de vecteurs propres, et de la symétrie du semigroupe dans $L^2(E, \mu)$ muni de cette base.

2.1 Une caractérisation des générateurs de semigroupes Markoviens

Résumé — Nous nous intéressons à un opérateur L agissant sur une algèbre

unitaire de fonctions $\mathcal{A}$, tel que $L1 = 0$; et à l'opérateur carré du champ associé: nous montrons que la positivité du carré du champ implique la propriété caractéristique des générateurs des semigroupes Markoviens:

$$\forall \phi \text{ polynôme convexe, } \forall f \in \mathcal{A}, \quad L\phi(f) - \phi'(f)Lf \geq 0$$

A characterization of the infinitesimal generators of Markov semigroups

Abstract — *We study operators L acting on unitary algebras $\mathcal{A}$ of functions, with $L1 = 0$, and the associated “Opérateur carré du champ”: we prove that the positivity of the “Opérateur carré du champ” implies the characteristic property of the infinitesimal generator of Markovian semigroups :*

$$\forall \phi \text{ convex polynomial, } \forall f \in \mathcal{A}, \quad L\phi(f) - \phi'(f)Lf \geq 0$$

Soit L opérateur agissant sur une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions réelles d'un espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$, contenant les fonctions constantes, tel que $L1 = 0$.

Soit Γ l'opérateur carré du champ associé, défini par:

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \quad \Gamma(f, g) = \frac{1}{2}(L(fg) - fLg - gLf).$$

Nous dirons que le carré du champ est positif, si $\forall f \in \mathcal{A}, \quad \Gamma(f, f) \geq 0$.

Le but de cette note, est de montrer que la positivité du carré du champ implique la propriété

$$\forall \phi \text{ polynôme convexe, } L\phi(f) \geq \phi'(f)Lf. \quad (\mathcal{P})$$

On notera $(\bar{\mathcal{P}})$ la propriété $(\mathcal{P})$ étendue à toutes les fonctions ϕ convexes, $\mathcal{C}^1$, et telles que $\phi(f)$ soit dans $\mathcal{A}$ lorsque f l'est.

Ceci répond à une question posée dans [3], et permet, moyennant une hypothèse supplémentaire d'existence d'une mesure positive invariante, de montrer que la positivité du carré du champ est une condition nécessaire et suffisante pour que le semigroupe $P_t = e^{tL}$, engendré par L , préserve la positivité.

La démonstration proposée ici est purement algébrique.

Remarques

1. La positivité du carré du champ n'est autre que $(\mathcal{P})$ pour $\phi(x) = x^2$.

2. L'implication

$$\forall f \in \mathcal{A}, \Gamma(f, f) \geq 0 \Rightarrow (\mathcal{P}) \quad (I)$$

est trivialement vérifiée dans deux situations particulières (pour plus de précisions, se reporter à [3]) :

- L est le générateur d'un semigroupe de diffusion :
l'égalité suivante est alors vérifiée :

$$\forall \phi \text{ polynôme, } L\phi(f) = \phi'(f)Lf + \phi''(f)\Gamma(f, f),$$

- $\mathcal{A}$ est l'espace de toutes les fonctions sur l'ensemble fini $(E, \mathcal{F}, \mu)$:
l'opérateur L se décrit par une matrice $(L_{ij})_{(i,j) \in E \times E}$
Le carré du champ s'écrit alors

$$\Gamma(f, f)(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in E} L_{ij} (f(i) - f(j))^2.$$

La positivité de Γ est alors équivalente à celle de L_{ij} , $\forall i \neq j$. Un développement de Taylor avec un reste à l'ordre 2, et la convexité de ϕ , nous donnent alors aisément la propriété $(\mathcal{P})$.

- 3. Notons $P_t = e^{tL}$ le semigroupe engendré par L , alors si P_t est un semigroupe de Markov, il vérifie

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall \phi \text{ fonction convexe, } P_t \phi(f) \geq \phi(P_t f)$$

d'où, en dérivant en $t = 0$, on en déduit la propriété $(\bar{\mathcal{P}})$.

Réciproquement, si l'on suppose que μ est une mesure positive sur E vérifiant la propriété d'invariance :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \int_E Lf \, d\mu = 0,$$

et si l'on suppose que $\mathcal{A}$ est stable pour le semigroupe engendré (P_t) , alors la propriété $(\bar{\mathcal{P}})$ entraîne la positivité du semigroupe, (cette positivité étant comprise μ .p.p.), grâce à l'argument très simple, inspiré de [32], que nous reproduisons ci-dessous :

$$\forall \phi \text{ convexe, } \int_E \phi(P_t f) \, d\mu \leq \int_E \phi(f) \, d\mu, \quad (2.1)$$

ceci provient de la propriété $(\bar{\mathcal{P}})$ en remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_E \phi(P_t f) d\mu \right] &= \int_E \phi'(P_t f) L P_t f d\mu \\ &= - \int_E [L\phi(P_t f) - \phi'(P_t f) L P_t f] d\mu \leq 0. \end{aligned}$$

Puis on applique 2.1 à $\phi(x) = |x|$, pour obtenir, pour $f \geq 0$:

$$\int_E |P_t f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu = \int_E f d\mu = \int_E P_t f d\mu,$$

d'où le résultat.

On remarque que si μ est une mesure de probabilité, si $\mathcal{A}$ est formée de fonctions bornées, et est dense dans $L^1(\mu)$, alors un argument simple d'approximation montre qu'il suffit d'avoir $L\phi(f) - \phi'(f)Lf \geq 0$ pour ϕ polynôme convexe, c'est-à-dire $(\mathcal{P})$.

Preuve de (I)

Pour l'établir, rappelons que tout polynôme réel positif peut s'écrire sous la forme de la somme de deux carrés de polynômes : il suffit donc d'étudier le cas où

$$\phi''(x) = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right)^2.$$

Ecrivons alors

$$\phi(x) - \phi(y) - (x-y)\phi'(y) = \int_0^1 \int_0^1 \phi''(uv(x-y) + y)v(x-y)^2 dudv$$

Avec $\phi''(x) = \sum_{i,j=0}^n \lambda_i \lambda_j x^{i+j}$, on obtient ainsi

$$\phi(x) - \phi(y) - (x-y)\phi'(y) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n+1} \mu_i(u, v, y, (\lambda)) \mu_j(u, v, y, (\lambda)) x^{i+j} dudv \quad (2.2)$$

où $\mu_i(u, v, y, (\lambda))$ sont les fonctions de $u, v \in [0, 1]$, $(\lambda) = (\lambda_i)_{i=0 \dots n}$, $y \in \mathbb{R}$, définies par :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i v^{\frac{1}{2}} (x-y)(uv(x-y) + y)^i = \sum_{i=0}^{n+1} x^i \mu_i(u, v, y, (\lambda))$$

Nous noterons, pour une meilleure lisibilité, $\mu_i(y) = \mu_i(u, v, y, (\lambda))$

Remarquons que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n+1} y^i \mu_i(y) = 0 \quad (2.3)$$

et montrons alors que

$$L\phi(f) - \phi'(f)Lf = 2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n+1} \Gamma(f^i, f^j) \mu_i(f) \mu_j(f) \, dudv \quad (2.4)$$

Ceci suffit à impliquer le résultat, car $\Gamma(f, f)$ étant bilinéaire et positive, la matrice symétrique $[\Gamma(f^i, f^j)]_{i,j=0\dots n+1}$ est également positive.

Pour montrer 2.4, nous allons montrer plus généralement que pour un polynôme ϕ quelconque, si l'on pose

$$\bar{\phi}(x, y) = \phi(x) - \phi(y) - (x - y)\phi'(y),$$

et si l'on définit les coefficients $\gamma_k(y, \phi)$ par

$$\bar{\phi}(x, y) = \sum_{k=0}^{d^\circ(\phi)} x^k \gamma_k(y, \phi)$$

alors

$$L\phi(f) - \phi'(f)Lf = \sum_{k=0}^{d^\circ(\phi)} \gamma_k(f, \phi) Lf^k \quad (2.5)$$

2.5 implique 2.4 car lorsque $\phi''(x) = (\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i)^2$, la formule 2.2 nous donne :

$$\gamma_k(f, \phi) = \sum_{i+j=k} \int_0^1 \int_0^1 \mu_i(f) \mu_j(f) \, dudv,$$

donc

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n+1} \Gamma(f^i, f^j) \mu_i(f) \mu_j(f) \, dudv \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \gamma_k(f, \phi) Lf^k - 2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n+1} f^i Lf^j \mu_i(f) \mu_j(f) \, dudv, \end{aligned}$$

et le deuxième terme est nul par l'égalité 2.3.

Il ne reste donc qu'à démontrer l'égalité 2.5 :

$\phi \mapsto \gamma_k(y, \phi)$ et $\phi \mapsto \bar{\phi}$ étant des applications linéaires, il suffit de montrer 2.5 pour $\phi_0(x) = x^p, p \in \mathbb{N}$

$$\bar{\phi}_0(x, y) = x^p - y^p - (x - y)py^{p-1} = x^p - pxy^{p-1} + (p - 1)y^p$$

d'où

$$\sum_{k=0}^p \gamma_k(f, \phi_0) Lf^k = Lf^p - pf^{p-1}Lf = L\phi_0(f) - \phi'_0(f)Lf$$

ce qui termine la preuve.

Nota : Pendant la rédaction de cette note, F. Hirsch nous a communiqué une autre démonstration de ce résultat, s'appuyant sur des arguments différents.

2.2 Caractérisation de la propriété de positivité

Nous appliquons, dans cette section, le résultat de la section précédente à $(E, \mathcal{F}, \mu)$ espace probabilisé, pour montrer que sous certaines hypothèses que nous allons préciser, la positivité du semigroupe est équivalente à la positivité du carré du champ associé.

Considérons alors $\mathcal{A}$ comme étant une algèbre de fonctions réelles sur E contenant les constantes, et dense dans $L^p(E, \mu)$, pour tout $p \geq 1$. Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe $\mathcal{C}^0$ d'opérateurs agissant sur $L^2(E, \mu)$, L son générateur infinitésimal et Γ le carré du champ associé. Nous demanderons alors à la mesure μ d'être invariante pour $(P_t)_{t \geq 0}$.

Supposons que $L^2(E, \mu)$ admette comme base un sous-ensemble de $\mathcal{A}$, les éléments de ce sous-ensemble étant les vecteurs propres des opérateurs P_t et L , tels que $P_t 1 = 1$. Nous demandons enfin à $\mathcal{A}$ de vérifier l'hypothèse technique suivante :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall T > 0, \forall p \geq 1, \quad \sup_{t \in [0, T]} |P_t f| \in L^p(E, \mu). \quad (HT)$$

Remarque : Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'espace vectoriel engendré par une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, où I est au plus dénombrable, et tel que

- $\forall i \in I, f_i$ est vecteur propre de L et de P_t ,
- $\forall i \in I, \forall p \geq 1; f_i \in L^p(E, \mu)$,
- $\forall i, j \in I, f_i f_j = \sum_{k \in I'} \alpha_k^{ij} f_k$, où I' est un sous-ensemble fini de I , et où les α_k^{ij} sont des réels,

alors $\mathcal{A}$ est une algèbre, et la propriété (HT) est automatiquement vérifiée. En particulier, c'est aussi vrai dans le cas où E est un intervalle de $\mathbb{R}$, et où μ est telle que l'ensemble des polynômes soit dense dans $L^2(E, \mu)$ (il suffit par exemple que μ admette un moment exponentiel), on peut choisir pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes, et pour vecteurs propres de P_t et de L la suite de polynômes orthogonaux déduite de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Ceci s'étend de façon plus générale au cas des familles de polynômes orthogonaux à plusieurs variables.

La positivité du semigroupe P_t est alors caractérisée par la proposition suivante :

Proposition 1 *Le semigroupe P_t est positif, i.e.*

$$\forall f \in L^2(E, \mu) \text{ telle que } f \geq 0 \text{ p.s., } P_t f \geq 0 \text{ p.s.,}$$

si et seulement si

$$\forall g \in \mathcal{A}, \quad \Gamma(g, g) \geq 0.$$

Preuve :

La positivité du carré du champ est une condition nécessaire à la positivité du semigroupe. Elle se déduit en effet directement de l'inégalité de Jensen

$$\forall f \in L^2(E, \mu), \quad P_t f^2 - (P_t f)^2 \geq 0$$

que l'on dérive en $t = 0$.

Nous montrons ici que c'est aussi une condition suffisante.

Le résultat de la section précédente montre que si $\forall f \in \mathcal{A}$, $\Gamma(f, f) \geq 0$, alors $\forall \phi$ polynôme convexe, $\forall f \in \mathcal{A}$, $L\phi(f) - \phi'(f)Lf \geq 0$.

L'invariance de la mesure μ se traduit sur le générateur infinitésimal par

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \int_E Lf \, d\mu = 0,$$

d'où $\forall t \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{A}$, pour tout ϕ polynôme convexe,

$$\int_E L\phi(P_t f) \, d\mu = 0.$$

De plus,

$$\frac{d}{dt}\phi(P_t f) = \phi'(P_t f)LP_t f.$$

Nous en déduisons donc que pour tout ϕ polynôme convexe, $\forall f \in \mathcal{A}$,

$$\int_E \frac{d}{dt}\phi(P_t f) \, d\mu = - \int_E [L\phi(P_t f) - \phi'(P_t f)LP_t f] \, d\mu \leq 0.$$

Grâce à l'hypothèse (HT), $\forall T \geq 0$, nous pouvons majorer la fonction

$$\sup_{t \in [0, T]} \phi'(P_t f)LP_t f$$

par une fonction intégrable, d'où nous pouvons dériver $\int_E \phi(P_t f) \, d\mu$ sous le signe somme, et en déduire que

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_E \phi(P_t f) \, d\mu \leq \int_E \phi(f) \, d\mu. \quad (2.6)$$

Remarquons au passage que puisque les fonctions x^{2k} sont des polynômes convexes, P_t est une contraction de L^{2k} dans lui-même pour tout k entier. Par interpolation, nous en déduisons alors que P_t est une contraction de L^p dans lui-même pour tout $p \geq 2$.

Considérons la famille de polynômes $(\psi_{s,k})_{s \in \mathbb{R}_+^*, k \in \mathbb{N}}$, définie de la façon suivante :

$$\psi_{s,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sum_{i=0}^{2k} \frac{(-\frac{x^2}{2s})^i}{i!}.$$

Soit alors la famille de polynômes $(\phi_{s,k}(x))_{s \in \mathbb{R}_+^*, k \in \mathbb{N}}$ définie de façon à ce que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \phi_{s,k}''(x) = \psi_{s,k}(x), \quad \phi_{s,k}(-1) = \phi_{s,k}(1) = 1.$$

Cette famille vérifie la propriété suivante :

Lemme 1 $(\phi_{s,k}(x))_{s \in \mathbb{R}_+^*, k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes convexes, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{s,k}(x) = |x|.$$

Preuve du lemme :

Montrons d'abord que les $\phi_{s,k}(x)$ sont convexes. On a :

$$\forall s > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \phi_{s,k}''(x) = \psi_{s,k}(x).$$

Posons, pour $j \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$,

$$f_j(u) = \sum_{i=0}^j \frac{(-u)^i}{i!} - e^{-u}.$$

On vérifie facilement que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall u \geq 0, \quad f_j'(u) = -f_{j-1}(u).$$

De plus,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad f_j(0) = 0.$$

Sachant que $f_0(u) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, on démontre par récurrence que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall u \geq 0, \quad f_{2j}(u) \geq 0.$$

D'où pour $u = \frac{x^2}{2s}$, avec $x \in \mathbb{R}$, et $s > 0$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall s > 0, \quad \psi_{s,k}(x) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} > 0,$$

donc les $\phi_{s,k}$ sont des polynômes convexes.

Or, en tant que primitives doubles des fonctions $\psi_{s,k}(x)$, les fonctions $\phi_{s,k}(x)$ s'écrivent :

$$\phi_{s,k}(x) = \int_0^x \int_0^t \psi_{s,k}(u) du dt + c_{s,k}x + c'_{s,k},$$

avec $c_{s,k}$ et $c'_{s,k}$ constantes.

On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^t \psi_{s,k}(u) du dt &= \int_0^x \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0t]}(u) \psi_{s,k}(u) du dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0t]}(u) \mathbb{1}_{[0x]}(t) \psi_{s,k}(u) du dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_{s,k}(u) \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0x]}(u) \mathbb{1}_{[ux]}(t) dt \right] du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_{s,k}(u) h(u, x) du,
\end{aligned}$$

avec $h(u, x) = \int_u^x \mathbb{1}_{[0x]}(u) dt = |x - u| \mathbb{1}_{[0x]}(u)$.

D'où l'on tire que

$$c'_{s,k} = 1 - \int_{\mathbb{R}} \psi_{s,k}(u) h_1(u) du$$

et

$$c_{s,k} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{s,k}(u) h_2(u) du$$

avec

$$h_1(u) = \frac{1}{2} [|1 - u| \mathbb{1}_{[0,1]}(u) + |1 + u| \mathbb{1}_{[-1,0]}(u)]$$

et

$$h_2(u) = \frac{1}{2} [|1 + u| \mathbb{1}_{[-1,0]}(u) - |1 - u| \mathbb{1}_{[0,1]}(u)].$$

De plus, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall s > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{s,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}},$$

et que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} = \delta_0(x)$$

au sens des distributions.

Les fonctions $\psi_{s,k}(u)h(u, x)$, $\psi_{s,k}(u)h_1(u)$ et $\psi_{s,k}(u)h_2(u)$ étant pour tout $x \in \mathbb{R}$ à support compact en la variable u , on en déduit d'une part que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} c'_{s,k} = 1 - \int_{\mathbb{R}} \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{s,k}(u)h_1(u) du = 1 - h_1(0) = 0,$$

de même que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} c_{s,k} = h_2(0) = 0,$$

et d'autre part la convergence simple des $\phi_{s,k}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{s,k}(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} \psi_{s,k}(u)h(u, x) du + c_{s,k}x + c'_{s,k} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{s,k}(u)h(u, x) du \\ &= h(0, x) \\ &= |x|, \end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer.

o

Montrons maintenant que

$$\forall f \in L^2(E, \mu), \forall t \geq 0, \quad \int_E |P_t f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu. \quad (2.7)$$

Soit $f \in L^2(E, \mu)$, $t \geq 0$, définissons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \min(f(x), n).$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant vers f_n dans L^{2k} . Moyennant l'extraction d'une sous-suite, la suite $(P_t f_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $P_t f_n$ presque sûrement.

De l'inégalité 2.6, on tire :

$$\int_E [P_t(f_{n,m})]^{2k} d\mu \leq \int_E (f_{n,m})^{2k} d\mu.$$

Le lemme de Fatou nous permet alors d'en déduire qu'à la limite,

$$\int_E (P_t f_n)^{2k} d\mu \leq \int_E (f_n)^{2k} d\mu.$$

Les $\phi_{s,k}$ étant des polynômes convexes de degré $2k$, on en déduit que

$$\forall s > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_E \phi_{s,k}(P_t f_n) d\mu \leq \int_E \phi_{s,k}(f_n) d\mu.$$

D'où, les f_n étant bornés, et les $\phi_{s,k}$ étant bornés sur tout compact, par convergence dominée on obtient :

$$\int_E |P_t f_n| d\mu \leq \int_E |f_n| d\mu.$$

Grâce à nouveau au lemme de Fatou et au théorème de convergence monotone, le passage à la limite démontre l'inégalité 2.7.

Donc en particulier, pour $f \geq 0$ sur E , et sachant que μ est invariante :

$$\int_E |P_t f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu = \int_E f d\mu = \int_E P_t f d\mu,$$

d'où $P_t f \geq 0$ p.s.

o

Chapitre 3

Semigroupes symétriques de diffusion

La première section est intégralement constitué de l'article [29], paru sous le même titre, et qui établit une classification des semigroupes de Markov symétriques agissant sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et vérifiant de plus la propriété de diffusion. Cette classification offre deux voies de généralisation possibles. La première consiste à étendre l'étude sur $\mathbb{R}^n$. Bien que nous n'ayons pas privilégié cette voie dans notre thèse, nous traitons un exemple d'une famille de semigroupes symétriques dans $\mathbb{R}^n$ dans la deuxième section. La deuxième voie est l'extension de l'étude aux semigroupes symétriques de Markov qui ne soient pas nécessairement de diffusion, dont une famille est traitée en exemple dans la troisième section. Cette étude fera par ailleurs l'objet du chapitre suivant.

3.1 Classification des Semigroupes de diffusion sur $\mathbb{R}$ associés à une famille de polynômes orthogonaux

3.1.1 Introduction.

Un semigroupe de Markov est le noyau de transition d'un processus de Markov ; un semigroupe de diffusion est un semigroupe de Markov particulier, dont il constitue dans certaines situations le cas limite.

Nous considérons ici les diffusions au sens de Bakry-Emery [5], dont la définition, un peu plus restrictive que celle usuellement utilisée dans les ouvrages de références (voir par exemple [19]), sera précisée au paragraphe suivant.

Le but de ce travail est d'étudier les semigroupes opérant sur un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ont la propriété de diffusion, dont la mesure réversible admette un moment exponentiel, et qui laissent stable pour tout n l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Les exemples connus de cette situation sont les semigroupes d'Ornstein-Uhlenbeck, ultrasphériques, de Laguerre, de Jacobi. Il existe une littérature abondante les étudiant en détail. On pourra se référer par exemple à [14], [9], [20], [39].

On montre, dans un premier temps, que ces semigroupes sont essentiellement les seuls. Dans une deuxième partie, on met en évidence, au moyen de transformations géométriques, les liens qui unissent ces semigroupes. Fondamentalement, ces derniers peuvent se retrouver, pour certaines valeurs entières des paramètres, à partir du mouvement brownien sur les sphères, et passages à la limite sur la dimension des sphères.

Afin de se familiariser avec le cadre d'étude général, essentiellement algébrique, que l'on va se fixer, voici un exemple simple :

Exemple :

Rappelons brièvement l'exemple bien connu du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck (pour une présentation plus détaillée, voir par exemple [31]), défini de la façon suivante :

Pour une fonction f borélienne bornée

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \mu(dy)$$

avec $\mu(dy) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$ mesure gaussienne.

Le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t \geq 0}$ s'écrit

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x), \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}_b^2.$$

(Remarquons que l'on a évité le coefficient multiplicatif $\frac{1}{2}$ dans l'expression de L , qui apparaît dans la définition classique du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, par une simple homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ sur t .)

Si on considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Hermite, on voit que

$$\{H_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est totale dans } L^2(\mathbb{R}, d\mu) \quad (1.1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad LH_n = -nH_n \quad (1.2)$$

Comme on va le voir, L , (1.1) et (1.2) suffisent à caractériser le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, (ou plus précisément la famille des semigroupes d'Ornstein-Uhlenbeck, de paramètres quelconques, moyennant une hypothèse selon laquelle on travaille à affinité près).

En fait, la donnée du générateur infinitésimal et de son image sur une partie dense de son domaine permet de caractériser le semigroupe associé. On va maintenant dresser, ci-dessous, une liste exhaustive des semigroupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$, associés à des familles de polynômes orthogonaux, avec les hypothèses naturelles que l'on précise dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Notations - Hypothèses.

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(I)$ tribu des boréliens sur I . On s'intéresse à l'espace mesuré $E = (I, \mathcal{B}(I), \mu)$, où μ vérifie la propriété suivante :

μ admet un moment exponentiel, i.e. :

$$\exists \lambda > 0 \int_I e^{\lambda|x|} \mu(dx) < +\infty. \quad (Pme)$$

μ est alors une mesure finie sur I , que l'on peut supposer ramenée à une mesure de probabilité par normalisation. On montre, au moyen de la transformée de Laplace, que (Pme) est une condition suffisante pour que l'ensemble des polynômes soit dense dans $L^2(E)$.

Il existe donc une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthonormés sur I , dense dans $L^2(E)$, telle que le degré de Q_n soit égal à n , unique au signe près : on suppose que le coefficient du plus haut degré est positif, ce qui caractérise entièrement (Q_n) . En fait, cette suite (Q_n) est obtenue à partir de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

On s'intéresse aux semigroupes de Markov, symétriques dans $L^2(E)$, qui admettent la suite (Q_n) comme décomposition spectrale. On définit un semigroupe de Markov admettant μ comme mesure stationnaire par une famille $(P_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs agissant sur les fonctions boréliennes bornées, et vérifiant :

$$- P_t P_s = P_{t+s} ; \quad P_0 = Id,$$

$$- f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0 ; \quad P_t 1 = 1,$$

$$- \forall f \in L^1(E) \quad \int_I P_t f d\mu = \int_I f d\mu \quad (\text{hypothèse d'invariance}).$$

On voit alors que (P_t) est une contraction de $L^p(E)$ dans lui-même, et ce $\forall p \in [1, +\infty[$. On exige alors de plus, que

$$- \forall f \in L^2(E) \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t f = f \text{ dans } L^2(E),$$

$$- \forall f, g \in L^2(E) \quad \int_I (P_t f) g d\mu = \int_I f (P_t g) d\mu \quad (\text{hypothèse de symétrie}).$$

(En ce qui concerne les semigroupes de diffusion sur I , sur lesquels va porter notre intérêt, l'hypothèse de symétrie est en fait équivalente à l'hypothèse d'invariance, et ce grâce à une propriété spécifique de la dimension 1, où tout champ de vecteurs est un champ de gradient).

L'hypothèse de symétrie montre alors que le semigroupe admet une décomposition spectrale :

$$P_t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dE_\lambda,$$

où (E_λ) est une famille croissante de projecteurs orthogonaux. Ce que l'on demande ici, c'est que cette décomposition spectrale soit en fait une décomposition en vecteurs propres, et que ces vecteurs propres soient les polynômes Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_t Q_n = e^{-\lambda_n t} Q_n,$$

d'où

$$f \in L^2(E) \Rightarrow f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n Q_n \Rightarrow P_t f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{-\lambda_n t} Q_n.$$

On introduit alors le générateur infinitésimal de P_t dans $L^2(E)$:

Définition 1

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$$

$\forall f \in \mathcal{D}_2(L)$ ensemble des fonctions de $L^2(E)$ telles que la limite existe.

On a alors

$$\forall n \quad LQ_n = -\lambda_n Q_n$$

et

$$\mathcal{D}_2(L) = \{f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n Q_n \in L^2(E), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2 < +\infty\}.$$

L'étude des familles (Q_n) et des semigroupes de Markov associés est un sujet assez difficile qu'il est impossible d'aborder ici. On renvoie à [33] et à [17], pour des caractérisations dans les cas simples des polynômes de Hermite et de Jacobi, des suites (λ_n) pour lesquelles le semigroupe associé est un semigroupe de Markov.

On se restreint donc à l'étude des semigroupes de diffusion :

Définition 2 *Pour tout couple de polynômes (f, g) on définit la quantité*

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2}[L(fg) - fLg - gLf].$$

Cet opérateur bilinéaire est appelé opérateur carré du champ.

Il reste à définir la propriété de diffusion du semigroupe, et enfin à poser le cadre d'étude de son générateur infinitésimal.

Dans ce cadre, on se donne une définition de la propriété de diffusion adaptée à la famille des polynômes ; c'est une définition "algébrique".

Définition 3 *On dit que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe de diffusion si, pour f et ϕ polynômes, on a :*

$$L[\phi(f)] = \phi'(f)Lf + \phi''(f)\Gamma(f, f) \quad (Pd).$$

Remarque 1 On n'aura besoin en fait de cette hypothèse que lorsque $f = x$.

En effet, si on écrit (Pd) en prenant en particulier $\phi = Q_n$ et $f = x$, on obtient

$$L(Q_n(x)) = Q'_n(x)Lx + Q''_n(x)\Gamma(x, x).$$

Par linéarité, on voit donc que, sur les polynômes, L s'écrit:

$$L = \Gamma(x, x) \frac{d^2}{dx^2} + L(x) \frac{d}{dx}.$$

◇

Si on traduit maintenant le fait que $\forall n \quad LQ_n = -\lambda_n Q_n$ sur Q_1 et Q_2 , on obtient que

$$\Gamma(x, x) = Ax^2 + Bx + C, \quad L(x) = ax + b.$$

Finalement, L se met sous la forme

$$L = (Ax^2 + Bx + C) \frac{d^2}{dx^2} + (ax + b) \frac{d}{dx},$$

avec A, B, C, a, b réels.

Tout le travail de classification est fondé sur l'étude de ce générateur infinitésimal, par la discussion des valeurs des paramètres A, B, C, a et b , et de la forme de l'intervalle I .

Le cadre de cette étude est posé par l'énoncé des hypothèses suivantes :

On travaille à affinité près pour la "variable d'espace", et à homothétie près pour la "variable de temps", c'est-à-dire que l'on se permet, pour simplifier l'étude, et l'on peut vérifier facilement qu'il n'y a aucune perte de généralité, de travailler "modulo" les opérations suivantes :

$$x \mapsto mx \quad x \in I, m \in \mathbb{R}^* \quad (H1)$$

$$x \mapsto x + p \quad x \in I, p \in \mathbb{R} \quad (H2)$$

$$L \mapsto \lambda L \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (H3)$$

L étant le générateur infinitésimal.

3.1.3 Résultat Principal.

Nous allons maintenant démontrer la

Proposition : Les seuls semigroupes de diffusion¹ satisfaisant toutes les hypothèses énoncées – donc en particulier à une affinité près, ((H1) et (H2)) – sont ceux associés aux générateurs suivants :

$$1. \quad L = \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}.$$

$$I = \mathbb{R} \text{ muni de } \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ mesure gaussienne.}$$

1. Pour une étude détaillée de ces semigroupes, et en particulier du cas b), on peut se référer, outre les ouvrages cités dans l'introduction, à [34] et [23].

$(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors la suite des polynômes de Hermite, définis par leur série génératrice :

$$\exp(tx - \frac{t^2}{2}) = \sum_n \frac{t^n}{n!} Q_n(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad LQ_n = -nQ_n$.

Le semigroupe associé est ici celui d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$2. \quad L = x \frac{d^2}{dx^2} + (\gamma + 1 - x) \frac{d}{dx}, \quad \gamma > -1.$$

$I =]0, +\infty[$ muni de $\mu(dx) = K_\gamma e^{-x} x^\gamma dx$.

$(Q_n^\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors la suite des polynômes de Laguerre, définis par leur série génératrice :

$$(1-t)^{-\gamma-1} \exp(-\frac{xt}{1-t}) = \sum_n t^n Q_n^\gamma(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad LQ_n^\gamma = -nQ_n^\gamma$.

$$3. \quad L = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + (\beta - \gamma - (\beta + \gamma + 2)x) \frac{d}{dx}, \quad \beta > -1, \gamma > -1.$$

$I =]-1, 1[$ muni de $\mu(dx) = K_{\beta,\gamma} (1-x)^\gamma (1+x)^\beta dx$.

$(Q_n^{\gamma,\beta})$ est alors la suite des polynômes de Jacobi, définis par leur série génératrice :

$$2^{\gamma+\beta} (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-t-(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\gamma} (1+t-(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\beta} = \sum_n t^n Q_n^{\gamma,\beta}(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad LQ_n^{\gamma,\beta} = -n(n + \gamma + \beta + 1)Q_n^{\gamma,\beta}$.

Preuve.

1ère étape :

L étant le générateur infinitésimal d'un semigroupe de diffusion sur $E = (I, \mathcal{B}(I), \mu)$, il possède la propriété suivante : les valeurs propres (λ_n) associées à la suite orthogonale de vecteurs propres $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont négatives. Or si l'on identifie les coefficients des termes du plus haut degré de l'équation :

$$LQ_n = \lambda_n Q_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad An(n-1) + an = \lambda_n,$$

d'où

$$\forall n \geq 1, \quad A(n-1) + a \leq 0 \Rightarrow A \leq 0,$$

donc

$$\text{si } A \neq 0, \text{ alors } \forall n \geq 1 \quad \frac{a}{A} \geq 1 - n \Rightarrow a \leq 0,$$

$$\text{si } A = 0, \text{ alors } a \leq 0.$$

On obtient donc

$$A \leq 0 \text{ et } a \leq 0. \quad (3.1)$$

2ème étape :

Trois cas se présentent maintenant, suivant le nombre de racines réelles du trinôme $\Gamma(x, x) = Ax^2 + Bx + C = 0$:

1. Γ n'a aucune racine réelle. Sachant que $\Gamma(x, x) \geq 0$ sur I , et que $A \leq 0$, on en déduit que $A = B = 0$. On applique alors (H3) pour se ramener à la valeur $C = 1$: $\Gamma(x, x) = 1$.
2. Γ a une seule racine simple, c'est-à-dire $A = 0$. On utilise (H1) et (H2) pour se ramener au cas $B = 1, C = 0$ — on remarque que l'on n'a utilisé (H1) qu'en partie, et que l'on peut encore transformer x en mx avec $m > 0$: $\Gamma(x, x) = x$.
3. Γ admet deux racines distinctes. On utilise (H2), (H1) et (H3) pour se ramener respectivement à $B = 0, C = -A$ et $A = -1$: $\Gamma(x, x) = 1 - x^2$.

Le cas où Γ admet une racine double n'est pas pris en compte, car il n'existe pas dans ce cas d'intervalle non réduit à un point sur lequel Γ soit positif.

Dans chaque cas, nous exprimons l'invariance de la mesure μ associée à chaque opérateur L agissant sur l'espace des polynômes, en écrivant que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} Lx^k d\mu = 0.$$

Nous obtenons alors une caractérisation de la mesure par le calcul de ses moments, qui sont entièrement déterminés par les réels a et b .

Pour $k = 1$, on obtient l'égalité

$$a\mu_1 + b = 0,$$

où l'on note

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mu_i := \int_{\mathbb{R}} x^i d\mu.$$

Dans tous les cas, comme nous le verrons à l'étape suivante, la propriété (Pme) implique que $a \neq 0$. Le premier moment de la mesure μ est donc bien caractérisé. Les suivants se déduisent de $\mu_0 (= 1)$ et de μ_1 par les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \quad \forall k \geq 2, \quad \int_{\mathbb{R}} Lx^k d\mu = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^2}{dx^2} + (ax + b) \frac{d}{dx} \right) x^k d\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow a\mu_k + b\mu_{k-1} + (k-1)\mu_{k-2} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \forall k \geq 2, \quad \int_{\mathbb{R}} Lx^k d\mu = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(x \frac{d^2}{dx^2} + (ax + b) \frac{d}{dx} \right) x^k d\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow a\mu_k + (k-1+b)\mu_{k-1} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \forall k \geq 2, \quad \int_{\mathbb{R}} Lx^k d\mu = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + (ax + b) \frac{d}{dx} \right) x^k d\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-k+1)\mu_k + b\mu_{k-1} + (k-1)\mu_{k-2} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous pouvons donc conclure que puisque $a < 0$, tous les moments de la mesure sont entièrement déterminés, et partant, la mesure elle-même est entièrement caractérisée.

3ème étape :

Nous exhibons maintenant, dans chaque cas, la mesure de probabilité correspondant à la suite des moments déterminée par les trois formules de récurrence respectives. Il ne restera plus, pour clore la classification, qu'à appliquer celles des hypothèses (H1), (H2) et (H3) qui n'auraient pas encore été utilisées.

1. Les moments de la mesure

$$\mu(dx) = K(a, b)e^{\frac{a}{2}x^2 + bx} dx$$

vérifient la formule de récurrence 3.1. Le fait que μ doive vérifier la propriété (Pme) entraîne que $a \neq 0$, et on utilise (H1) et (H2) pour poser $y = -(ax + b)$, et pour obtenir enfin

$$\mu(dy) = Ke^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

avec

$$L = \frac{d^2}{dy^2} - y \frac{d}{dy}.$$

I est dans ce cas l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Les moments de la mesure

$$\mu(dx) = K(a, b)\mathbb{1}_{[0, +\infty[} e^{ax} x^{b-1} dx$$

vérifient la formule de récurrence 3.2. La propriété (Pme) implique que $a \neq 0$ et que $b > 0$. On utilise enfin complètement (H1) pour se ramener à

$$\mu(dx) = K\mathbb{1}_{[0, +\infty[} e^{-x} x^{b-1},$$

ce qui est le résultat annoncé avec $\gamma = b - 1$. I est ici la demi-droite $\mathbb{R}^+$, support de la mesure.

3. Les moments de la mesure

$$\mu(dx) = K(a, b)\mathbb{1}_{[-1, 1]}(1 - x)^{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 1}(1 + x)^{-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1} dx$$

vérifient la formule de récurrence 3.3, ce qui est le résultat annoncé avec $\gamma = -1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, et $\beta = -1 - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, enfin $(Pme) \Rightarrow \gamma > -1$ et $\beta > -1$, avec $I = [-1, 1]$.

Remarque 2 Les mesures ainsi exhibées peuvent être obtenues par le calcul suivant, qui consiste à effectuer sur I un changement de variables bijectif $y = \phi(x)$, de façon à ce que L se mette sous la forme classique

$$L = \frac{d^2}{dy^2} + \alpha(y) \frac{d}{dy}$$

sur $J = \phi(I)$. On doit donc poser

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(x, x)}}.$$

On vérifie alors facilement que la mesure ν de densité $\exp(\int_K^y \alpha(t) dt)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, satisfait à la propriété de symétrie pour l'opérateur L , c'est-à-dire que

$$\langle Lf, g \rangle_{L^2(\nu)} = \langle Lg, f \rangle_{L^2(\nu)}, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_2(L).$$

Le changement de variables permet de trouver la mesure réversible associée au semigroupe. Il suffit donc de revenir à la forme première de L , par le changement de variable inverse, et l'on retrouve dans chaque cas les mesures annoncées. $\diamond$

Remarque 3 Plus généralement, considérons E un espace de probabilité quelconque, L un opérateur de diffusion admettant comme décomposition spectrale une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \exists \lambda_i \text{ réels}, \quad f_n f_p = \sum_{i=0}^{n+p} \lambda_i f_i,$
- f_1 bijection de E sur $f_1(E)$.

Par récurrence, on montre facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists \mu_i \text{ réels}, \quad f_k = \sum_{i=0}^k \mu_i f_1^i,$$

et après le changement de variables $y = f_1(x)$, on est ramené à notre cadre d'étude basé sur les polynômes de la variable réelle. $\diamond$

3.1.4 Remarques sur l'interprétation géométrique de ces processus de diffusion particuliers.

Il est intéressant de remarquer que tous ces processus de diffusion peuvent se retrouver, pour certaines valeurs entières des paramètres, au moyen de diverses transformations géométriques, à partir du mouvement brownien sur les sphères de $\mathbb{R}^n$. On peut trouver certaines de ces remarques dans [20], que l'on généralise notamment aux semigroupes de Jacobi dissymétriques.

On note :

- $S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = r\}$
- $D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$
- $\Phi_{n,p}^r$ projection de S_r^{n-1} sur un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n-1$ passant par l'origine :

$$\Phi_{n,p}^r(S_r^{n-1}) = D_r^p.$$

Le mouvement brownien sur S_1^{n-1} se projette par $\Phi_{n,p}^1$ sur un processus de Markov, sur D_1^p , de générateur infinitésimal qui s'écrit dans la base canonique :

$$L_{n,p} = \sum_{i=1}^p (\delta^{ij} - x^i x^j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - (n-1) \sum_{i=1}^p x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On pose $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$.

On considère les fonctions sur D_1^p qui ne dépendent que de ρ , et on obtient alors que

$$L_{n,p}^{(\rho)} f(\rho) = (1 - \rho^2) f''(\rho) + \frac{p-1}{\rho} f'(\rho) - (n-1) \rho f'(\rho) \quad \text{avec } \rho \in [0, 1].$$

On effectue alors le changement de variables

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow [-1, 1] \\ \rho &\mapsto x = 2\rho^2 - 1, \end{aligned}$$

pour obtenir

$$L_{n,p}^{(x)} f(x) = 4[(1 - x^2) f''(x) + (\frac{n-2p}{2} - \frac{n}{2} x) f'(x)].$$

L'opérateur

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{n - 2p}{2} - \frac{n}{2}x \right) \frac{d}{dx}$$

est l'opérateur de Jacobi de paramètres $\beta = \frac{n-p-2}{2}$ et $\gamma = \frac{p-2}{2}$.

On vient d'obtenir l'ensemble des opérateurs de Jacobi dissymétriques dont les paramètres sont des demi-entiers ; de plus on remarque que les conditions $\beta > -1$, $\gamma > -1$ se traduisent par $n > p$, $p > 0$ sur les dimensions des espaces de départ.

Par ailleurs, avant d'opérer le changement de variables $x = 2\rho^2 - 1$, le cas $p = 1$ nous fournit directement

$$L_{n,1}f(\rho) = (1 - \rho^2)f''(\rho) - (n - 1)\rho f'(\rho) \quad (3.4)$$

qui est l'opérateur de Jacobi symétrique (ou opérateur ultrasphérique) de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, si l'on effectue alors le changement de variables $x = 2\rho^2 - 1$ sur cet opérateur $L_{n,1}$, on obtient une classe particulière des opérateurs de Jacobi dissymétriques qui sont ceux de paramètres $\beta = \frac{n-1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Remarque 4 Cet opérateur $L_{n,1}$, qui est la partie radiale du Laplacien sur la sphère, est un cas particulier d'un phénomène plus général : la partie radiale du Laplacien sur un espace symétrique compact de rang 1 est un opérateur de Jacobi. Ces espaces ont été classifiés dans [38] (voir aussi [15]), et outre les sphères, ils comprennent aussi les espaces projectifs réels, complexes et quaternioniques, ainsi que le plan elliptique de Cayley. $\diamond$

Remarque 5 En faisant le changement de variables $y = \arcsin x$ décrit plus haut, l'opérateur $\frac{1}{4}L_{n,p}^{(x)}$ s'écrit

$$\frac{d^2}{dy^2} + \frac{a}{\cos y} \frac{d}{dy} + b \tan y \frac{d}{dy},$$

avec $a = \frac{n-2p}{2}$, $b = \frac{2-n}{2}$

Dans [1], les auteurs font apparaître un opérateur similaire qui semble correspondre pour les cas où a et b sont des demi-entiers, à la même opération sur les parties radiales, où l'espace hyperbolique remplace la sphère. $\diamond$

D'autre part, il est bien connu que le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension p est la limite quand n tend vers l'infini de l'image du semigroupe

du mouvement brownien sur $S_{\sqrt{n}}^{n-1}$ par $\Phi_{n,p}^{\sqrt{n}}$, avec $p < n$. On obtient le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck classique (i.e. unidimensionnel) pour $p = 1$. (On utilise ici l'outil communément appelé "lemme de Poincaré", qui serait plutôt dû à Mehler, voir [36], page 77).

De plus, si l'on considère les fonctions radiales sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(|x|) = f(x),$$

et si l'on définit le semigroupe (Q_t) sur $\mathbb{R}^*$ de la façon suivante :

$$Q_t g(|x|) = P_t f(x),$$

où (P_t) est le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, alors (Q_t) est le semigroupe de diffusion associé aux polynômes de Laguerre.

Les semigroupes d'Ornstein-Uhlenbeck et de Laguerre peuvent aussi être retrouvés par leurs générateurs infinitésimaux à partir des opérateurs de Jacobi. En effet, en effectuant une homothétie de rapport $\sqrt{n}$ sur l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,p}$, (ce qui équivaut à considérer l'image du Laplacien sur $S_{\sqrt{n}}^{n-1}$ par $\Phi_{n,p}^{\sqrt{n}}$), et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient le générateur infinitésimal du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

De la même façon, en dimension 1, en considérant l'opérateur de Jacobi dissymétrique

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{n - 2p}{2} - \frac{n}{2} x \right) \frac{d}{dx},$$

en utilisant le changement de variable

$$x \mapsto (n - 1) \frac{x - 1}{2},$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient le générateur infinitésimal du semigroupe de Laguerre.

Enfin, en ce qui concerne les valeurs propres des générateurs infinitésimaux sur la base des polynômes dans L^2 , on remarque que la suite $\lambda_k = -k(k + n - 2)$, énoncée au paragraphe 3, des valeurs propres de l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,1}$ correspond exactement à la suite des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^n ; alors que l'opérateur de Jacobi dissymétrique $L_{n,1}^{(x)}$ admet la suite

$$\lambda'_k = 4\left(-k\left(k + \frac{n}{2} - 1\right)\right) = -2k(2k + n - 2) = \lambda_{2k}$$

de valeurs propres, donc ne reprend qu'une valeur propre sur deux du même Laplacien sur S^n .

Cette remarque, vraie pour toutes les valeurs des paramètres, s'explique aisément pour les valeurs entières en remarquant que l'opérateur de Jacobi dissymétrique $L_{n,p}^{(\rho)}$ peut être considéré comme la restriction de l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,p}$ aux fonctions radiales sur D_1^p , donc en l'occurrence, pour $p = 1$, aux fonctions paires sur $[-1, 1]$, donc la suite des vecteurs propres de $L_{n,1}^{(\rho)}$ est la suite des polynômes de Jacobi de degré pair, d'où le résultat sur les valeurs propres.

La remarque peut se généraliser en dimension supérieure: Soit $P_k(x)$ le k -ième polynôme de Jacobi sur $[-1, 1]$; alors P_k est vecteur propre de l'opérateur $L_{n,1}$. On pose maintenant

$$\begin{aligned} f_k : D^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto P_k(x_1). \end{aligned}$$

Alors f_k est clairement vecteur propre de l'opérateur $L_{n,p}$. De plus, le Laplacien sur S^n étant invariant par les rotations de $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour sa projection $L_{n,p}$ sur D^p , les rotations de $\mathbb{R}^p$ pour $p \leq n$ étant des rotations de $\mathbb{R}^n$ particulières. Donc si $R \in SO_p$ groupe des rotations de $\mathbb{R}^p$, $f_k \circ R$ reste vecteur propre de $L_{n,p}$.

On munit maintenant SO_p de la mesure de Haar dR , et on pose

$$\begin{aligned} h_k : D^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{SO_p} f_k(Rx) dR ; \end{aligned}$$

pour $x_0 \in D^p$, $h_k(x_0)$ est en fait la valeur moyenne de f_k sur $S_{\|x_0\|_p}^{p-1}$. h_k est donc une fonction radiale, i.e.

$$\exists h'_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_k(x) = h'_k(\|x\|_p).$$

De plus, il est facile de vérifier que $h_k(x)$ reste vecteur propre de $L_{n,p}$, donc que $h'_k(\rho)$ est vecteur propre de $L_{n,p}^{(\rho)}$. On effectue enfin le changement de variables

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\rightarrow [-1, 1] \\ \rho &\mapsto x = 2\rho^2 - 1, \end{aligned}$$

et on retrouve que $h'_k(x)$ est vecteur propre de $L_{n,p}^{(x)}$, donc est polynôme de Jacobi dissymétrique; on peut constater en effet que les diverses modifications

subies par $P_k(x)$ n'ont pas altéré sa forme polynômiale. Enfin, on retrouve que $L_{n,p}^{(x)}$ n'admet comme valeurs propres qu'une valeur propre sur deux de l'opérateur $L_{n,p}$ par le fait que dans un cas sur deux, $h_k(x) \equiv 0$.

Vérifions-le sur un exemple simple : $p = 2$

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\},$$

d'où

$$h_k(x, y) = \int_0^{2\pi} P_k(x \cos \theta + y \sin \theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

on pose alors $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} h_k(x, y) = h'_k(r) &= \int_0^{2\pi} P_k(r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} P_k(r \cos(\theta + \varphi)) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} P_k(r \cos \theta) \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Or k impair $\Rightarrow h'_k(r) = 0$ (car P_k est un polynôme impair).

En conclusion, tous les opérateurs de Jacobi dont les paramètres sont des demi-entiers, s'obtiennent par projection du mouvement brownien sur les sphères, (et même, en ce que concerne les opérateurs symétriques, de deux façons différentes). Les semigroupes d'Ornstein-Uhlenbeck et de Laguerre s'obtiennent des semigroupes de Jacobi par des limites quand n et p tendent vers l'infini, moyennant un changement d'échelle et de temps.

3.2 Diffusions en dimension supérieure à 1

Nous avons classifié les semigroupes de diffusion symétriques dans une base de polynômes orthogonaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$. La même méthode pourrait être employée en dimension supérieure, à ceci près que nous perdrons une propriété importante, qui est l'équivalence entre la réversibilité et l'invariance de la mesure pour les semigroupes. La mise en œuvre de la classification comporterait donc une étape supplémentaire, qui imposerait

au semigroupe (donc à son générateur infinitésimal) d'être symétrique dans $L^2(E, \mu)$. Cette étape supplémentaire, agrémentée de calculs dans $\mathbb{R}^n$, exigeait trop de temps pour figurer dans cette thèse, mais constitue un pan évident et incontournable du travail restant à effectuer dans ce domaine. Nous donnons cependant un exemple de semigroupe symétrique de diffusion sur $\mathbb{R}^n$.

Soit l'opérateur $L_{n,\beta}$ défini sur la boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$L_{n,\beta} = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \beta \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \beta > n-1,$$

Cette classe d'opérateurs $\{L_{n,\beta}, n \in \mathbb{N}, \beta > n-1\}$, fait partie d'un ensemble plus grand d'opérateurs

$$L_{n,\lambda,\beta} = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{i,j} - \lambda x_i x_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \beta \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

qui pour certaines valeurs des paramètres λ et β sont des quasilaplaciens sur la boule, de courbure et dimension constantes. On peut retrouver une étude de ces opérateurs dans [2]. Dans le cas où β est un entier, cet opérateur se déduit du Laplacien sphérique par projection. L'opérateur $L_{n,\beta}$ est invariant par rotation, car le Laplacien sphérique l'est. Il apparaît donc que si L admet la mesure μ comme mesure invariante, alors μ est "radiale", c'est-à-dire qu'elle est elle-même invariante par rotation. Pour expliciter cette mesure, il nous suffit donc de nous intéresser à l'opérateur

$$L_{n,\beta}^r = (1 - r^2) \frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{n-1}{r} - \beta r \right) \frac{d}{dr},$$

déduit de $L_{n,\beta}$ par projection sur un diamètre de la boule, (voir page 48), et en lequel on reconnaît l'opérateur de Jacobi symétrique, qui admet comme mesure invariante (pour le calcul, voir page 45) :

$$\nu(dr) = K r^{n-1} (1 - r^2)^{-\frac{n-\beta+1}{2}} dr, \quad K \text{ constante de normalisation.}$$

Si, pour x élément de la boule unité, on note $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ son rayon, et pour $r \neq 0$, $\sigma = \frac{x}{r}$ élément de la sphère unité, la mesure

$$\mu(dr d\sigma) = K r^{n-1} (1 - r^2)^{-\frac{n-\beta+1}{2}} dr d\sigma$$

est donc la mesure invariante pour l'opérateur $L_{n,\beta}$. Il reste à vérifier que cette mesure est aussi réversible pour $L_{n,\beta}$.

Pour cela, calculons d'abord, pour f et g fonctions de $L^2(E, \mu)$ quelconques, l'intégrale :

$$\int_E f Lg d\mu = \int_E f \left[\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \beta \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha dx,$$

où l'on a posé $\alpha = \frac{\beta-n-1}{2}$, et $x = (x_1, \dots, x_n)$ élément générique de la boule unité.

Une intégration par parties sur la dérivée seconde nous donne :

$$\int_E f Lg d\mu = - \int_E \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \mu(dx) - \int_E \sum_{i=1}^n f \frac{\partial g}{\partial x_i} I(x_i, \alpha, \beta) dx$$

$$\text{où } I(x_i, \alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [(\delta_{ij} - x_i x_j) (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha] + \beta x_i (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha.$$

Or

$$\begin{aligned} I(x_i, \alpha, \beta) &= - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [(x_i x_j) (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} [(1 - x_i^2) (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha] + \beta x_i (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^\alpha \\ &= x_i (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^{\alpha-1} [-(n-1)(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2) + \\ &\quad + 2\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 - 2(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2) - 2\alpha(1 - x_i^2) + \beta(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)] \\ &= x_i (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^{\alpha-1} (1 - \sum_{k=1}^n x_k^2) (\beta - 2\alpha - n - 1), \end{aligned}$$

et de $\alpha = \frac{\beta-n-1}{2}$ on obtient que

$$I(x_i, \alpha, \beta) = 0.$$

On a donc montré que $\forall f, g \in L^2(E, \mu)$,

$$\int_E f Lg d\mu = - \int_E \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \mu(dx) = \int_E g Lf d\mu.$$

L'opérateur L est donc symétrique dans $L^2(E, \mu)$, ce que l'on voulait démontrer. L se diagonalise donc dans la base des polynômes orthogonaux de $L^2(E, \mu)$, base qui se construit, comme dans le cas de la dimension 1, par un procédé d'orthogonalisation à partir de la suite de polynômes

$$\{1, \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i,j=1}^n x_i x_j, \dots\},$$

c'est-à-dire de l'ensemble des polynômes homogènes.

3.3 Un exemple sur $\mathbb{R}$ de semigroupe symétrique de Markov qui n'est pas de diffusion

Parmi les semigroupes symétriques dans $L^2(E, \mu)$ muni d'une base de polynômes orthogonaux, la première section du présent chapitre établit un recensement exhaustif de ceux qui sont des diffusions, lorsque E est un intervalle de $\mathbb{R}$. Deux directions de généralisation sont alors possibles, pour étendre la classification. La première, que l'on a abordée dans la section précédente, consiste à prolonger en dimension supérieure. La seconde est de s'affranchir de la propriété de diffusion, donc de la continuité des trajectoires du processus associé. Voici un exemple trivial d'un tel semigroupe.

Plaçons nous sur l'espace à deux points $E_1 = \{-1, 1\}$, muni de la mesure uniforme $\mu_1(dx) = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)(dx)$. Sur cet espace, introduisons l'opérateur P_t^1 défini par

$$P_t^1 f(x) = \int_{E_1} f(y)(1 + e^{-t}xy) \mu_1(dy).$$

Remarquons que toute fonction sur cet espace se représente de façon unique sous la forme $f(x) = a + bx$, d'où

$$P_t^1(a + bx) = a + e^{-t}bx.$$

L'ensemble des fonctions $\{1, x\}$ constitue donc une base orthogonale de $L^2(E_1, \mu_1)$, base de vecteurs propres sur laquelle le générateur infinitésimal L^1 associé à $(P_t^1)_{t \geq 0}$ admet les valeurs propres respectives $\{0, -1\}$.

Ce semigroupe vérifie de façon évidente la propriété de Markov. Si nous plongeons l'espace E_1 dans $\mathbb{R}$, nous avons donc construit un semigroupe

symétrique de Markov qui n'est pas un semigroupe de diffusion, puisque les trajectoires du processus associé sautent entre les points -1 et 1 , et par là même sont discontinues.

L'intérêt de cet exemple peut être perçu lorsqu'on le généralise de la manière suivante.

Considérons l'espace produit $E_n = \{-1, 1\}^n$, muni de la mesure produit μ_n , obtenue par tensorisation de μ_1 . Sur cet espace, nous avons le semigroupe produit $P_t^n = (P_t^1)^{\otimes n}$, défini pour $f \in E_n$ par

$$P_t^n f(x) = \int_{E^n} f(y) \prod_{i=1}^n (1 + e^{-t} x_i y_i) \mu(dy),$$

où l'on a posé $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Ces opérateurs forment un semigroupe de générateur

$$L^n = \sum_{i=1}^n I \otimes \dots \otimes L^1 \otimes I \otimes \dots \otimes I,$$

c'est-à-dire que

$$L^n f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n L_i^1 f(x_1, \dots, x_n),$$

chaque opérateur L_i^1 étant l'analogue de l'opérateur L^1 agissant sur la seule variable x_i .

Les fonctions propres de L^n sont les fonctions notées x_A , définies par

$$x_A = \prod_{i \in A} x_i,$$

où $A \subset \{1, \dots, n\}$ et où x_i représente ici la fonction identité de la $i^{\text{ème}}$ composante. Ainsi, de $L^1 x_1 = -x_1$, on tire $L^n x_A = -(\#A) x_A$.

Considérons alors la fonction $\Phi : E^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

Son image est l'ensemble $E = \{-n, -n+2, \dots, n\}$. Notons par $\hat{\mu}_n$ la mesure image de μ_n par Φ , et $\hat{L}^n$ l'opérateur image de L^n par Φ .

Soit $z \in E$, on définit pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$y_k(z) = \sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k}} x_A(\omega),$$

avec $\omega \in E^n$ tel que $z = \Phi(\omega)$. L'univocité des fonctions y_k est garantie par le fait que l'on somme sur toutes les parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments. Une vérification immédiate montre que les y_k sont les fonctions propres de l'opérateur $\hat{L}^n$, de valeurs propres $(-k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \hat{L}^n y_k = -k y_k.$$

De plus, les fonctions $y_k(z)$ sont des polynômes en z de degré k . En effet, pour $\omega \in E^n$, si l'on note pour plus de commodité $\omega_A := x_A(\omega)$, la fonction y_k s'écrit donc

$$y_k(z) = \sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k}} \omega_A.$$

On observe que $y_1(z) = z$, et que

$$z^2 = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + 2 \sum_{i < j} \omega_i \omega_j = n + 2y_2(z),$$

d'où $y_2(z) = \frac{1}{2}(z^2 - n)$.

Posons l'hypothèse de récurrence : soit $k_0 \geq 2$, supposons que

$$\forall k \leq k_0, \quad y_k(z) \in \mathbb{R}[z].$$

Calculons alors le produit

$$zy_k(z) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right) \left(\sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k}} \omega_A\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k}} \omega_A \omega_i.$$

Or le terme $\omega_A \omega_i = \omega_{A \cup \{i\}}$ si $i \notin A$, et $\omega_{A \setminus \{i\}}$ si $i \in A$. Donc

$$\begin{aligned} zy_k(z) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k, A \not\ni i}} \omega_{A \cup \{i\}} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{AC\{1, \dots, n\} \\ \sharp A = k, A \ni i}} \omega_{A \setminus \{i\}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\hat{A} \subset \{1, \dots, n\} \\ \sharp \hat{A} = k+1, \hat{A} \ni i}} \omega_{\hat{A}} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\tilde{A} \subset \{1, \dots, n\} \\ \sharp \tilde{A} = k-1, \tilde{A} \not\ni i}} \omega_{\tilde{A}} \end{aligned}$$

Notons par $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments, par $\mathcal{B}_k$ l'ensemble des couples (i, A) avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $A \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $i \notin A$ et $\#A = k$; et notons par $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des couples (i, A) avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $A \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $i \in A$. Définissons les applications

$$\begin{aligned} b : \mathcal{B}_k &\rightarrow \mathcal{A}_{k+1} \\ (i, A) &\mapsto \{i\} \cup A \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d : \mathcal{D}_k &\rightarrow \mathcal{A}_{k-1} \\ (i, A) &\mapsto A \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Alors on remarque que tout élément $\hat{A}$ de $\mathcal{A}_{k+1}$ admet autant d'antécédents par b que de choix de i dans $\hat{A}$, c'est-à-dire $k+1$. De même, tout élément $\check{A}$ de $\mathcal{A}_{k-1}$ admet autant d'antécédents par d que de choix de i dans $\{1, \dots, n\} \setminus \check{A}$, c'est-à-dire $n-k+1$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} zy_k(z) &= \sum_{\hat{A} \in b(\mathcal{B}_k)} \omega_{\hat{A}} = \sum_{\check{A} \in d(\mathcal{D}_k)} \omega_{\check{A}} \\ &= (k+1) \sum_{\hat{A} \in \mathcal{A}_{k+1}} \omega_{\hat{A}} + (n-k+1) \sum_{\check{A} \in \mathcal{A}_{k-1}} \omega_{\check{A}} \\ &= (k+1)y_{k+1}(z) + (n-k+1)y_{k-1}(z), \end{aligned}$$

d'où

$$y_{k+1}(z) = \frac{1}{k+1} [zy_k(z) - (n-k+1)y_{k-1}(z)], \quad (3.5)$$

ce qui achève la démonstration.

Ainsi, avec $y_0(z) = 1$, l'égalité 3.5 est vraie pour tout $k \geq 1$.

De même qu'avec E_1 , si l'on plonge E dans $\mathbb{R}$, on obtient un semigroupe sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{R}, \hat{\mu}_n)$ admet $\{y_1, \dots, y_n\}$ comme base de polynômes orthogonaux. Ces polynômes sont eux-mêmes les vecteurs propres du semigroupe et de son générateur infinitésimal. Le semigroupe obtenu est bien un semigroupe de Markov, mais l'espace d'états du processus associé est $E = \{-n, \dots, n\}$, et la mesure $\hat{\mu}_n$ charge tous les points de E . Donc les trajectoires du processus sont discontinues. Le semigroupe n'est donc pas de diffusion.

Nous avons ainsi construit une famille (indexée par n) de semigroupes de Markov symétriques dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des semigroupes de diffusion.

Il est important de remarquer qu'à une renormalisation près, c'est-à-dire en remplaçant Φ par $\tilde{\Phi} : E^n \rightarrow \mathbb{R}$, qui à z associe $\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi(z)$, la suite $\hat{\mu}_n$ à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ converge étroitement vers la mesure gaussienne standard. De même, dans un certain sens, ces semigroupes symétriques convergent vers le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, (pour plus de précisions, voir [3]), qui est, rappelons-le, le seul semigroupe symétrique de diffusion agissant sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Ce rôle extrémal joué par le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck va être développé dans le chapitre suivant, qui caractérise les semigroupes de Markov symétriques dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure gaussienne.

Chapitre 4

Caractérisation du noyau markovien dans les cadres des polynômes de Hermite et de Jacobi

Pour pouvoir atteindre notre but, qui est de décrire les semigroupes de Markov symétriques associés aux polynômes de Hermite, au moyen d'une caractérisation de leurs valeurs propres sur cette base de polynômes orthogonaux, nous présentons dans ce chapitre un résultat important dû à Sarmanov et Bratoeva ([33]) caractérisant le noyau d'un opérateur positif se diagonalisant sur la base des polynômes de Hermite. Nous démontrons et interprétons ce résultat en le comparant à un résultat analogue sur les polynômes de Jacobi, puis nous proposons une nouvelle démonstration du résultat en utilisant une certaine structure de convolution, dont le rôle fondamental est ainsi mis en évidence. Cette structure est enfin mise en rapport avec la théorie des hypergroupes que nous présentons succinctement en fin de chapitre.

4.1 Cadre des polynômes de Hermite : théorème de Sarmanov-Bratoeva

Le théorème suivant provient de l'article [33], nous en retranscrivons ici un aperçu de la démonstration.

Considérons l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}^2$ qui s'écrivent de la manière suivante :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k H_k(x) H_k(y), \quad (4.1)$$

où $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Hermite, polynômes que l'on prend dans cette section normalisés à 1, et où la suite de réels $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k| \leq 1 ; \quad c_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty.$$

En particulier, la série 4.1 converge dans $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$.

La propriété suivante est alors vérifiée :

Proposition 2 *La somme 4.1 est positive pour tout x et tout y réels, si et seulement si la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des moments d'une certaine mesure de probabilité sur $[-1, 1]$, sans masse en 1 ni en -1 .*

Preuve :

Supposons que la somme 4.1 soit positive. Elle constitue donc le noyau d'une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \gamma)$, qui est même, par l'égalité $c_0 = 1$, une mesure de probabilité. Par définition des polynômes de Hermite, on peut écrire que

$$y^k = \sqrt{k!} H_k(y) + a_{k-2} H_{k-2}(y) + a_{k-4} H_{k-4}(y) + \dots = \sqrt{k!} H_k(y) + \sum_{i=\epsilon(k)}^{k-2} a_i H_i(y),$$

où $\epsilon(k) = 1$ si k est impair, 0 si k est pair, et où les a_i sont des constantes réelles.

Notons, pour g une fonction convenable, par $E_x(g(y))$ la quantité :

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k H_k(x) H_k(y) \gamma(dy).$$

Alors

$$\begin{aligned} E_x(y^k) &= \sqrt{k!} c_k H_k(x) + \sum_{i=\epsilon(k)}^{k-2} c_i a_i H_i(x) \\ &= c_k x^k + \sum_{i=\epsilon(k)}^{k-2} b_i x^i, \end{aligned}$$

où les b_i sont des constantes réelles.

$$\text{De même, } E_x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^k\right) = c_k + \sum_{i=\epsilon(k)}^{k-2} \frac{b_i}{x^{k-i}}.$$

D'où l'on s'aperçoit que pour x suffisamment grand, c_k est suffisamment proche du moment $E_x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^k\right)$.

Plus précisément, mais sans rentrer dans les détails de calcul, (que l'on pourra trouver dans [33]), notons

$$\phi_x(t) = E_x(e^{ity}),$$

d'où

$$\phi\left(\frac{t}{x}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{t}{x}y} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k H_k(x) H_k(y) \gamma(dy).$$

De

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ity} e^{\alpha y - \frac{\alpha^2}{2}} \gamma(dy) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha t},$$

et de la série génératrice des polynômes de Hermite normalisés, on tire l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ity} H_k(y) \gamma(dy) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{(it)^k}{\sqrt{k!}},$$

d'où

$$\phi_x\left(\frac{t}{x}\right) = e^{-\frac{t^2}{2x^2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{it}{x}\right)^k \frac{c_k}{\sqrt{k!}} H_k(x).$$

Posons

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \frac{(it)^k}{k!},$$

qui est une série convergente, telle que $|\omega(t)| \leq e^{|t|}$.

Exprimons la quantité $\frac{H_k(x)}{x^k \sqrt{k!}}$ suivante :

$$\frac{H_k(x)}{x^k \sqrt{k!}} = \frac{1}{k!} + \frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{2^i (x^2)^{i-1} i! (k-2i)!}$$

avec

$$\left| \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{2^i (x^2)^{i-1} i! (k-2i)!} \right| \leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^i i! (k-2i)!} < \frac{1}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor!},$$

ce qui permet d'écrire que si

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2x^2}} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (it)^k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{2^i (x^2)^{i-1} i! (k-2i)!},$$

alors

$$|\psi(x, t)| < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|t|^k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor!} < (1 + |t|)e^{t^2}.$$

D'où

$$\phi_x\left(\frac{t}{x}\right) = \omega(t) + (e^{-\frac{t^2}{2x^2}} - 1)\omega(t) + \frac{1}{x^2}\psi(x, t),$$

et de

$$|e^{-\frac{t^2}{2x^2}} - 1| \leq \frac{t^2}{2x^2},$$

on déduit

$$|\phi_x\left(\frac{t}{x}\right) - \omega(t)| < \frac{t^2}{2x^2}e^{|t|} + \frac{1}{x^2}(1 + |t|)e^{t^2}.$$

Soient alors $\epsilon > 0$ et $T > 0$. Pour x assez grand,

$$t \in [-T, T] \Rightarrow |\phi_x\left(\frac{t}{x}\right) - \omega(t)| < \epsilon.$$

On en déduit que $\omega(t)$, comme limite de fonctions caractéristiques convergeant uniformément sur tout compact, est elle-même une fonction caractéristique, dont la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des moments associée. De la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$, on en déduit que la mesure de probabilité associée est concentrée sur $[-1, 1]$, sans masse en 1 et -1 . En effet, si tel n'était pas le cas, de l'égalité

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mu \right)^{\frac{1}{2k}} = \sup_{\text{supp}(\mu)} |x|,$$

on déduirait la non convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu$.

Réciproquement, supposons que $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit la suite des moments d'une certaine mesure de probabilité $\xi(dx)$, à support inclus dans $[-1, 1]$, sans masse en 1 et -1 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \int_{-1}^1 s^k \xi(ds).$$

Alors du développement en série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} s^k H_k(x) H_k(y) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} e^{-\frac{s^2(x^2+y^2)-2sxy}{2(1-s^2)}},$$

on obtient que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k H_k(x) H_k(y) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} e^{-\frac{s^2(x^2+y^2)-2sxy}{2(1-s^2)}} \xi(ds) \geq 0,$$

ce qui achève la démonstration. ◻

Cette caractérisation des noyaux d'opérateurs positifs se diagonalisant sur la base des polynômes de Hermite peut être étendue aux opérateurs positifs symétriques dans $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ n'admettant pas forcément de noyau de la forme 4.1, c'est-à-dire tels que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2$ ne converge pas. La suite des c_k étant néanmoins bornée, on en déduit que

$$\forall \theta > 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 e^{-2\theta k} < +\infty.$$

D'où $\forall \theta > 0$, $\exists \tilde{\mu}$ mesure de probabilité sans masse aux bords, telle que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k e^{-\theta k} &= \int_{-1}^1 s^k \tilde{\mu}(ds) \\ \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k &= \int_{-1}^1 s^k \tilde{\mu}(ds) \int_{\mathbb{R}} s^k \delta_{e^\theta}(ds) \\ \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k &= \int_{\mathbb{R}} s^k \nu(ds), \end{aligned}$$

où $\nu(ds) = \tilde{\mu}_t * \delta_{e^\theta}(ds)$, avec $*$ le produit de convolution multiplicative (voir ci-dessous et page 93). Le support de la mesure ν est donc inclus dans l'intervalle $[-e^\theta, e^\theta]$, et ce $\forall \theta > 0$. On en conclut donc que $\nu \in \mathcal{M}^1([-1, 1])$.

Cette caractérisation des valeurs propres des opérateurs positifs symétriques sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ par les moments d'une mesure de probabilité met en évidence une structure de convolution particulière, dite multiplicative. En effet, comme nous venons de le voir, tout opérateur positif symétrique P sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ est associé à une certaine mesure de probabilité μ sur $[-1, 1]$, telle que si la suite $(e^{-\lambda(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres de P sur la base de vecteurs propres des polynômes de Hermite, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad e^{-\lambda(k)} = \int_{-1}^1 x^k \mu(dx).$$

Soient maintenant deux opérateurs positifs symétriques P_1 et P_2 sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$, associés respectivement aux mesures de probabilité sur $[-1, 1]$ μ_1 et μ_2 , alors l'opérateur composé $P_1 \circ P_2$ est encore un opérateur positif symétrique sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$, dont la mesure de probabilité sur $[-1, 1]$ associée est $\mu_1 * \mu_2$, où $*$ est le produit de convolution défini par

$$\int_{-1}^1 f(x) (\mu_1 * \mu_2)(dx) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(xy) \mu_1(dx) \mu_2(dy),$$

pour toute bonne fonction f sur $[-1, 1]$.

Pour mieux comprendre d'où vient et comment s'interprète ce produit de convolution, nous allons citer un autre résultat, tiré de l'article de Gasper [17], qui caractérise les opérateurs positifs dans le cadre des polynômes de Jacobi, et qui met en jeu une autre structure de convolution que nous étudierons en détail.

4.2 Cadre des polynômes de Jacobi: théorème de Gasper

La proposition exposée dans cette section est une caractérisation des valeurs propres des opérateurs positifs et symétriques dans $L^2(E, \mu)$, dans le cadre des polynômes de Jacobi.

Considérons l'espace probabilisé $([-1, 1], \mu)$, avec

$$\mu(dx) = K(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

$\alpha > -1, \beta > -1, K$ constante de normalisation. La famille de polynômes orthogonaux dans $L^2([-1, 1], \mu)$, construite par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à partir de la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est, comme nous l'avons vu, la famille $(J_k^{\alpha, \beta})_{k \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Jacobi. Notons par $R_k(x) = \frac{J_k^{\alpha, \beta}(x)}{J_k^{\alpha, \beta}(1)}$ le polynôme de Jacobi normalisé de degré k .

Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Nous dirons qu'elle est *définie positive relativement* à $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R_k(x) \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k c_k R_k(x) \geq 0$$

Le résultat suivant est dû à Gasper ([17]) :

Proposition 3 *Supposons que $\alpha \geq \beta > -1$, avec soit $\beta \geq -\frac{1}{2}$, soit $\alpha \geq -\beta$. Soit $F(x)$ une fonction croissante et bornée sur $[-1, 1]$. Alors la suite*

$$c_k = \int_{-1}^1 R_k(x) dF(x)$$

est définie positive relativement à $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Réciproquement, toute suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie positive relativement à $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une telle représentation.

Ce résultat est en fait essentiellement dû à Bochner ([9]) qui l'a établi dans le cas où $\alpha = \beta$. C'est ce même cas que nous reprenons ici, car il présente l'avantage d'offrir une vision plus géométrique, lorsque α est un demi-entier. En effet, les polynômes de Jacobi que nous notons pour plus de lisibilité $(J_k)_{k \in \mathbb{N}} = (J_k^{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}})_{k \in \mathbb{N}}$, sont en fait les parties radiales des polynômes homogènes de degré k sur $S_{n-1}(1)$, sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$, qui eux-mêmes sont les vecteurs propres du Laplacien sphérique. On en déduit que $\forall x, y \in S_{n-1}(1)$, les fonctions $z \mapsto J_i(x.z)$ et $z \mapsto J_j(y.z)$ sont orthogonales lorsque $i \neq j$ dans $L^2(S_{n-1}(1), \mu)$, où m est la mesure de Lebesgue

normalisée sur la sphère, pour en faire une probabilité, et où $x.y$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

On note $e = (1, 0, \dots, 0)$ le pôle de la sphère, et on appelle une *fonction radiale* une fonction invariante par les rotations autour de e , c'est-à-dire laissant e fixe. Une fonction radiale f sur la sphère s'écrit $f(x) = g(x.e)$, où g est une fonction sur $[-1, 1]$. Les polynômes $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment donc une base orthonormée des fonctions radiales de carré intégrable :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k J_k(x.e).$$

De même, une *mesure radiale* est une mesure invariante par les rotations autour de e . Parmi ces mesures, distinguons celles qui sont à densité, qui s'écrivent donc $g(x.e) m(dx)$, et les mesures δ_a , $a \in [-1, 1]$, qui sont les mesures uniformes sur les sous-ensembles de $S_{n-1}(1)$ s'écrivant $\{x \in S_{n-1}(1), x.e = a\}$. δ_a est la seule mesure radiale dont la projection sur le diamètre passant par e est la masse de Dirac en a , ce qui justifie la notation. Formellement, elle admet comme densité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} J_k(a) J_k(x.e),$$

comme on peut le voir en intégrant une fonction radiale $g(x.e)$:

$$\begin{aligned} \int_{S_{n-1}(1)} g(x.e) \delta_a(dx) &= \int_{S_{n-1}(1)} g(x.e) \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(a) J_k(x.e) m(dx) \\ &= \int_{S_{n-1}(1)} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i J_i(x.e) \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(a) J_k(x.e) m(dx) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} g_k J_k(a) \\ &= g(a). \end{aligned}$$

Cette écriture formelle peut facilement être justifiée par le fait que l'on puisse approximer la mesure δ_a par des mesures à densité $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} J_k(a) J_k(x)$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Remarquons que si ν est une mesure radiale, y un point de la sphère, on peut définir la mesure $R_y\nu$ comme étant l'image de ν par n'importe quelle rotation amenant e sur y . Cette image ne dépend pas du choix de cette rotation, puisque si R_1 et R_2 sont deux telles rotations, il existe une rotation R autour de e telle que $R_2 = R_1 \circ R$, et ν étant radiale, est stable par R . Bien sûr, si ν a comme densité $g(x.e)$, $R_y\nu$ a comme densité $g(x.y)$. La convolée de deux mesures radiales μ_1 et μ_2 est définie de la façon suivante : si Y est une variable aléatoire de loi μ_2 , alors $\mu_1 * \mu_2$ est définie comme étant la loi de X , où la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est la loi $R_y\mu_1$.

La principale remarque est la suivante : la convolée de deux mesures radiales est radiale. Pour le voir, nous nous restreignons aux mesures à densité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures radiales de densités respectives $f_1(x.e)$ et $f_2(x.e)$. Soit $k(x)$ la densité de $\mu_1 * \mu_2$:

$$k(x) := \int_{S_{n-1}(1)} f_1(x.y) f_2(y.e) m(dy).$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

- k est une fonction radiale.

Pour le voir, nous allons montrer que si R est une rotation autour de e , alors $k(Rx) = k(x)$. Remarquons au préalable que $Re = e$, $x.y = Rx.Ry$, et m est invariante par R . Alors :

$$\begin{aligned} k(Rx) &= \int_{S_{n-1}(1)} f_1(Rx.y) f_2(y.e) m(dy) \\ &= \int_{S_{n-1}(1)} f_1(Rx.Ry) f_2(Ry.e) m(dy) \\ &= \int_{S_{n-1}(1)} f_1(Rx.Ry) f_2(Ry.Re) m(dy) \\ &= \int_{S_{n-1}(1)} f_1(x.y) f_2(y.e) m(dy) \\ &= k(x). \end{aligned}$$

- Le produit de convolution ainsi défini est commutatif.

En effet, notons par $\tilde{k}(x)$ la densité de $\mu_2 * \mu_1$, et soit R une rotation telle que $x = Re$ et $e = Rx$ (nous supposons pour qu'une telle rotation existe que $n \geq 3$) :

$$\begin{aligned}
\tilde{k}(x) &= \int_{S_{n-1}(1)} f_2(x.y) f_1(y.e) m(dy) \\
&= \int_{S_{n-1}(1)} f_2(Rx.Ry) f_1(Ry.Re) m(dy) \\
&= \int_{S_{n-1}(1)} f_2(Rx.y) f_1(y.Re) m(dy) \\
&= \int_{S_{n-1}(1)} f_2(e.y) f_1(y.x) m(dy) \\
&= k(x).
\end{aligned}$$

Nous prolongeons la définition de ce produit de convolution entre deux fonctions, ou entre une mesure et une fonction, par identification d'une fonction avec la mesure dont c'est la densité. (Il est implicite que nous parlons ici de fonctions positives et intégrables par rapport à m).

Calculons maintenant le produit de convolution $\delta_a * \delta_b$. De l'explicitation formelle de δ_a et de δ_b , et en notant par $\delta_{a,b}(x)$ la densité de leur produit de convolution, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\delta_{a,b}(x) &= \sum_{k,j=0}^{+\infty} J_k(a) J_j(b) \int_{S_{n-1}(1)} J_k(x.y) J_j(y.e) m(dy) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(a) J_k(b) \int_{S_{n-1}(1)} J_k(x.y) J_k(y.e) m(dy)
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction $K_k(x) := \int_{S_{n-1}(1)} J_k(x.y) J_k(y.e) m(dy)$ étant radiale, elle s'écrit

$$K_k(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,k} J_i(x.e),$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{i,k} &= \int_{S_{n-1}(1)} K_k(x) J_i(x.e) m(dx) \\
&= \int_{S_{n-1}(1)} \int_{S_{n-1}(1)} J_k(x.y) J_k(y.e) J_i(x.e) m(dx) m(dy)
\end{aligned}$$

d'où $c_{i,k} = 0$ pour $i \neq k$, donc

$$K_k(x) = c_{k,k} J_k(x.e).$$

Or $K_k(e) = \int_{S_{n-1}(1)} [J_k(e.y)]^2 m(dy) = 1$, donc

$$c_{k,k} = \frac{1}{J_k(e.e)} = \frac{1}{J_k(1)},$$

et enfin

$$K_k(x) = \frac{J_k(x.e)}{J_k(1)}.$$

D'où on en conclut que

$$\delta_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(a) J_k(b) \frac{J_k(x.e)}{J_k(1)}, \quad (4.2)$$

et l'on peut remarquer que la mesure $\delta_a * \delta_b$ est bien une mesure à densité, cette densité étant de plus positive (voir par exemple [16]).

D'autre part, un calcul analogue nous permet de montrer que si l'on identifie la fonction $J_k(x.e)$ à la mesure $J_k(x.e) m(dx)$, le produit de convolution $\delta_a * J_k(x.e)$ est une mesure de densité $\frac{J_k(a)}{J_k(1)} J_k(x.e)$.

Donnons nous maintenant une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie positive, telle que $\lambda_0 = 1$, et notons par P l'opérateur qui lui est associé: si g est une fonction radiale de $L^2(S_{n-1}(1), m)$, qui se décompose sur la base des polynômes de Jacobi en $g(x.e) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k J_k(x.e)$, alors

$$P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k J_k(x.e)\right) := \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda_k J_k(x.e)$$

D'où P est un opérateur qui conserve les fonctions radiales positives, et donc par densité, et grâce à l'égalité $\lambda_0 = 1$, il conserve les mesures radiales de probabilité. Notons en particulier $\nu := P(\delta_1)$, dont la densité est donnée, au moins formellement, par la densité

$$h(x.e) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k J_k(1) J_k(x.e).$$

L'existence de cette densité dépend de la valeur effective des λ_k , qui doivent converger assez vite vers 0. Dans le cas contraire, on remplace λ_k par $\lambda_k e^{-t\mu_k}$,

avec $\mu_k = k(k + n - 1)$. La suite $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres du générateur du semigroupe sphérique sur les polynômes de Jacobi. Par composition des opérateurs, l'opérateur associé à la suite $(\lambda_k e^{-t\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est un opérateur positif, de densité bien définie, et l'on se ramène au cas général en faisant tendre t vers 0.

Démontrons que pour toute fonction f de $L^2(S_{n-1}(1), m)$ radiale, c'est-à-dire s'écrivant $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k J_k(x.e)$, alors

$$P(f) = \nu * f.$$

il suffit de le démontrer pour $f(x) = J_i(x.e)$, avec $i \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\begin{aligned} \nu * J_i(x.e) &= \int_{S_{n-1}(1)} h(x.y) J_i(y.e) m(dy) \\ &= \int_{S_{n-1}(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k J_k(1) J_k(x.y) J_i(y.e) m(dy) \\ &= \lambda_i J_i(1) \int_{S_{n-1}(1)} J_i(x.y) J_i(y.e) m(dy) \\ &= \lambda_i J_i(1) K_i(x) \\ &= \lambda_i J_i(1) \frac{J_i(x.e)}{J_i(1)} \\ &= \lambda_i J_i(x.e) \\ &= P(J_i(x.e)), \end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer.

Nous avons donc montré qu'à toute suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie positive telle que $\lambda_0 = 1$ était associée une mesure de probabilité ν sur $S_{n-1}(1)$, que l'on peut identifier à une mesure de probabilité ν sur $[-1, 1]$, qui elle-même s'écrit de façon unique

$$\nu(dx) = \int_{-1}^1 \delta_l(dx) dF(l),$$

avec F fonction croissante bornée sur $[-1, 1]$.

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f_k J_k(x.e) &= \nu * \sum_{k=0}^{+\infty} f_k J_k(x.e) \\
&= \int_{-1}^1 \delta_l * \sum_{k=0}^{+\infty} f_k J_k(x.e) dF(l) \\
&= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k (\delta_l * J_k(x.e)) dF(l) \\
&= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \frac{J_k(l)}{J_k(1)} J_k(x.e) dF(l) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \left[\int_{-1}^1 \frac{J_k(l)}{J_k(1)} dF(l) \right] J_k(x.e),
\end{aligned}$$

et ce pour tout f de $L^2(S_{n-1}(1), m)$. D'où en identifiant terme à terme, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k = \int_{-1}^1 \frac{J_k(l)}{J_k(1)} dF(l) = \int_{-1}^1 R_k(l) dF(l),$$

une implication de l'équivalence (1) de la proposition est donc démontrée.

Pour la réciproque, basons nous sur la représentation intégrale suivante :

$$R_k(x)R_k(y) = \int_{-1}^1 R_k(z) \mu_{x,y}(dz), \quad (4.3)$$

où $\mu_{x,y}(dz)$ est une mesure positive sur $[-1, 1]$. Cette mesure est donnée par la convolution que nous venons de définir. En effet, à partir de l'inégalité 4.2, on vérifie que

$$\mu_{x,y}(dz) = \delta_x * \delta_y(dz).$$

On en déduit que la suite $(R_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est définie positive pour tout $x \in [-1, 1]$, puisque si $\sum_k a_k R_k(y) \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
\sum_k a_k R_k(x)R_k(y) &= \sum_k a_k \int_{-1}^1 R_k(z) \mu_{x,y}(dz) \\
&= \int_{-1}^1 \left[\sum_k a_k R_k(z) \right] \mu_{x,y}(dz) \geq 0.
\end{aligned}$$

On montre alors que la suite $(\int_{-1}^1 R_k(x) dF(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est définie positive par un argument de fermeture de l'ensemble des suites définies positives sur lequel nous ne nous attarderons pas. Le premier rôle est ici joué par l'égalité 4.3, sur laquelle nous reviendrons au cours du chapitre, lorsque nous aborderons la théorie des hypergroupes dans laquelle cette égalité a une place de choix.

4.3 Liens entre le cadre des polynômes de Jacobi et celui des polynômes de Hermite

Nous mettons en évidence, dans ce paragraphe, les liens qui unissent les deux structures de convolution vues dans les sections 4.1 et 4.2. En fait, la première peut être retrouvée à partir de la deuxième par un passage à la limite sur les dimensions des sphères de $\mathbb{R}^n$.

Nous en profitons alors pour en déduire une nouvelle démonstration du théorème de Sarmanov et Bratoeva, qui s'affranchit de toute analyse fine de la structure précise des polynômes de Hermite, en ne gardant que la série génératrice.

4.3.1 Lien entre les deux structures de convolution

Dans le paragraphe précédent, nous avons classifié les opérateurs positifs qui se diagonalisent sur la base $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des polynômes ultrasphériques. Pour cela, nous ne nous sommes servi que de la propriété suivante. En appelant $a_k = \frac{1}{J_k(1)}$, si f a comme composantes $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et g a comme composantes $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on définit $f * g$ par ses composantes $(a_k f_k g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Cette convolution admet alors la représentation

$$f * g(x.e) = \int_{S_{n-1}(1)} f(x.y)g(y.e) m(dy),$$

elle préserve donc la positivité des fonctions, et elle est associative et commutative.

On peut réécrire tout cela sans passer par les sphères, uniquement en se servant de l'espace $[-1, 1]$. Pour cela, il faut se rappeler que la projection de la mesure m sur l'intervalle $[-e, e]$, identifié à $[-1, 1]$, est $\kappa_n(1 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx$, où κ_n est la constante de normalisation. Si t est un point de cet intervalle,

alors c'est la projection d'un point $(t, \sqrt{1-t^2}x_1)$, où x_1 est un point sur la sphère unité de dimension $n-2$. De plus, si x est uniformément distribué sur la sphère de dimension $n-1$, alors x_1 est uniformément distribué sur la sphère de dimension $n-2$. En écrivant de même $y = (s, \sqrt{1-s^2}y_1)$, on a

$$f * g(t) = \int_{-1}^1 \int_{S_{n-2}(1)} f(ts + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-s^2}x_1 \cdot y_1) g(s) \kappa_n(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds \nu(dy_1),$$

où ν est la mesure uniforme sur la sphère de dimension $n-2$, et donc $x_1 \cdot y_1$ est distribuée selon la loi $\kappa_{n-1}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dr$. Finalement, il reste

$$f * g(t) = \kappa'_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(ts + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-s^2}r) g(s) (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} ds dr,$$

où κ'_n est la constante de normalisation. On peut encore réécrire cette dernière formule à l'aide d'un changement de variables,

$$f * g(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r) g(s) K(t, s, r) (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-3}{2}} dr ds, \quad (4.4)$$

avec

$$K(t, r, s) = \kappa'_n \frac{(1-r^2-s^2-t^2+2rst)^{\frac{n-4}{2}}}{(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}} \mathbb{1}_{\{1-r^2-s^2-t^2+2rst \geq 0\}}.$$

On a donc ainsi identifié le noyau $K(r, s, t)$, défini en 4.2 sous la forme d'une série. De ce fait, il nous est possible de voir que cette convolution de deux mesures (que l'on renote $\mu *_{\kappa_n} \nu$ pour exprimer la dépendance en n) converge lorsque n tend vers l'infini vers la convolution multiplicative sur $[-1, 1]$ définie par

$$\int_{-1}^1 f(t) \mu * \nu(dt) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(rs) \mu(dr) \nu(ds).$$

En effet, si l'on pose $\mu(dr) = f(r)(1-r^2)^{\frac{n-3}{2}} dr$ et $\nu(ds) = g(s)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds$, on déduit de 4.4 l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 h(t) \mu *_{\kappa_n} \nu(dt) = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(t) f(r) g(s) K(r, s, t) (1-r^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} dr ds \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(t) \kappa'_n \left[1 - \frac{(t-rs)^2}{(1-r^2)(1-s^2)} \right]^{\frac{n-4}{2}} \mathbb{1}_A \frac{\mu(dr)\nu(ds)}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}} dt$$

avec $A = \{1 - r^2 - s^2 - t^2 + 2rst \geq 0\} = \{(1-s^2)(1-t^2) \geq (t-rs)^2\}$.

Pour r et s fixés, la suite de mesures à support inclus dans A compact de densité

$$\xi(t) = \left\{ \kappa'_n \left[1 - \frac{(t-rs)^2}{(1-r^2)(1-s^2)} \right]^{\frac{n-4}{2}} \mathbb{1}_A \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

tend vers la mesure de Dirac en $t = rs$, car c'est la seule valeur de t pour laquelle la densité ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. Si l'on remarque de plus que

$$\int_{-1}^1 \xi(t) dt = \sqrt{(1-r^2)}\sqrt{(1-s^2)} \left[\int_{-1}^1 \kappa'_n(1-u^2)^{\frac{n-4}{2}} du \right]$$

en ayant posé $u = \frac{t-rs}{(1-r^2)(1-s^2)}$, on en déduit le résultat escompté.

Nous avons ainsi interprété la structure de convolution mise en évidence dans la caractérisation du noyau markovien dans le cadre des polynômes de Hermite, en passant par la convolution sur les sphères dans le cadre des polynômes de Jacobi.

4.3.2 Une autre démonstration du théorème de Sarmanov-Bratoeva

Si l'on pousse jusqu'au bout la retranscription dans le cadre Hermite de la caractérisation des valeurs propres d'un opérateur positif symétrique dans le cadre Jacobi, on arrive, certes avec plus de calculs et de difficultés techniques, à redémontrer la proposition 2. Nous en donnons ici les étapes principales.

Nous avons vu que $P(f) = P(\delta_1) * f$ est la représentation des opérateurs se diagonalisant sur la base des polynômes ultrasphériques. Si l'on veut faire la même chose avec les polynômes de Hermite par passage à la limite, on tombe immédiatement sur la difficulté suivante : $a_k \rightarrow 0$.

Pour obtenir quand même quelque chose, on se réfère à la formule précédente de définition de la convolution, qui envoie deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ en une fonction définie sur $[-1, 1]$:

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(ty_1 + \sqrt{1-t^2}y_2) g(y_1) \gamma(dy_1) \gamma(dy_2),$$

où γ est la mesure gaussienne standard. On définit ainsi , pour $t \in [-1, 1]$, l'opérateur

$$P_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(tx + \sqrt{1-t^2}y) \gamma(dy),$$

et la convolée d'une mesure sur $[-1, 1]$ avec une fonction sur $\mathbb{R}$:

$$\mu * f = \int_{-1}^1 P_t(f) \gamma(dt).$$

Il ne reste alors qu'à montrer que, si P est un opérateur préservant la positivité, il s'écrit $\mu * f$, où μ est positive. On n'aura alors, en définissant $P^*(\mu)$ par

$$P^*(\mu) * f := \mu * P(f),$$

qu'à écrire

$$P(f) = P^*(\delta_1) * f,$$

et c'est la représentation cherchée. En fait, c'est la définition même de $P^*(\mu)$ qui pose problème. Nous ne sommes pas sûr de l'existence de l'objet ainsi défini, alors que l'existence dans le cas des polynômes de Jacobi était automatiquement obtenue par la dualité ordinaire entre fonctions et mesures $\langle P(\mu), f \rangle = \langle \mu, P(f) \rangle$, pour ensuite établir la formule $P^*(\mu) * f = \mu * P(f)$, à partir du cas des fonctions intégrables.

Pour dépasser cet obstacle, remarquons simplement qu'il suffit de définir la mesure $P^*(\delta_1)$: en suivant le schéma d'approximation par les polynômes ultrasphériques, nous constatons alors que cette mesure est formellement $P(\delta_\infty)$, ramenée par homothétie à l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui pose quelques difficultés de définition. Nous définissons donc une suite de mesures μ_N sur $[-1, 1]$ par la formule suivante : on tronque $P(\delta_N)$ sur l'intervalle $[-N, N]$, en posant, pour A borélien de $\mathbb{R}$,

$$\nu_N(A) := \frac{P(\delta_N)(A \cap [-N, N])}{P(\delta_N)([-N, N])},$$

et on ramène cette mesure par homothétie sur $[-1, 1]$: si h_N est l'homothétie sur $\mathbb{R}$ de centre 0 et de rapport N , alors pour A borélien de $[-1, 1]$,

$$\mu_N(A) := \nu_N(h_N(A)).$$

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que cette suite de mesures μ_N converge vers une mesure μ dont les moments sont les valeurs propres $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de

l'opérateur P . Pour cela, et puisque $[-1, 1]$ est compact, montrons alors que si une sous-suite (que l'on continue à noter μ_N par commodité) converge étroitement vers μ , alors les moments de μ sont $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On écrit alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{H_k(xN)}{N^k} \mu_N(dx) = \int_{-1}^1 x^k \mu(dx),$$

car H_k étant un polynôme de degré k , $\frac{H_k(xN)}{N^k} \rightarrow x^k$ uniformément sur $[-1, 1]$, ce qui permet alors d'utiliser simplement la convergence des moments de μ_N vers ceux de μ .

Puis on utilise la définition de μ_N pour écrire

$$\int_{-1}^1 \frac{H_k(xN)}{N^k} \mu_N(dx) = \int_{-N}^N \frac{H_k(x)}{N^k} \nu_N(dx),$$

Puis on écrit que

$$\int_{-N}^N \frac{H_k(x)}{N^k} \nu_N(dx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H_k(x)}{N^k} P(\delta_N)(dx) - \epsilon(N),$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon(N) &= \int_{[-N, N]^c} \frac{H_k(x)}{N^k} P(\delta_N)(dx) \\ &= \int_{[-N, N]^c} \frac{H_k(x)}{N^k} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_i}{i!} H_i(N) H_i(x) \gamma(dx) \\ &= \int_{[-N, N]^c} \frac{H_k(x)}{N^k} K(x, N) \gamma(dx), \end{aligned}$$

avec $K(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_i}{i!} H_i(x) H_i(y)$.

Montrons que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon(N) = 0$.

Nous le montrons d'abord dans le cas où $c_k \leq ce^{-kt}$, pour un certain $t > 0$, avec c constante positive. Le résultat sur le cas général en est ensuite déduit en remplaçant c_k par $c'_k = c_k e^{-kt}$. L'opérateur associé à la suite $(c'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un opérateur positif par composition des opérateurs positifs, puis on passe à la limite quand $t \rightarrow 0$.

Dans le cas où $c_k \leq ce^{-kt}$, on a :

$$\begin{aligned} K(x, N) &\leq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{c_k}{i!}\right)^2 H_k^2(x)} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{c_k}{i!}\right)^2 H_k^2(N)} \\ &\leq c^2 \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-2kt} H_k^2(x)} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-2kt} H_k^2(N)} \\ &\leq c^2 \sqrt{P_{2t}(x, x)} \sqrt{P_{2t}(N, N)} \end{aligned}$$

où $P_t(x, y)$ est le noyau d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire :

$$P_t(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-kt} H_k(x) H_k(y),$$

et de 1.5, on tire

$$P_{2t}(x, y) = \sqrt{1 - \rho^2} e^{-\frac{(y-x\rho)^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{y^2}{2}},$$

en ayant posé $\rho = e^{-2t}$. D'où

$$\sqrt{P_{2t}(x, x)} = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \epsilon(N) &\leq c^2 \sqrt{P_{2t}(N, N)} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_k(y)}{N^k} \mathbb{1}_{[-N, N]^c} \sqrt{P_{2t}(y, y)} \gamma(dy) \\ &\leq c^2 (1 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{N^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_k(y)}{N^k} \mathbb{1}_{[-N, N]^c} e^{\frac{y^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \gamma(dy) \end{aligned}$$

Or k étant fixé, on peut majorer $H_k(y)$ par $c'y^k$; d'où

$$\epsilon(N) \leq c' c^2 (1 - \rho^2)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{N^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \int_{\mathbb{R}} \frac{y^k}{N^k} \mathbb{1}_{[-N, N]^c} e^{\frac{y^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \gamma(dy),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y^k}{N^k} \mathbb{1}_{[-N, N]^c} e^{\frac{y^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \gamma(dy) = 2 \int_N^{+\infty} \frac{y^k}{N^k} e^{\frac{y^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \gamma(dy).$$

On pose $u = y - N$, et pour $N > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_N^{+\infty} \frac{y^k}{N^k} e^{\frac{y^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} \gamma(dy) &= \int_N^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{N}\right)^k e^{\frac{(u+N)^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho}} e^{-\frac{(u+N)^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq \int_N^{+\infty} (1+u)^k e^{-\frac{(u+N)^2}{2} \frac{1}{1+\rho}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq e^{-\frac{N^2}{2} \frac{1}{1+\rho}} \int_N^{+\infty} (1+u)^k e^{-\frac{u^2}{2} \frac{1}{1+\rho}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

On en déduit enfin que

$$\epsilon(N) \leq C(\rho, k) e^{\frac{N^2}{2} \frac{\rho}{1+\rho} - \frac{N^2}{2} \frac{1}{1+\rho}} = C(\rho, k) e^{-\frac{N^2}{2} \frac{1-\rho}{1+\rho}},$$

et comme $\rho = e^{-2t} < 1$, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon(N) = 0.$$

Enfin, on écrit que, par définition,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{H_k(x)}{N^k} P(\delta_N)(dx) = \frac{P(H_k)(N)}{N^k} = c_k \frac{H_k(N)}{N^k},$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} c_k \frac{H_k(N)}{N^k} = c_k,$$

d'où nous en déduisons l'égalité recherchée :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \int_{-1}^1 x^k \mu(dx).$$

Le pivot des démonstrations de cette section est de façon évidente constitué par cette structure de convolution sur les mesures de l'intervalle $[-1, 1]$, que l'on retrouve aussi par exemple dans [8], [9], [17], etc.

Cette convolution s'insère dans un structure algébrique plus large, que sont les hypergroupes polynomiaux, dont l'intervalle $[-1, 1]$ muni de la mesure $K(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ et associé à la famille des polynômes de Jacobi constitue un exemple. Nous présentons, dans la section suivante, la théorie des hypergroupes, et nous verrons en quoi elle peut s'appliquer aux préoccupations nous concernant, et où se situent d'autre part les limites de ses applications.

4.4 Structure d'hypergroupe associée aux polynômes de Jacobi

Nous présentons, très succinctement, dans un premier temps le cadre général de la théorie des hypergroupes, puis nous nous intéressons plus particulièrement aux hypergroupes polynomiaux, pour voir ensuite en quoi cet outil algébrique est intéressant pour notre étude. La référence dans le domaine des probabilités sur les hypergroupes est le livre de H. Bloom et H. Heyer ([7]), dont nous nous sommes inspiré pour cette présentation.

4.4.1 Hypergroupes : notions générales

Définition

Nous utiliserons les notations suivantes : si K est un espace de Hausdorff localement compact, nous notons par $\mathcal{B}(K)$ l'ensemble des fonctions boréliennes de K , par $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K , par $\mathcal{C}_c(K)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact, par $\mathcal{M}(K)$ l'ensemble des mesures de Radon sur K , et parmi celles-là, $\mathcal{M}(K)$ l'ensemble des mesures de Radon bornées, $\mathcal{M}_+(K)$ l'ensemble des mesures de Radon positives, et enfin $\mathcal{M}^1(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur K .

Définition 4 Soit K un espace de Hausdorff non vide localement compact. Le triplet $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ est appelé hypergroupe si les conditions suivantes sont vérifiées :

HG1 L'espace vectoriel $(\mathcal{M}^b(K), +)$ admet une loi de composition interne $*$ qui en fait une algèbre,

HG2 étant donnés $x, y \in K$, $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$ et $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ est compact,

HG3 l'application $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ de K^2 dans $\mathcal{M}^1(K)$ est continue,

HG4 l'application $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ de K^2 dans l'ensemble des parties compactes de K (muni de la topologie de Michael) est continue,

HG5 il existe un élément (forcément unique) $e \in K$ tel que

$$\forall x \in K, \quad \delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x,$$

HG6 il existe une involution unique $x \mapsto x^-$ dans K telle que

$$\forall x, y \in K, \quad (\delta_x * \delta_y)^- = \delta_{y^-} * \delta_{x^-},$$

où si $\mu \in \mathcal{M}(K)$, μ^- est l'image de μ par l'involution,

HG7 Si $x, y \in K$, $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) \Leftrightarrow x = y^-$.

De plus, un hypergroupe est dit *commutatif* si l'algèbre $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ l'est, et *hermitien* si l'involution est l'identité. (Remarquons que HG6 dit que tout hypergroupe hermitien est commutatif).

Nous avons ainsi défini la structure complète de l'hypergroupe. En effet, si μ et ν sont deux éléments de $\mathcal{M}^b(K)$, alors

$$\mu * \nu := \int_K \int_K \delta_x * \delta_y \mu(dx) \nu(dy),$$

c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{C}_c(K)$,

$$\int_K f \mu * \nu = \int_K \int_K \left(\int_K f \delta_x * \delta_y \right) \mu(dx) \nu(dy).$$

Translation et convolution

On définit, pour $f \in \mathcal{B}(K)$, $x, y \in K$, la translation de f de la manière suivante :

$$f_y : x \mapsto f(x * y) := \int_K f \delta_x * \delta_y.$$

Remarques :

- “ $x * y$ ” n’a pas de signification propre.
- On peut réécrire la définition de la convolution entre deux mesures avec

$$\int_K f \mu * \nu := \int_K \int_K f(x * y) \mu(dx) \nu(dy)$$

On peut définir alors le produit de convolution entre une fonction $f \in \mathcal{B}(K)$ et une mesure $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ par :

$$(\mu * f)(x) := \int_K f(y^- * x) \mu(dy),$$

$$(f * \mu)(x) := \int_K f(x * y^-) \mu(dy).$$

Mesures invariantes

Définition 5 Une mesure non nulle $\omega \in \mathcal{M}_+(K)$ est appelée invariante à gauche ou une mesure de Haar à gauche, si

$$\forall x \in K, \forall f \in \mathcal{C}_c(K), \quad \int_K f d(\delta_x * \omega) = \int_K f d\omega.$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

Proposition 4 *Si ω est invariante à gauche, alors $\text{supp}(\omega) = K$.*

Proposition 5 *Tout hypergroupe commutatif admet une mesure de Haar à gauche.*

Proposition 6 *Tout hypergroupe compact K admet une mesure de Haar à gauche, qui est aussi une mesure de Haar à droite (K est dit unimodulaire).*

Dorénavant, nous supposons que K est un hypergroupe commutatif, et nous notons ω_K sa mesure de Haar à gauche.

Convolution de fonctions, fonctions multiplicatives

Soient deux fonctions f et $g \in \mathcal{B}(K)$, dont l'une au moins est σ -finie, alors on définit leur produit de convolution de la façon suivante :

$$f * g := \int_K f(x * y)g(y^-) \omega_K(dy).$$

Introduisons de plus les définitions suivantes :

Définition 6 *Une fonction mesurable χ à valeurs dans $\mathbb{C}$ localement bornée sur K est dite multiplicative, si*

1. $\chi(e) = 1$,
2. $\forall x, y \in K, \quad \chi(x * y) = \chi(x)\chi(y)$.

De plus, si $\forall x \in K, \quad \chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$, alors χ est appelée un semi-caractère. Un semi-caractère borné est appelé un caractère.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour définir le dual d'un hypergroupe commutatif.

Dual d'un hypergroupe commutatif, transformée de Fourier

Notons par $K^\wedge$ l'ensemble des caractères de K . $K^\wedge$ est appelé le *dual* de K .

Définition 7 Soit $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$, la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est définie sur $K^\wedge$ par :

$$\hat{\mu}(\chi) := \int_K \bar{\chi} d\mu.$$

Soit $f \in L^1(K)$, on définit de même

$$\hat{f}(\chi) := \int_K f \bar{\chi} d\omega_K.$$

Comme dans le cadre usuel, nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 7 1. Si K est discret, alors $K^\wedge$ est compact.

2. Si K est compact, alors $K^\wedge$ est discret.

Proposition 8 Il existe une mesure positive π_K sur $K^\wedge$ telle que

$$\forall f \in L^1(K) \cap L^2(K), \quad \int_K |f|^2 d\omega_K = \int_{K^\wedge} |\hat{f}|^2 d\pi_K$$

La mesure π_K ainsi définie est appelée *mesure de Plancherel* de l'hypergroupe K . On peut aussi montrer que celle-ci est unique. La proposition précédente peut aussi être écrite sous sa forme polarisée :

Proposition 9 Soient $f, g \in L^1(K) \cap L^2(K)$, alors

$$\int_K f \bar{g} d\omega_K = \int_{K^\wedge} \hat{f} \bar{\hat{g}} d\pi_K.$$

Nous sommes alors en mesure de définir la transformée de Fourier sur $L^2(K)$ tout entier par densité.

Introduisons à présent la notion d'hypergroupe dual :

Définition 8 Un hypergroupe commutatif K est dit fort si $K^\wedge$ est un hypergroupe. Dans le cas où $K^{\wedge\wedge} := (K^\wedge)^\wedge$ est un hypergroupe, alors K est dit de Pontryagin.

Proposition 10 *Soit K un hypergroupe fort. Pour tout $x \in K$, on définit $\tilde{x} \in K^\wedge$ par $\tilde{x}(\chi) = \overline{\chi(x)}$. Soit $K^\sim := \{\tilde{x}, x \in K\}$. Alors :*

1. π_K est une mesure de Haar sur $K^\wedge$, et $\text{supp}(\pi_K) = K^\wedge$.
2. L'application $j : x \mapsto \tilde{x}$ est un homéomorphisme de K sur $K^\sim$ sous-espace fermé de $K^{\wedge\wedge}$.
3. La mesure $\tilde{\omega} := \int_K \delta_{\tilde{x}} \omega_K(dx)$ est la mesure de Plancherel sur $K^{\wedge\wedge}$ associée à π_K .
4. Si de plus K est de Pontryagin, alors $K^{\wedge\wedge}$ est isomorphe à K .

Après l'énoncé succinct des bases de la théorie des hypergroupes, nous nous intéressons plus particulièrement à une classe d'hypergroupes commutatifs, appelés hypergroupes polynomiaux, que nous définissons et étudions au paragraphe suivant.

4.4.2 Hypergroupes polynomiaux

Nous définissons d'abord le cadre général des hypergroupes polynomiaux à plusieurs variables, qui introduit le lien entre la formule de linéarisation du produit de deux polynômes et la structure de convolution. Ensuite, nous nous focaliserons sur les hypergroupes polynomiaux à une seule variable, et nous ferons enfin le lien avec les différents exemples étudiés tout au long de ce chapitre.

Hypergroupes polynomiaux à plusieurs variables

Soit K un ensemble dénombrable muni de la topologie discrète, soit $d \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble $\{Q_x, x \in K\}$ de polynômes sur $\mathbb{C}^d$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $\mathcal{P}^n$ l'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_d]$ avec $d^\circ(Q) \leq n$, et $K_n := \{x \in K, Q_x \in \mathcal{P}^n\}$. On suppose que

(P1) $\forall n \in \mathbb{N}, \{Q_x, x \in K_n\}$ est une base de $\mathcal{P}^n$.

Alors pour tout x et y de K , le produit $Q_x Q_y$ admet la représentation unique

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w.$$

Définition 9 Un hypergroupe $(K, *)$ est appelé un hypergroupe polynomial (à d variables) s'il existe une famille $\{Q_x, x \in K\}$ vérifiant (P1) tel que pour tout x et tout y de K , la convolution $\delta_x * \delta_y$ soit définie par

$$\forall w \in K, \quad \delta_x * \delta_y(\{w\}) := c(x, y, w).$$

Proposition 11 Soit $(K, *)$ un hypergroupe polynomial. Alors

1. L'ensemble K^* des semi-caractères de K coïncide avec l'ensemble

$$\{\chi_z, z \in \mathbb{C}^d\},$$

où pour $x \in K$, $\chi_z(x) := Q_x(z)$.

2. Via l'identification de χ_z avec z , l'ensemble $\mathcal{Y}_b(K)$ des fonctions multiplicatives bornées de K est homéomorphe à

$$\{z \in \mathbb{C}^d, \forall x \in K, \quad |Q_x(z)| \leq 1\}.$$

3. Le dual $K^\wedge$ de K est homéomorphe à l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^d, \forall x \in K, \quad |Q_x(z)| \leq 1, \quad Q_{x^-}(z) = \overline{Q_x(z)}\}.$$

De plus, les hypergroupes polynomiaux admettent une normalisation au sens suivant :

$$(P2) \quad \exists z_0 \in \mathbb{C}^d, \text{ tel que } \forall x \in K, \quad Q_x(z_0) = 1.$$

Ceci vient du fait que le caractère unité $\mathbb{1} = \mathbb{1}_K$ de K correspond à un certain élément de $\mathbb{C}^d$. Dans ce cas, on dit de l'hypergroupe polynomial qu'il admet un point normalisateur z_0 .

De façon à caractériser les hypergroupes polynomiaux en termes de polynômes orthogonaux, on introduit deux propriétés supplémentaires. Soit $\pi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{C}^d)$:

$$(P3) \quad \forall x \in K, \quad \exists x^- \in K \text{ tel que } \forall z \in \text{supp}(\pi), \quad Q_{x^-} = \overline{Q_x(z)}$$

$$(P4) \quad \forall x, y, w \in K, \quad \int_{\mathbb{C}^d} Q_x Q_y Q_w d\pi \geq 0.$$

Proposition 12 Soit $\{Q_x, x \in K\}$ un ensemble de polynômes sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant (P1) et orthogonaux sur $L^2(\mathbb{C}^d, \pi)$. Alors K est un hypergroupe polynomial défini par $\{Q_x, x \in K\}$ si et seulement si les propriétés (P2), (P3) et (P4) sont satisfaites.

Hypergroupes polynomiaux à une variable

Pour plus de clarté, retranscrivons dans le cas des polynômes d'une seule variable les conditions requises à une famille de polynômes orthogonaux pour former un hypergroupe polynomial.

Soit une famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n \in \mathbb{R}[x], \quad d^\circ Q_n = n,$
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n(x_0) = 1,$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}, Q_m Q_n = \sum_{k=0}^{+\infty} c(m, n, k) Q_k$ avec $\forall m, n, k \in \mathbb{N}, c(m, n, k) \geq 0.$

Alors la convolution

$$\delta_m * \delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} c(m, n, k) \delta_k$$

s'étend en une convolution sur $\mathcal{M}^b(\mathbb{N})$ pour en faire un hypergroupe polynomial d'une variable, d'espace dual

$$\mathbb{N}^* := \{\chi_x, x \in \mathbb{R}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |Q_n(x)| < +\infty\},$$

où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi_x(n) := Q_n(x).$

Proposition 13 *Soit $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes dans $\mathbb{R}[x]$ orthogonaux par rapport à $\pi \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R})$ de support infini, avec $Q_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d^\circ(Q_n) = n$. Si $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :*

$$Q_m Q_n = \sum_{k=0}^{m+n} c(m, n, k) Q_k$$

avec $\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, \dots, m+n, \quad c(m, n, k) \geq 0,$ et

$$\sum_{k=0}^{m+n} c(m, n, k) = 1,$$

alors il existe une convolution $*$ sur $\mathcal{M}^b(\mathbb{N})$ définie par

$$\delta_m * \delta_n = \sum_{k=0}^{m+n} c(m, n, k) \delta_k,$$

faisant de $(\mathbb{N}, *)$ un hypergroupe polynomial dont 0 est l'élément neutre et d'involution l'identité. De plus, $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n(x_0) = 1.$

4.4.3 Application aux polynômes de Jacobi et aux polynômes de Hermite

Examinons à présent l'application de ces propriétés des hypergroupes polynomiaux aux familles de polynômes orthogonaux qui nous intéressent, c'est-à-dire celles de Jacobi et de Hermite.

Soit $V := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \geq \beta > -1 \text{ et } (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 4) \geq (\alpha - \beta)^2[(\alpha + \beta + 1)^2 - 7(\alpha + \beta + 1) - 24]\}$. Lorsque $(\alpha, \beta) \in V$, la famille $(J_k^{\alpha, \beta})_{k \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Jacobi font de $(\mathbb{N}, *)$ un hypergroupe polynomial, où le produit de convolution $*$ est défini par les coefficients de linéarisation comme à la définition 9.

L'espace dual correspondant est $\mathbb{N}^* = [-1, 1]$, muni de la mesure de Plancherel $\pi_{\mathbb{N}}(dx) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta(dx)$.

De plus, si $\hat{V} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \geq \beta > -1 \text{ et soit } \beta \geq \frac{1}{2}, \text{ soit } \alpha + \beta \geq 0\}$, alors on peut définir le produit de convolution $\delta_x \hat{*} \delta_y$ sur $\mathcal{M}^1([-1, 1])$ suivant :

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad J_k^{\alpha, \beta}(x) J_k^{\alpha, \beta}(y) = \int_{-1}^1 J_k^{\alpha, \beta}(z) (\delta_x \hat{*} \delta_y)(dz).$$

C'est cette mesure $\delta_x \hat{*} \delta_y$ positive sur $[-1, 1]$, que l'on a identifiée (à une normalisation près) à la mesure $K(x, y, z) m(dz)$, et c'est le produit de convolution $\hat{*}$ qui a constitué la clé de voûte de tout ce chapitre. Nous avons donc abondamment utilisé le fait que la famille des polynômes de Jacobi fait de $(\mathbb{N}, *)$ un hypergroupe de Pontryagin.

En ce qui concerne la famille des polynômes de Hermite, on peut démontrer facilement que les coefficients de linéarisation sont positifs, à partir de la série génératrice

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k H_k(x).$$

En effet, si l'on fait le produit de deux telles fonctions de t et de s , on

obtient la série double

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} t^i s^j H_i(x) H_j(x) &= e^{tx - \frac{t^2}{2}} e^{sx - \frac{s^2}{2}} \\
&= e^{(t+s)x - \frac{(t+s)^2}{2} + st} \\
&= e^{st} \sum_{k=0}^{+\infty} (s+t)^k H_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{s^m t^m}{m!} (s+t)^k \right] H_k(x),
\end{aligned}$$

et l'identification des termes de chaque série, quoiqu'un peu fastidieuse, nous montre que

$$H_i(x) H_j(x) = \sum_{k=0}^{i+j} c(i, j, k) H_k(x),$$

avec les $c(i, j, k) \geq 0$.

Malheureusement, ils ne forment pas pour autant un hypergroupe de Pontryagin, et la théorie des hypergroupes dans ce cas ne peut nous fournir l'équivalent de la mesure $\delta_x \hat{*} \delta_y$ pour les polynômes de Jacobi, bien que celle-ci ait permis un passage à la limite utilisable pour le cadre Hermite.

Chapitre 5

Caractérisation des semigroupes de Markov sur $\mathbb{R}$ associés aux polynômes de Hermite

Nous sommes enfin en mesure de présenter une caractérisation des semigroupes de Markov associés à la famille des polynômes de Hermite par l'intermédiaire de leurs valeurs propres sur cette base de polynômes orthogonaux. Ce chapitre est presque intégralement formé de l'article [30], c'est pourquoi il peut y avoir quelques redondances de définition, et des différences de notation.

Remarquons au préalable que la proposition 3 qui caractérise les noyaux markoviens dans le cadre des polynômes de Jacobi admet une version sur les semigroupes, que l'on peut trouver dans [9] ou dans [17], et qui est la suivante :

Proposition 14 *La suite $(e^{-\lambda(k)t})_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres d'un semigroupe de Markov sur la base de vecteurs propres des polynômes de Jacobi $(J_k^{\alpha, \beta})_{k \in \mathbb{N}}$, si et seulement si :*

$$\lambda(k) = \sigma k(k + \alpha + \beta + 1) + d \int_{-1}^1 \frac{1 - R_k(x)}{1 - x} \nu(dx),$$

avec $\sigma \geq 0$, $d \geq 0$ et ν mesure de probabilité sur $[-1, 1]$ sans masse en 1.

Cette formule est clairement de type Lévy-Khintchine, et nous nous proposons d'en démontrer l'exacte analogue dans le cadre des polynômes de Hermite. Nous nous servons pour cela de la proposition 2, longuement présentée dans le chapitre précédent.

Nous examinons ensuite plus précisément cette nouvelle formule sous ses divers aspects. Dans le cas où la “mesure de saut” est de masse finie, nous donnons une description du processus associé au semigroupe markovien, pour l'exprimer en terme du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et du processus du signe que nous définissons au préalable. Nous donnons enfin une interprétation géométrique des sauts du processus par projection de sphères de $\mathbb{R}^n$ et passage à la limite sur les dimensions.

5.1 Présentation du résultat

Le but de ce travail est de décrire tous les processus de Markov réversibles sur $\mathbb{R}$ admettant les polynômes de Hermite comme décomposition spectrale (dans un sens que nous allons détailler ci-dessous). L'origine de cette étude vient du problème de la classification des processus de Markov associés à des familles de polynômes orthogonaux : lorsque l'on dispose d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle) admettant des moments exponentiels, on lui associe une base naturelle de polynômes orthogonaux. La question se pose alors de savoir s'il existe un processus de Markov associé à cette famille, en ce sens que les polynômes de la famille représentent la décomposition spectrale du générateur du processus : il y a de nombreux exemples de cette situation, dont le plus célèbre est sans doute le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, associé aux polynômes de Hermite. Nous ne connaissons pas de réponse générale à cette question, mais nous avons traité dans [29] le cas des diffusions; nous obtenons alors une classification assez simple, dans laquelle apparaissent, outre le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les processus de diffusion associés aux polynômes de Laguerre et de Jacobi. La question qui apparaît alors est la description de tous les processus de Markov associés à ces différentes familles; mais alors que le cas des processus de Jacobi a été entièrement résolu ([17]), il semble qu'il n'en est pas de même avec le cas des polynômes de Hermite, qui sont pourtant ceux qui présentent le plus d'intérêt sur le plan probabiliste.

Dans ce qui suit, nous allons établir une formule de type Lévy-Khintchine pour les générateurs de tels semigroupes, et mettre en évidence le rôle joué par deux semigroupes particuliers : le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck et

le semigroupe du signe, qui permettent de représenter tous les autres par subordination.

Considérons l'espace probabilisé $E = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ensemble des réels muni de la tribu borélienne et de la mesure gaussienne standard

$$\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Dans la suite, nous noterons $\langle f, g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ et $\langle f \rangle$ l'intégrale de la fonction f , c'est-à-dire $\langle f, 1 \rangle$. Les polynômes de Hermite $(H_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ sont définis par leur série génératrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} H_k(x) = e^{tx - \frac{t^2}{2}}.$$

On vérifie aisément que cette famille forme une base orthogonale de l'espace $L^2(E, \gamma)$.

On s'intéresse dans ce qui suit aux semigroupes de Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ associés à cette famille dans le sens suivant :

- Pour tout $t \geq 0$, P_t est un opérateur linéaire borné sur $L^2(E, \gamma)$;
- $P_t 1 = 1$, et si f est une fonction positive de $L^2(E, \gamma)$, alors $P_t f$ est positive (propriété de Markov) ;
- Il existe une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, P_t H_k(x) = e^{-\lambda(k)t} H_k(x)$.

On se propose de décrire entièrement de telles suites $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Commençons par donner deux exemples fondamentaux :

- Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck : $\lambda_k = k$. Dans ce cas, P_t est le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, donné par

$$\begin{aligned} P_t(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \gamma(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2 - 2e^{-t}xy + x^2}{e^{-2t} - 1}}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} dy. \end{aligned}$$

La définition montre immédiatement qu'il a la propriété de positivité. Pour voir que $\lambda_k = k$, il suffit d'appliquer la formule de définition des polynômes de Hermite par la série génératrice :

Posons $f(x) = e^{sx - \frac{s^2}{2}}$, alors

$$\begin{aligned}
P_t f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{s(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)} \gamma(dy) \\
&= e^{se^{-t}x - \frac{s^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{s\sqrt{1-e^{-2t}}y} \gamma(dy) \\
&= e^{se^{-t}x - \frac{s^2}{2}} e^{\frac{s^2}{2}(1-e^{-2t})} \\
&= e^{se^{-t}x - \frac{s^2}{2}e^{-2t}}
\end{aligned}$$

En identifiant les deux séries, il vient immédiatement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad P_t(H_k) = e^{-kt} H_k.$$

- Le processus du signe : $\lambda_k = (1 - (-1)^k)$. Son semigroupe est donné par

$$P_t f(x) = \frac{1 + e^{-2t}}{2} f(x) + \frac{1 - e^{-2t}}{2} f(-x),$$

ce qui se voit directement par des conditions de parité sur H_k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, H_{2k}(-x) = H_{2k}(x) \text{ et } H_{2k+1}(-x) = -H_{2k+1}(x).$$

Le processus proprement dit s'écrit $X_t = \epsilon_t X_0$ avec $\epsilon_t \in \{-1, 1\}$.

Quelques remarques :

- On remarque immédiatement sur la définition que $P_t \circ P_s = P_{t+s}$, $P_0 = Id$ (propriété de semigroupe);
de plus, puisque P_t se diagonalise dans une base orthonormée, P_t est un opérateur auto-adjoint.
- Puisque $H_0 = 1$, la condition $P_t 1 = 1$ est équivalente à $\lambda_0 = 0$.
- Puisque $P_t(1) = 1$ et que P_t est auto-adjoint, on a

$$\langle P_t(f) \rangle = \langle P_t(f), 1 \rangle = \langle f, P_t(1) \rangle = \langle f \rangle.$$

La mesure γ est donc invariante pour P_t .

– Nous avons, pour toute constante a et toute fonction f de $L^2(\gamma)$,

$$P_t(f - a)^2 = P_t(f^2) - 2aP_t(f) + a^2 \geq 0,$$

et donc $P_t(f^2) \geq P_t(f)^2$. De ceci et de la remarque précédente, nous déduisons que, pour tout k ,

$$\exp(-2\lambda_k t) \langle H_k, H_k \rangle = \langle P_t(H_k), P_t(H_k) \rangle \leq \langle P_t(H_k^2) \rangle = \langle H_k^2 \rangle.$$

Nous voyons donc que nécessairement $\lambda_k \geq 0$, et donc que l'hypothèse que P_t est bornée est superflue, et apparaît comme une conséquence de la positivité et de l'invariance.

La résultat principal exposé ci-dessous est le suivant :

Proposition 15 *Sous les hypothèses précédentes, il existe des constantes θ et c positives, et ν une mesure de probabilité sur $[-1, 1]$ sans masse au point 1, telles que*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda(k) = \theta k + c \int_{-1}^1 \frac{1 - s^k}{1 - s} \nu(ds).$$

5.1.1 Démonstration

Première étape :

Notons $\mathcal{M}^1(I)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe de Markov sur $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ admettant comme valeurs propres sur la base de vecteurs propres des polynômes de Hermite la famille $(e^{-t\lambda(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, alors la proposition 2 vue à la section 4.1, traduite sur cette famille $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ particulière, nous montre qu'il existe une famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}^1([-1, 1])$, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad e^{-t\lambda(k)} = \int_{-1}^1 x^k \mu_t(dx).$$

En d'autres termes, pour tout $t \geq 0$, les fonctions $k \mapsto e^{-t\lambda(k)}$ sont des éléments de l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, \exists \mu \in \mathcal{M}^1([-1, 1]), \forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = \int_{-1}^1 x^k \mu(dx)\}.$$

Définissons de plus l'ensemble

$$\mathcal{L} = \{\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, \forall t \geq 0, \quad k \mapsto e^{-\lambda(k)t} \in \mathcal{P}\}.$$

Remarques :

- Si $\lambda \in \mathcal{L}$, alors $\lambda(0) = 0$. La seule fonction constante est donc la fonction identiquement nulle.
- A tout élément λ de $\mathcal{L}$ est associée une famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}^1([-1, 1])$ vérifiant l'égalité

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad e^{-\lambda(k)t} = \int_{-1}^1 x^k \mu_t(dx). \quad (5.1)$$

Cette famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe de convolution, où la convolution $*$ est définie de la façon suivante :

Pour $m \in \mathcal{M}^1([-1, 1])$, $n \in \mathcal{M}^1([-1, 1])$, $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{-1}^1 f(x) (m * n)(dx) = \int_{-1}^1 f(xy) m(dx) n(dy).$$

- La convergence simple des éléments de $\mathcal{L}$ est associée à la convergence étroite des mesures correspondantes. Partant, on vérifie facilement que $\mathcal{L}$ est un cône fermé pour la convergence simple. En effet, soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ convergeant simplement vers λ . A chaque λ_n est associée une famille $(\mu_t^n)_{t \geq 0}$ de mesures de probabilité sur $[-1, 1]$ telle que

$$\forall t \geq 0, \quad e^{-\lambda_n(k)t} = \int_{-1}^1 x^k \mu_t^n(dx).$$

Pour tout t fixé positif, $(\mu_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesures de probabilité à supports compacts inclus dans $[-1, 1]$ dont tous les moments convergent. Cette suite admet donc pour limite une mesure de probabilité μ_t sur $[-1, 1]$, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e^{-\lambda(k)t} = \int_{-1}^1 x^k \mu_t(dx).$$

Donc $\lambda \in \mathcal{L}$.

Montrons, de plus, que le cône $\mathcal{L}$ est à base compacte, c'est-à-dire que l'ensemble (appelé section, ou base du cône) $\mathcal{K} = \{\lambda \in \mathcal{L}, \lambda(1) = 1\}$ est compact pour la topologie de la convergence simple. En effet, l'inégalité de Jensen appliquée à la formule de représentation 5.1 des éléments de $\mathcal{L}$ nous donne une première majoration :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda(2k) \leq 2k\lambda(1).$$

D'autre part, remarquons que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, \quad \int_{-1}^1 (x^{2k} - x^{2k+1}) \mu_t(dx) &= \int_{-1}^1 x^{2k}(1-x) \mu_t(dx) \\ &\leq \int_{-1}^1 (1-x) \mu_t(dx), \end{aligned}$$

d'où en utilisant à nouveau 5.1 et en dérivant en $t = 0$, on obtient une seconde majoration :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda(2k+1) \leq \lambda(2k) + \lambda(1) \leq (2k+1)\lambda(1)$$

D'où nous avons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda(k) \leq k\lambda(1).$$

Il est donc aisé de vérifier que $\mathcal{L}$ est à base $\mathcal{K}$ compacte.

Notre but est de déterminer les éléments extrémaux du cône $\mathcal{L}$.

Deuxième étape :

Décomposons les éléments de $\mathcal{L}$ de la façon suivante : soit $h \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(h) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= [\lambda(k+h) - \lambda(h)] + [\lambda(k) + \lambda(h) - \lambda(k+h)] \\ &= \lambda_1(h, k) + \lambda_2(h, k), \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Montrons que pour certains entiers h , si $\lambda \in \mathcal{L}$, alors $\lambda_1(h, \cdot) \in \mathcal{L}$ et $\lambda_2(h, \cdot) \in \mathcal{L}$. Nous allons au préalable démontrer le

Lemme 2 *Si $f \in \mathcal{P}$ telle que $f \leq 1$, alors $1 - f \in \mathcal{L}$.*

Preuve du lemme:

Si $f \in \mathcal{P}$, alors $\exists \mu \in \mathcal{M}^1([-1, 1])$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_{-1}^1 x^k \mu(dx).$$

Soit

$$\nu_t(dx) = [e^{-t} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{t^i}{i!} \mu^{*i}](dx)$$

une mesure de probabilité sur $[-1, 1]$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k \nu_t(dx) &= e^{-t} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{t^i f(k)^i}{i!} \\ &= e^{-t} e^{t f(k)} \\ &= e^{-t(1-f(k))} \end{aligned}$$

◻

• Montrons que lorsque h est pair, $\lambda_1(h, \cdot) \in \mathcal{L}$.

On pose $\xi_t(dx) = e^{\lambda(h)t} x^h \mu_t(dx)$, qui est une mesure de probabilité sur $[-1, 1]$ lorsque h est pair.

Alors

$$k \mapsto \int_{-1}^1 x^k \xi_t(dx) = e^{-t(\lambda(k+h) - \lambda(h))} = e^{-t\lambda_1(h, k)},$$

d'où pour tout h pair, $\lambda_1(h, \cdot) \in \mathcal{L}$.

• Montrons que si h est tel que $\lambda(h) \neq 0$, alors $\lambda_2(h, \cdot) \in \mathcal{L}$:

On pose $\nu_n(dx) = \frac{1 - x^h}{1 - e^{-\frac{\lambda(h)}{n}}} \mu_{\frac{1}{n}}(dx)$, qui est une mesure de probabilité sur $[-1, 1]$, d'où :

$$k \mapsto \int_{-1}^1 x^k \nu_n(dx) = k \mapsto \frac{e^{-\frac{\lambda(k)}{n}} - e^{-\frac{\lambda(k+h)}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda(h)}{n}}} \in \mathcal{P}.$$

$$\text{Posons } g_n(h, k) = 1 - \frac{e^{-\frac{\lambda(k)}{n}} - e^{-\frac{\lambda(k+h)}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda(h)}{n}}}.$$

Le lemme nous dit alors que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n(h, \cdot) \in \mathcal{L}$.

De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(h, k) = \frac{\lambda_2(h, k)}{\lambda(h)}.$$

D'où, par stabilité de $\mathcal{L}$ pour la convergence simple,

$$\forall h, \text{ tel que } \lambda(h) \neq 0, \quad k \mapsto \lambda_2(h, k) \in \mathcal{L}.$$

Troisième étape :

Nous avons donc montré que pour h pair, si $\lambda \in \mathcal{L}$ alors $k \mapsto \lambda(k + h) - \lambda(h)$ et $k \mapsto \lambda(k) + \lambda(h) - \lambda(k + h)$ sont aussi des éléments de $\mathcal{L}$.

Supposons maintenant que λ soit un élément extrémal du cône $\mathcal{L}$, avec λ non constante. Alors pour tout h pair,

$$\exists c(h) \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda(k + h) - \lambda(h) = c(h)\lambda(k).$$

Remplaçons k par $k + h'$ dans l'égalité :

$$\begin{aligned} \lambda(k + h' + h) - \lambda(h) &= c(h)\lambda(k + h') \\ &= c(h)(c(h')\lambda(k) + \lambda(h')) \end{aligned} \quad (5.2)$$

D'autre part, lorsque h' est pair,

$$\lambda(k + h' + h) - \lambda(h + h') = c(h + h')\lambda(k)$$

et

$$\lambda(h + h') - \lambda(h) = c(h)\lambda(h'),$$

d'où

$$\lambda(k + h' + h) - \lambda(h) = c(h + h')\lambda(k) + c(h)\lambda(h'). \quad (5.3)$$

En comparant 5.2 et 5.3, on obtient l'égalité suivante, vérifiée pour tout k et pour tout h et h' pairs :

$$c(h)c(h')\lambda(k) = c(h + h')\lambda(k).$$

λ n'étant pas identiquement nulle, on en déduit donc que pour tout h et h' pairs,

$$c(h + h') = c(h)c(h').$$

Finalement, on peut donc écrire que $\exists x \in [0, 1], c(h) = x^h$.

Deux cas se présentent alors :

- $x = 1$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall h$ pair, $\lambda(k+h) = \lambda(k) + \lambda(h)$, donc $\forall k, \lambda(k+2) = \lambda(k) + \lambda(2)$.

Si $k = 2p, p \in \mathbb{N}$, alors $\lambda(2p) = p\lambda(2)$.

Si $k = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$, alors $\lambda(2p + 1) = p\lambda(2) + \lambda(1)$.

- $x \neq 1$

Pour tous h, k pairs,

$$\begin{aligned}\lambda(k+h) - \lambda(k) &= x^h \lambda(k), \\ \lambda(k+h) - \lambda(h) &= x^k \lambda(h).\end{aligned}$$

On soustrait membre à membre :

$$\lambda(k) - \lambda(h) = x^h \lambda(k) - x^k \lambda(h) \Leftrightarrow \lambda(k) = \frac{\lambda(h)}{1 - x^h} (1 - x^k),$$

pour $h \neq 0$.

On obtient finalement que pour tout k pair :

$$\lambda(k) = \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} (1 - x^k).$$

Lorsque k est impair,

$$\lambda(k+2) = x^2 \lambda(k) + \lambda(2) \Leftrightarrow \lambda(k+2) - \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} = x^2 \left(\lambda(k) - \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} \right)$$

donc par récurrence, on montre que

$$\lambda(k) - \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} = x^{k-1} \left(\lambda(1) - \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} \right),$$

d'où

$$\lambda(k) = \frac{\lambda(2)}{1 - x^2} (1 - x^{k-1}) + \lambda(1) x^{k-1}.$$

D'où nous obtenons le résultat suivant.

Les extrémales de $\mathcal{L}$ font partie de l'ensemble des fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda : & 2p & \mapsto 2p\theta \\ & 2p+1 & \mapsto (2p+1)\theta + \gamma \\ \\ \lambda : & 2p & \mapsto \alpha(1-x^{2p}) \\ & 2p+1 & \mapsto \alpha(1-x^{2p}) + \beta x^{2p} \end{array} \right.$$

avec $\theta = \frac{\lambda(2)}{2}$, $\gamma = \lambda(1) - \frac{\lambda(2)}{2}$, $\alpha = \frac{\lambda(2)}{1-x^2}$ et $\beta = \lambda(1)$.

Quatrième étape :

Etudions, pour x fixé, la famille de fonctions $\mathcal{F}$ indexée par c :

$$\mathcal{F} = \left\{ \lambda_c : \begin{array}{lll} 2p & \mapsto & 1 - x^{2p} \\ 2p+1 & \mapsto & 1 - x^{2p} + cx^{2p} \end{array} \right\}$$

où $c = \frac{\beta}{\alpha}$.

Posons

$$\mu_{t,d}(ds) = e^{-t} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{t^i}{i!} \left[\frac{1+d^i}{2} \delta_{x^i} + \frac{1-d^i}{2} \delta_{-x^i} \right] (ds),$$

avec $d = \frac{1-c}{x}$.

On vérifie alors facilement que

$$\forall k, \quad e^{-t\lambda_c(k)} = \int_{-1}^1 s^k \mu_{t,d}(ds).$$

Or si $d \notin [-1, 1]$, alors $\mu_{t,d}$ n'est pas une mesure positive. Néanmoins, c'est une mesure bornée, caractérisée par la suite de ses moments $(e^{-t\lambda_c(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. La suite $(\lambda_c(k))_{k \in \mathbb{N}}$ étant associée à une mesure non positive, elle n'appartient pas à $\mathcal{L}$. On en déduit donc que $d \in [-1, 1]$.

Faisons alors la remarque suivante :

Pour tout $t \geq 0$, pour tout $d \in [-1, 1]$:

$$\mu_{(\frac{1+d}{2})t,1} * \mu_{(\frac{1-d}{2})t,-1} = \mu_{t,d}.$$

Donc la famille $(\mu_{t,d})_{t \geq 0, d \in [-1,1]}$ est engendrée par deux de ses éléments :

$$\mu_{t,1}(ds) = e^{-t} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{t^i}{i!} \delta_{x^i}(ds)$$

et

$$\mu_{t,-1}(ds) = e^{-t} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{t^i}{i!} \delta_{(-x)^i}(ds).$$

D'où la famille $(\mathcal{F})$ est engendrée par les fonctions :

$\lambda(k) = 1 - x^k$ et $\lambda(k) = 1 - (-x)^k$, avec $x \in [0, 1[$.

La section du cône convexe $\mathcal{L}'$ défini comme étant l'ensemble engendré par les combinaisons convexes des fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda : & 2p \mapsto \alpha(1 - x^{2p}) \\ & 2p + 1 \mapsto \alpha(1 - x^{2p}) + \beta x^{2p}, \end{array} \right.$$

obtenue en normalisant par $\lambda(1)$, est alors engendrée par les fonctions

$$\lambda(k) = \frac{1 - x^k}{1 - x}, \quad x \in]-1, 1[.$$

Le Théorème de Krein-Milman nous donne alors une représentation de l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}'$:

$$\lambda(k) = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} \nu(dx),$$

avec ν mesure positive finie sur $[-1, 1]$, sans masse aux points 1 et -1 .

De plus, on remarque que si

$$\lambda(k) = \theta k + \int_{-1}^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} (\gamma \delta_{-1})(dx),$$

alors

$$\begin{array}{ll} \lambda : & 2p \mapsto 2p\theta \\ & 2p + 1 \mapsto (2p + 1)\theta + \gamma. \end{array}$$

On en conclut donc que l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}$ s'écrit :

$$\lambda(k) = \theta k + c \int_{-1}^1 \frac{1 - s^k}{1 - s} \nu(ds),$$

avec $\theta \geq 0$, $c \geq 0$, ν mesure de probabilité sur $[-1, 1]$ sans masse au point 1, ce que l'on voulait démontrer.

5.2 Description du processus associé

L'ensemble des semigroupes de Markov vérifiant les hypothèses décrites est donc caractérisé par les valeurs propres des générateurs infinitésimaux associés dans la base des polynômes de Hermite. Ces valeurs propres vérifient clairement une égalité que l'on peut comparer par analogie à la formule de Lévy-Khintchine, sur le semigroupe multiplicatif $([-1, 1]^*, \times)^1$. Regardons maintenant ces semigroupes par l'intermédiaire de leurs processus associés.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\theta = 0$, où $\frac{\nu(ds)}{1-s}$ est une mesure finie sur $[-1, 1]$, et posons $\tilde{\nu}(ds) = c \frac{\nu(ds)}{1-s}$ mesure de probabilité sur $[-1, 1]$, avec c constante de normalisation.

Soit alors Y_t processus associé au générateur de valeurs propres

$$\lambda(k) = \int_{-1}^1 (1 - s^k) \tilde{\nu}(ds).$$

Notons N_t le processus de loi

$$e^{-t} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} \tilde{\nu}^{*i}(ds).$$

N_t est le processus obtenu à partir d'une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\tilde{\nu}$. Pour cela, on définit la suite de variables aléatoires $\hat{X}_n$ par récurrence:

$$\hat{X}_0 = X_0, \quad \hat{X}_n = \hat{X}_{n-1} X_n,$$

on définit M_t comme étant un processus de Poisson de paramètre 1, et on pose

$$N_t = \hat{X}_{M_t}.$$

On définit ensuite les processus :

- $T_t = -\ln(|N_t|)$ lorsque $N_t \neq 0$, une valeur arbitraire de $\mathbb{R}^+$ si $N_t = 0$;
- $\epsilon_t = 1$ si $N_t > 0$, -1 si $N_t < 0$, 0 si $N_t = 0$.

1. Voir par exemple [12]

Alors Y_t a même loi que $\epsilon_t X_{T_t}$, où X_t est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

En effet, notons par $\mathcal{L}(T_t)(dv)$ la loi de la variable aléatoire T_t , par $\mathcal{L}(\epsilon_t, T_t)(du, dv)$ la loi jointe des variables aléatoires ϵ_t et T_t , et montrons que pour k entier, $E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) = e^{-\lambda(k)t} H_k(x)$. Deux cas se distinguent :

k pair : $H_k(x)$ est alors un polynôme pair, donc

$$\begin{aligned} E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) &= E_x(H_k(X_{T_t})) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E_x[H_k(X_v)] \mathcal{L}(T_t)(dv), \end{aligned}$$

Or le semigroupe associé au processus d'Ornstein-Uhlenbeck X_t admet la famille $(e^{-kt})_{k \in \mathbb{N}}$ comme suite de valeurs propres dans la base de vecteurs propres des polynômes de Hermite, ce qui se traduit par l'égalité $E_x[H_k(X_v)] = e^{-kv} H_k(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-kv} \mathcal{L}(T_t)(dv) H_k(x) \\ &= E(e^{-kT_t}) H_k(x) \\ &= E(|N_t|^k) H_k(x) \\ &= E(N_t^k) H_k(x). \end{aligned}$$

k impair : $H_k(x)$ est alors un polynôme impair, donc

$$E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) = \int_{\{-1,0,1\} \times \mathbb{R}} E_x[H_k(uX_v)] \mathcal{L}(\epsilon_t, T_t)(du, dv)$$

D'autre part, u étant un élément de $\{-1, 0, 1\}$, et k étant impair, on a $H_k(uX_v) = u^k H_k(X_v)$.

D'où

$$\begin{aligned}
E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) &= \int_{\{-1,0,1\} \times \mathbb{R}} u^k E_x[H_k(X_v)] \mathcal{L}(\epsilon_t, T_t)(du, dv) \\
&= \int_{\{-1,0,1\} \times \mathbb{R}} u^k e^{-kv} \mathcal{L}(\epsilon_t, T_t)(du, dv) H_k(x) \\
&= E(\epsilon_t^k e^{-kT_t}) H_k(x) \\
&= E(N_t^k) H_k(x).
\end{aligned}$$

D'où nous avons pour tout k entier :

$$\begin{aligned}
E_x(H_k(\epsilon_t X_{T_t})) &= E(N_t^k) H_k(x) \\
&= \int_{[-1,1[} s^k e^{-t} \sum_i \frac{t^i}{i!} \tilde{\nu}^{*i}(ds) H_k(x) \\
&= e^{-t} \sum_i \frac{t^i}{i!} \left(\int_{-1}^1 s^k \tilde{\nu}(ds) \right)^i H_k(x) \\
&= e^{-t(1 - \int_{-1}^1 s^k \tilde{\nu}(ds))} H_k(x) \\
&= e^{-\lambda(k)t} H_k(x),
\end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer.

Soit $\tilde{Y}_t$ processus associé au générateur de valeurs propres $\lambda(k) = \theta k$, $\theta > 0$.

Alors $\tilde{Y}_t$ a même loi que $X_{\theta t}$, où X_t est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. En effet,

$$E_x(H_k(X_{\theta t})) = e^{-\theta k t} H_k(x) = e^{-t\lambda(k)} H_k(x).$$

Dans le cas où $\frac{\nu(ds)}{1-s}$ est une mesure finie sur $[-1, 1]$, nous arrivons donc à la représentation du processus suivante :

Proposition 16 *Si Y_t est le processus associé au générateur de valeurs propres :*

$$\lambda(k) = \theta k + \int_{-1}^1 (1 - s^k) \tilde{\nu}(dx),$$

il a même loi que le processus

$$\epsilon_t X_{\theta t + T_t}$$

où X_t est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ; N_t le processus indépendant de X_t , de loi $e^{-t} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} \tilde{\nu}^{*i}(ds)$; $T_t = -\ln(|N_t|)$ lorsque $N_t \neq 0$, une valeur arbitraire de $\mathbb{R}^+$ si $N_t = 0$; $\epsilon_t = 1$ si $N_t > 0$, -1 si $N_t < 0$, et 0 si $N_t = 0$.

. Lorsque la mesure $\frac{\nu(dx)}{1-s}$ n'est pas de masse finie, le processus Y_t associé au semigroupe de valeurs propres $(e^{-\lambda(k)t})_{k \in \mathbb{N}}$ est bien plus difficilement explicitable. On peut continuer à dire, d'une manière heuristique, que sa "partie continue" est représentée par θ , et que sa "partie à sauts" est associée à la mesure $\frac{\nu(ds)}{1-s}$. Mais ces sauts, concrètement, deviennent de plus en plus nombreux (et de plus en plus petits), lorsque la masse de la mesure $\frac{\nu(ds)}{1-s}$ tend vers l'infini. En effet, il y a à la limite une infinité de sauts par intervalle de temps. Pour plus de précisions à ce sujet, se reporter à [36], 3.2, et à [18] par exemple pour ce qui est d'une étude de base sur la formule de Lévy-Khintchine.

5.3 Interprétation géométrique

Comme précédemment, nous cherchons à réinterpréter ce résultat en considérant l'espace gaussien comme une limite de sphères. Nous nous plaçons dans le cas où la mesure $\tilde{\nu}(ds)$ est de masse finie sur $[-1, 1]$, et nous cherchons à décrire le processus sous un angle plus géométrique, et à l'obtenir comme la limite d'un processus de saut sur une sphère de $\mathbb{R}^n$ de co-dimension 1, lorsque n tend vers l'infini. Ce processus de saut provient en fait de la partie discontinue du processus associé au semigroupe de Jacobi, comme nous pouvons le voir à partir de la proposition 14.

Plus précisément, nous nous plaçons dans le cas où $\theta = 0$, $c = 1$, $\nu(ds) = \delta_1(ds)$, et nous utiliserons les notations suivantes :

Définition 10 – $e := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,

– $S_{n-1}(1) := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$,

– $\mu(dx)$ est la mesure de probabilité uniforme sur $S_{n-1}(1)$, donc en particulier invariante par rotation,

- $(P_k^n(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est la famille des polynômes de Jacobi associée à la mesure de probabilité $K_n(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx$ sur $[-1, 1]$, où K_n est la constante de normalisation.

Soit (X_t) un processus de saut sur $S_{n-1}(1)$, dont les temps de saut suivent une loi exponentielle de paramètre 1, et dont l'amplitude de chaque saut suit une loi de probabilité invariante par rotation autour du point de départ du saut, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$X_t = Y_{N_t},$$

où N_t est un processus de Poisson de paramètre 1, et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de noyau de transition $P\{Y_n = y | Y_{n-1} = x\} = f(x.y)$, où x et y sont des points de $S_{n-1}(1)$, où f est une fonction sur $S_{n-1}(1)$, et où l'on note $x.y$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Supposons que f soit une fonction de $L^2(S_{n-1}(1), \mu)$, elle se décompose alors dans la base des polynômes de Jacobi de la manière suivante :

$$f(x.y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k P_k^n(x.y).$$

Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ le semigroupe associé au processus (X_t) , et soit g un élément de $L^2(S_{n-1}(1), \mu)$:

$$P_t g(x) = g(x)e^{-t} + (1 - e^{-t}) \int_{S_{n-1}(1)} f(x.y)g(y) \mu(dy) + o(t^2),$$

d'où si l'on note L le générateur infinitésimal associé, et si l'on suppose que g est dans le domaine de L :

$$Lg(x) = -g(x) + \int_{S_{n-1}(1)} g(y)f(x.y) \mu(dy).$$

Observons l'action de l'opérateur L sur les fonctions radiales. Soit g une fonction radiale de $L^2(S_{n-1}(1), \mu)$, elle se décompose donc dans la base des polynômes (P_k^n) en :

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k P_k^n(x.e).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} Lg(x) &= \int_{S_{n-1}(1)} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k g_k P_k^n(x.y) P_k^n(y.e) \mu(dy) - g(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k g_k \int_{S_{n-1}(1)} P_k^n(x.y) P_k^n(y.e) \mu(dy) - g(x). \end{aligned}$$

Nous avons maintenant besoin du

Lemme 3 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in S_{n-1}(1),$

$$\int_{S_{n-1}(1)} P_k^n(x.z) P_k^n(z.y) \mu(dz) = \frac{P_k^n(x.y)}{P_k^n(1)}.$$

Preuve :

Ce lemme a été montré au chapitre précédent, page 69, où l'on a vu que

$$\int_{S_{n-1}(1)} P_k^n(x.y) P_k^n(y.e) \mu(dy) = \frac{P_k^n(x.e)}{P_k^n(1)},$$

par une démonstration dans laquelle on peut remplacer e par un point quelconque de la sphère sans rien changer au résultat.

◦

Le lemme nous permet alors d'écrire :

$$Lg(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k f_k \frac{P_k^n(e.x)}{P_k^n(1)} - g(x).$$

Nous pouvons en déduire les valeurs propres de L associées aux vecteurs propres $(P_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$LP_k^n = \left(\frac{f_k}{P_k^n(1)} - 1 \right) P_k^n.$$

Dans le cas particulier où $f(x.y) = \delta_l(x.y)$ avec $l \in [-1, 1]$, f se décompose dans la base $(P_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$f(x.y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k^n(l) P_k^n(x.y).$$

Cette écriture est purement formelle, et doit être comprise dans le sens suivant : si g est une fonction radiale $g(x.y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i P_i^n(x.y)$, alors

$$\begin{aligned}
& \int_{S_{n-1}(1)} g(x.y) \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k^n(l) P_k^n(x.y) \mu(dy) \\
&= \int_{S_{n-1}(1)} \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i P_i^n(x.y) \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k^n(l) P_k^n(x.y) \mu(dy) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i P_i^n(l) \int_{S_{n-1}(1)} P_i^n(x.y) P_i^n(x.y) \mu(dy) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i P_i^n(l) \\
&= g(l).
\end{aligned}$$

Donc si l'on note par $(-\lambda_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres du générateur infinitésimal associé dans la base $(P_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, nous obtenons l'égalité :

$$\lambda_k^n = 1 - \frac{P_k^n(l)}{P_k^n(1)}.$$

En suivant la formule (voir [37], p. 81) qui dit que

$$\frac{P_k^n(l)}{P_k^n(1)} = F(-k, k+2n ; n + \frac{1}{2} ; \frac{1-l}{2}),$$

où F est la fonction hypergéométrique standard solution de l'équation

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0,$$

et qui s'écrit

$$F(a, b ; c ; x) = 1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{a(a+1) \cdots (a+i-1)}{i!} \frac{b(b+1) \cdots (b+i-1)}{c(c+1) \cdots (c+i-1)} x^i,$$

alors on voit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_k^n(l)}{P_k^n(1)} = F(-k, 0 ; 0 ; 1-l),$$

fonction solution de

$$(1-l)l \frac{d^2 y}{dl^2} - (k-1)l \frac{dy}{dl} = 0,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_k^n(l)}{P_k^n(1)} = l^k.$$

On peut retrouver cette limite, grossièrement, en remarquant d'une part que lorsque n tend vers l'infini,

$$P_k^n(l) \sim H_k(l\sqrt{n}),$$

et d'autre part que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_k(l\sqrt{n})}{H_k(\sqrt{n})} = l^k.$$

On en conclut que

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_k^n = 1 - l^k.$$

Conclusion :

Soit un processus $X_t = Y_{N_t}$ sur la sphère $S_{n-1}(1)$, avec (N_t) processus de Poisson de paramètre 1, (Y_n) chaîne de Markov sur $S_{n-1}(1)$ de noyau de transition $P\{Y_{n+1} = y \mid Y_n = x\} = \delta_l(x, y)$. Alors la limite quand n tend vers l'infini de la projection de (X_t) sur un diamètre de la sphère, est un processus dont le générateur infinitésimal associé admet la suite normalisée de valeurs propres $(-\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans la base des polynômes de Hermite, avec :

$$\lambda_k = \frac{1 - l^k}{1 - l}.$$

Ces valeurs propres, dans la formule de représentation de la proposition 15, correspondent au cas où $\theta = 0$, et fournissent une interprétation géométrique de la partie dite "à sauts" du processus dans le cas où $\tilde{\nu}$ est une mesure de masse finie.

Remarque :

Il est intéressant de remarquer que ces valeurs propres $\lambda_k = \frac{1-l^k}{1-l}$ forment avec celles du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck qui s'écrivent $\hat{\lambda}_k = \theta k$, l'ensemble des éléments extrémaux du cône $\mathcal{L}$ que nous avons étudié dans la

démonstration de la proposition 15. On peut vérifier, pour ces éléments extrémaux, que le carré du champ associé est effectivement positif :

- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $LH_k = -\lambda_k H_k$, avec $\lambda_k = \frac{1-l^k}{1-l}$, $l \in [-1, 1[$, si l'on note par Γ l'opérateur carré du champ correspondant, et si l'on choisit $f = \sum_{i=0}^n f_i H_i$ un polynôme, alors

$$\Gamma(f, f) = \frac{1}{1-l} \left[\left(\sum_{i=1}^n f_i (1-l^i) H_i \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{(1-l^2)^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-k} f_{i+k} l^i H_i \right)^2 \right] \geq 0.$$

- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda(k) = \theta k$ avec $\theta > 0$, l'opérateur admettant la suite $(-\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme valeurs propres sur la base de vecteurs propres des polynômes de Hermite est alors le générateur du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, qui en tant que diffusion admet un carré du champ positif sur l'ensemble des polynômes.

Il serait intéressant de savoir dégager, sans utiliser la proposition 2, l'ensemble des éléments extrémaux du cône convexe $\mathcal{L}$, à partir seulement de critères algébriques, en utilisant l'opérateur carré du champ comme outil principal, et l'équivalence entre la positivité de ce dernier et la positivité du semigroupe, comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Chapitre 6

Semigroupes de Markov associés à une base orthogonale dans le cas d'un ensemble fini

La problématique à laquelle nous nous sommes consacré tout au long de cette thèse est la caractérisation de certaines familles de semigroupes symétriques à travers leurs bases de vecteurs propres données à l'avance. De façon plus générale, nous nous posons la question suivante : soit (E, μ) un espace probabilisé, soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base orthogonale de $L^2(E, \mu)$, telle que $f_0 = 1$, y a-t-il existence de semigroupes de Markov admettant la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme base de vecteurs propres, et si oui, comment les classer ?

Cette question, par sa formulation même, est très vaste, et nous en amorçons une étude en traitant un exemple simple, celui de l'ensemble fini. Nous nous proposons de montrer que pour cet exemple, il y a toujours existence d'une famille d'opérateurs markoviens, et nous approfondissons l'étude de ces opérateurs dans les cas où le cardinal de E est égal à 2 et à 3.

6.1 Cas général de l'ensemble fini

Nous nous plaçons donc sur un ensemble E fini de cardinal $N \geq 2$, muni d'une mesure de probabilité μ chargeant tous les points de E . Nous identifions E à l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, μ s'écrit $\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \dots + \alpha_N \delta_N$ avec $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, et l'ensemble des fonctions de E sur $\mathbb{R}$ est identifié à l'ensemble des vecteurs

de $\mathbb{R}^N$. Donnons-nous sur E une base de vecteurs orthonormaux $(V_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$, destinée à être la base de vecteurs propres de l'opérateur L . Fixons le premier vecteur V_1 comme étant la fonction sur E identiquement constante égale à 1 : $V_1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$. Les $N - 1$ autres vecteurs de la base vérifient alors :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad \int_E V_i V_j d\mu = \sum_{k=1}^N \alpha_k V_i(k) V_j(k) = \delta_{ij}.$$

Pour un certain vecteur $(\lambda_k)_{k \in \{2, \dots, N\}}$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, définissons l'opérateur P^λ de noyau

$$P^\lambda(i, j) = 1 + \sum_{k=2}^N \lambda_k V_k(i) V_k(j)$$

agissant sur $L^2(E, \mu)$. Définissons de plus le sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^{N-1}$ par

$$(\lambda_k)_{k \in \{2, \dots, N\}} \in \Lambda \Leftrightarrow \forall i, j \in E, \quad P^\lambda(i, j) \geq 0.$$

Λ est donc l'ensemble des $(\lambda_k)_{k \in \{2, \dots, N\}}$ tels que l'opérateur P^λ soit markovien.

Remarquons alors que E étant un ensemble fini, les semigroupes de Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ sur $L^2(E, \mu)$ sont tous de la forme

$$P_t = e^{t(P^\lambda - I)},$$

avec I identité de $\mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \Lambda$.

Montrons la proposition suivante :

Proposition 17 *Pour toute base orthonormée $(V_i)_{i \in E}$ de $L^2(E, \mu)$, l'ensemble Λ est non vide, et même non réduit à l'origine.*

Preuve :

En effet, soit $(\lambda_k)_{k \in \{2, \dots, N\}}$ un élément non nul quelconque de $\mathbb{R}^{N-1}$, tel que la quantité définie pour tout i, j de E

$$f^\lambda(i, j) := \sum_{k=2}^n \lambda_k \mu_k^{ij}$$

avec

$$\forall i, j \in E, \quad \mu_k^{ij} := V_k(i) V_k(j),$$

ne soit pas identiquement nulle.

$f^\lambda(i, j)$ étant une fonction à N^2 valeurs, vérifiant de plus

$$\forall i \in E, \quad \int_E f^\lambda(i, j) d\mu(j) = 0, \quad (6.1)$$

et f n'étant pas identiquement nulle, il existe deux réels M et m strictement positifs tels que

$$\forall i, j \in E, \quad -m \leq f^\lambda(i, j) \leq M.$$

D'où il est clair que

$$\forall i, j \in E, \quad f^{\frac{\lambda}{m}}(i, j) \geq -1,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall i, j \in E, \quad P^{\frac{\lambda}{m}}(i, j) \geq 0,$$

ce qui prouve bien la proposition. ◦

Regardons d'un peu plus près l'ensemble Λ , et montrons la proposition suivante :

Proposition 18 *Λ est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^{N-1}$ contenant l'origine, délimitée par au plus $\frac{N(N+1)}{2}$ hyperplans.*

Preuve :

Un élément générique λ de Λ vérifie les N^2 inégalités

$$\forall (i, j) \in E^2, \quad f^\lambda(i, j) \geq -1,$$

donc Λ est délimité par les hyperplans $(H_{ij})_{(i,j) \in E^2}$ d'équations

$$H_{ij} : f^\lambda(i, j) = -1, \quad (6.2)$$

donc est un ensemble convexe. $f^\lambda(i, j)$ étant de plus par définition une fonction symétrique, ces hyperplans sont au maximum au nombre de $\frac{N(N+1)}{2}$.

Remarquons de plus que les valeurs propres d'un générateur de semi-groupe markovien, comme nous l'avons déjà vu, sont négatives ou nulles. Si l'on applique cette propriété à l'opérateur $(P^\lambda)^2 = P^{\lambda^2}$, on obtient que si $\lambda \in \Lambda$ alors

$$\forall k \in \{2, \dots, N\}, \quad \lambda_k^2 \leq 1.$$

Λ est donc bien un ensemble borné, et ses frontières étant constituées par un nombre fini d'hyperplans dont aucun ne passe par l'origine, celle-ci est à l'intérieur de Λ .

◻

Donnons enfin une dernière propriété générale que vérifie l'ensemble Λ :

Proposition 19 *Parmi les hyperplans définis par les équations 6.2, $\frac{N(N-1)}{2}$ d'entre eux exactement passent par le point $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$.*

Preuve :

En effet, considérons le noyau

$$P^1(i, j) = 1 + \sum_{k=2}^N V_k(i) V_k(j).$$

Soit f une fonction quelconque de $L^2(E, \mu)$, s'écrivant donc

$$\forall j \in E, \quad f(j) = \sum_{l=1}^N f_l V_l(j).$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \int_E P^1(i, j) f(j) d\mu(j) &= \int_E \sum_{k=1}^N V_k(i) V_k(j) \sum_{l=1}^N f_l V_l(j) d\mu(j) \\ &= \sum_{k=1}^N f_k V_k(i) \\ &= f(i). \end{aligned}$$

L'opérateur associé au noyau $P^1(i, j)$ est donc l'identité sur $L^2(E, \mu)$, donc

$$\forall i, j \in E, \quad P^1(i, j) = \delta_{ij},$$

d'où on en déduit que

$$\forall i, j \in E, \quad f^1(i, j) = \delta_{ij} - 1,$$

ce qui montre que pour $i \neq j$, $(1, \dots, 1) \in H_{ij}$, et $\forall i \in E$, $(1, \dots, 1) \notin H_{ii}$, ce qui est ce que l'on voulait démontrer.

◻

Nous donnons une plus ample description du convexe Λ dans le cas (trivial) où $N = 2$, et dans le cas (un peu moins trivial) où $N = 3$.

6.2 Cas de l'espace à deux points

Posons $E = \{1, 2\}$, $\mu = a^2\delta_1 + b^2\delta_2$ avec $a^2 + b^2 = 1$, $(a, b) \in]0, 1[^2$. Posons ensuite $V_1 = (1, 1)$, il ne nous reste qu'à calculer V_2 tel que

$$\int_E V_1 V_2 d\mu = a^2 V_1(1) V_2(1) + b^2 V_1(2) V_2(2) = a^2 V_2(1) + b^2 V_2(2) = 0,$$

$$\int_E V_2^2 d\mu = a^2 V_2(1)^2 + b^2 V_2(2)^2 = 1,$$

et on obtient (au signe près) :

$$V_2 = \left(\frac{b}{a}, -\frac{a}{b}\right).$$

D'où si $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, le noyau P^λ s'écrit

$$\forall i, j \in \{1, 2\}, \quad P^\lambda(i, j) = 1 + \lambda V_2(i) V_2(j).$$

Donc Λ est l'ensemble des réels λ vérifiant le système d'inégalités

$$\begin{cases} 1 + \lambda \frac{b^2}{a^2} \geq 0 \\ 1 - \lambda \geq 0 \\ 1 + \lambda \frac{a^2}{b^2} \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\Lambda = \left[-\max\left(\frac{b^2}{a^2}, \frac{a^2}{b^2}\right), 1\right].$$

Ce cas trivial de l'espace à deux points offre surtout l'avantage de présenter la façon d'aborder le cas de l'espace à trois points, qui donne lieu à davantage de calculs.

6.3 Cas de l'espace à trois points

Posons $E = \{1, 2, 3\}$, $\mu = a^2\delta_1 + b^2\delta_2 + c^2\delta_3$, avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $(a, b, c) \in]0, 1[^3$. Posons ensuite $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (x_1, y_1, z_1)$ et $V_3 = (x_2, y_2, z_2)$, tels que

$$\int_E V_1 V_2 d\mu = \int_E V_1 V_3 d\mu = \int_E V_2 V_3 d\mu = 0, \quad (6.3)$$

$$\int_E V_2^2 d\mu = \int_E V_3^2 d\mu = 1. \quad (6.4)$$

D'après la proposition 18, Λ est ici un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, convexe borné contenant l'origine, inclus dans le carré $\{(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2, \lambda_2^2 \leq 1, \lambda_3^2 \leq 1\}$, et délimité par les six droites D_{ij} d'équations

$$D_{ij} : \lambda_2 V_2(i) V_2(j) + \lambda_3 V_3(i) V_3(j) = -1,$$

où i et j décrivent l'ensemble E .

En tant que convexe borné délimité par six droites dont aucune ne passe par l'origine, Λ est l'intérieur d'un polygone dont le nombre de côtés est d'au moins trois et au plus six. La proposition 19 montre de plus que trois exactement de ces six droites passent par le point $(1, 1)$, donc parmi ces trois droites, au plus deux d'entre elles forment les côtés du polygone délimitant l'ensemble Λ . Λ est donc l'intérieur d'un polygone dont le nombre de côtés est *au moins trois et au plus cinq*.

Des exemples de chaque configuration (triangle, quadrilatère, pentagone) sont présentés en fin de chapitre. Avant d'aborder ces calculs qui sont un peu rébarbatifs, nous traitons le cas particulier où μ est la mesure de probabilité uniforme sur E , c'est-à-dire où $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$:

Proposition 20 *Dans le cas où μ est uniforme sur E , Λ est l'intérieur d'un polygone à exactement quatre côtés.*

Preuve :

D'après la proposition 19, les droites D_{12} , D_{13} et D_{23} sont concourantes en $(1, 1)$. Nous montrons ici de plus que les trois autres droites D_{11} , D_{22} et D_{33} passent toutes trois par le point $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ce qui nous donne clairement le résultat voulu. Il nous suffit donc de montrer que

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ y_1^2 + y_2^2 = 2 \\ z_1^2 + z_2^2 = 2. \end{cases}$$

Montrons la première égalité, les deux autres se montrant de la même manière. Les équations 6.3 et 6.4 se traduisent sur les coordonnées des vecteurs V_2 et V_3 par le système d'équations suivant :

$$(S) = \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 3 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 3 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \end{cases}$$

Ceci est équivalent à dire que les trois vecteurs $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1, y_1, z_1)$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(x_2, y_2, z_2)$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, donc que chacun des trois vecteurs s'obtient par le produit vectoriel des deux autres, d'où l'on tire les égalités suivantes :

$$\sqrt{3}x_1 = y_2 - z_2 \quad \text{et} \quad \sqrt{3}x_2 = z_1 - y_1,$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{1}{3}[(y_2 - z_2)^2 + (z_1 - y_1)^2] \\ &= \frac{1}{3}[y_2^2 + z_2^2 - 2y_2z_2 + z_1^2 + y_1^2 - 2z_1y_1] \\ &= \frac{1}{3}[3 - x_2^2 + 3 - x_1^2 - 2(y_2z_2 + y_1z_1)] \\ &\quad (\text{par les égalités 2 et 3 de (S)}) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $y_2z_2 + y_1z_1 = -1$, comme nous l'avons montré pour la proposition 19, on obtient

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}(6 + 2) = 2,$$

ce que l'on voulait démontrer.

◻

6.4 Quelques exemples dans le cas de l'espace à trois points

Nous ne sommes pas encore en mesure de comprendre vraiment la signification de la forme de l'ensemble Λ , c'est pourquoi nous donnons ici quelques

exemples de chaque configuration possible. Nous nous sommes aidé, pour les calculs et les graphiques qui vont suivre, du logiciel de calcul formel *Maple*.

Nous donnons au préalable un aperçu des calculs des coordonnées des vecteurs V_2 et V_3 que l'on explicite en fonction des paramètres a , b , c et le "paramètre d'angle" que l'on note p .

Remarquons d'abord que $6.4 \Leftrightarrow a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2 = 1$, d'où l'on effectue le changement de variable qui s'impose :

$$ax_1 = \cos \theta \cos \phi, \quad by_1 = \cos \theta \sin \phi, \quad cz_1 = \sin \theta,$$

et de 6.3 on tire

$$a^2x_1 + b^2y_1 + c^2z_1 = 0 \Leftrightarrow a \cos \phi + b \sin \phi = -c \tan \theta.$$

On pose alors $p := a \cos \phi + b \sin \phi = -c \tan \theta$, p étant le paramètre d'angle vérifiant

$$p \in [-\sqrt{1-c^2}, \sqrt{1-c^2}], \quad (6.5)$$

et pour simplifier les expressions, on pose de plus $q = \sqrt{1-c^2-p^2}$.

On obtient alors (en ayant choisi une orientation) :

$$\cos \phi = \frac{ap + bq}{1 - c^2},$$

$$\sin \phi = \frac{bp - aq}{1 - c^2},$$

$$\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{p^2 + c^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + c^2}}.$$

D'où

$$V_2 = \left(\frac{c(p + \frac{b}{a}q)}{(1-c^2)\sqrt{p^2+c^2}}, \frac{c(p - \frac{a}{b}q)}{(1-c^2)\sqrt{p^2+c^2}}, \frac{-p}{c\sqrt{p^2+c^2}} \right).$$

De la même manière, on calcule V_3 à partir de 6.3 et de 6.4 en fonction des différents paramètres :

$$V_3 = \left(-\frac{c^2q + \frac{b}{a}p}{\sqrt{p^2+c^2}(1-c^2)}, -\frac{c^2q - \frac{a}{b}p}{\sqrt{p^2+c^2}(1-c^2)}, \frac{q}{\sqrt{p^2+c^2}} \right).$$

Les équations de droites que l'on obtient à partir de ces résultats sont les suivantes :

$$D_{11} : c^2(ap + bq)^2\lambda_2 + (c^2qa - bp)^2\lambda_3 = a^2(c^2 + p^2)(1 - c^2)^2,$$

$$D_{12} : c^2(ap + bq)(bp - aq)\lambda_2 + (c^2qa - bp)(c^2qb + ap)\lambda_3 = \\ = ab(c^2 + p^2)(1 - c^2)^2,$$

$$D_{13} : (ap + bq)p\lambda_2 + (c^2qa - bp)q\lambda_3 = -a(c^2 + p^2)(1 - c^2),$$

$$D_{22} : c^2(bp - aq)^2\lambda_2 + (c^2qb + ap)^2\lambda_3 = b^2(c^2 + p^2)(1 - c^2)^2,$$

$$D_{23} : (bp - aq)p\lambda_2 + (c^2qb + ap)q\lambda_3 = -b(c^2 + p^2)(1 - c^2),$$

$$D_{33} : p^2\lambda_2 + c^2(1 - c^2 - p^2)\lambda_3 = c^2(c^2 + p^2).$$

Ce sont ces droites qui sont représentées sur les graphiques suivants, où l'on a pris les variables λ_2 et λ_3 respectivement comme abscisse et ordonnée. Dans chaque cas, p est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$, une valeur qui se veut quelconque, et en ce qui concerne la mesure, les paramètres a^2 , b^2 et c^2 sont respectivement égaux à :

$$a^2 = \frac{8}{21}, \quad b^2 = \frac{10}{21}, \quad c^2 = \frac{3}{21}$$

$$a^2 = \frac{7}{21}, \quad b^2 = \frac{8}{21}, \quad c^2 = \frac{6}{21}$$

$$a^2 = \frac{1}{3}, \quad b^2 = \frac{1}{3}, \quad c^2 = \frac{1}{3}.$$

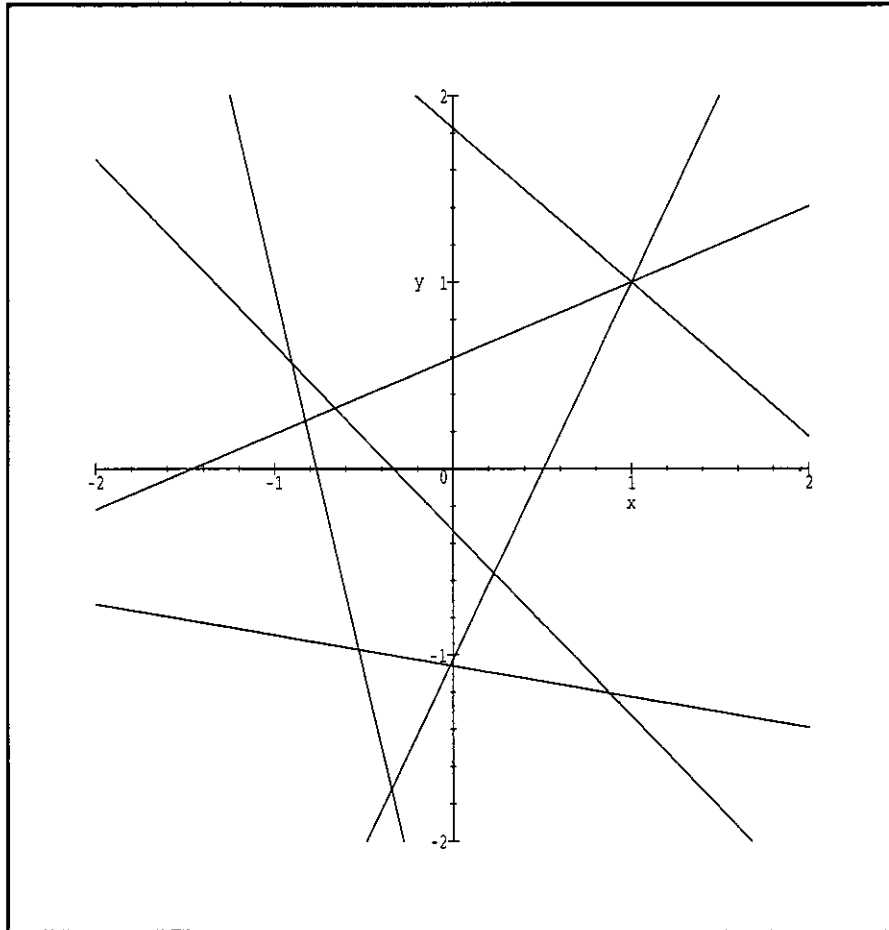


FIG. 6.1 - *Cas où le polygone est un triangle : $a^2 = \frac{8}{21}$, $b^2 = \frac{10}{21}$, $c^2 = \frac{3}{21}$.*

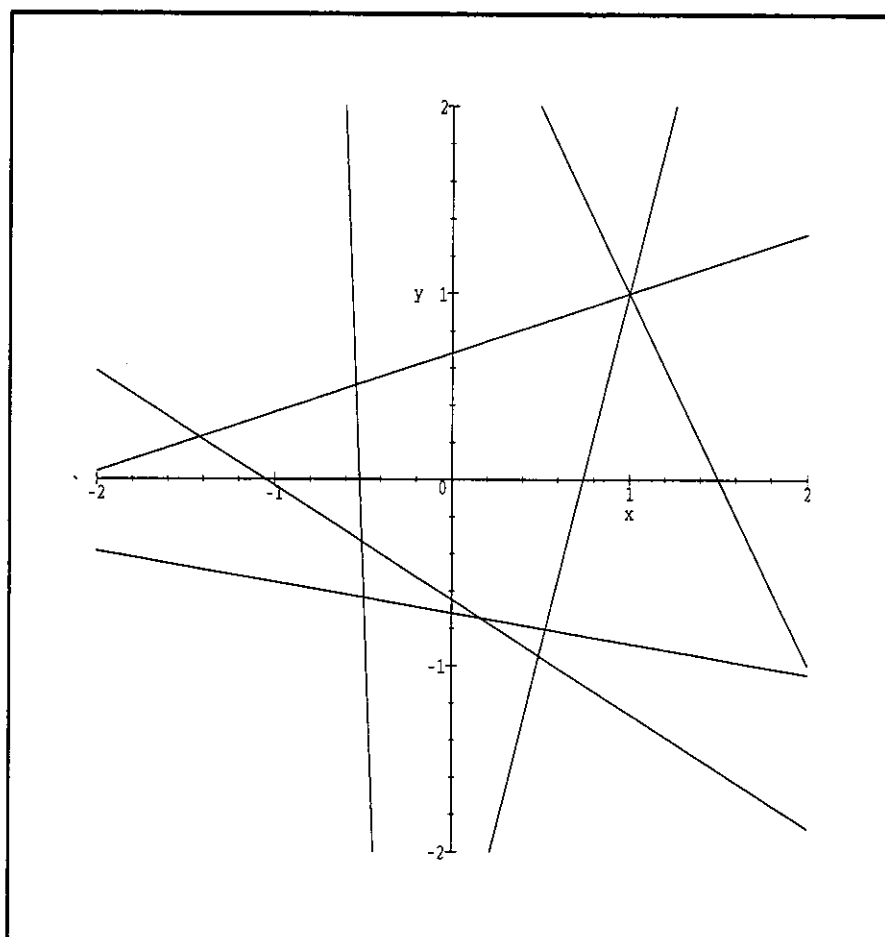


FIG. 6.2 - Cas où le polygone est un pentagone : $a^2 = \frac{7}{21}$, $b^2 = \frac{8}{21}$, $c^2 = \frac{6}{21}$.

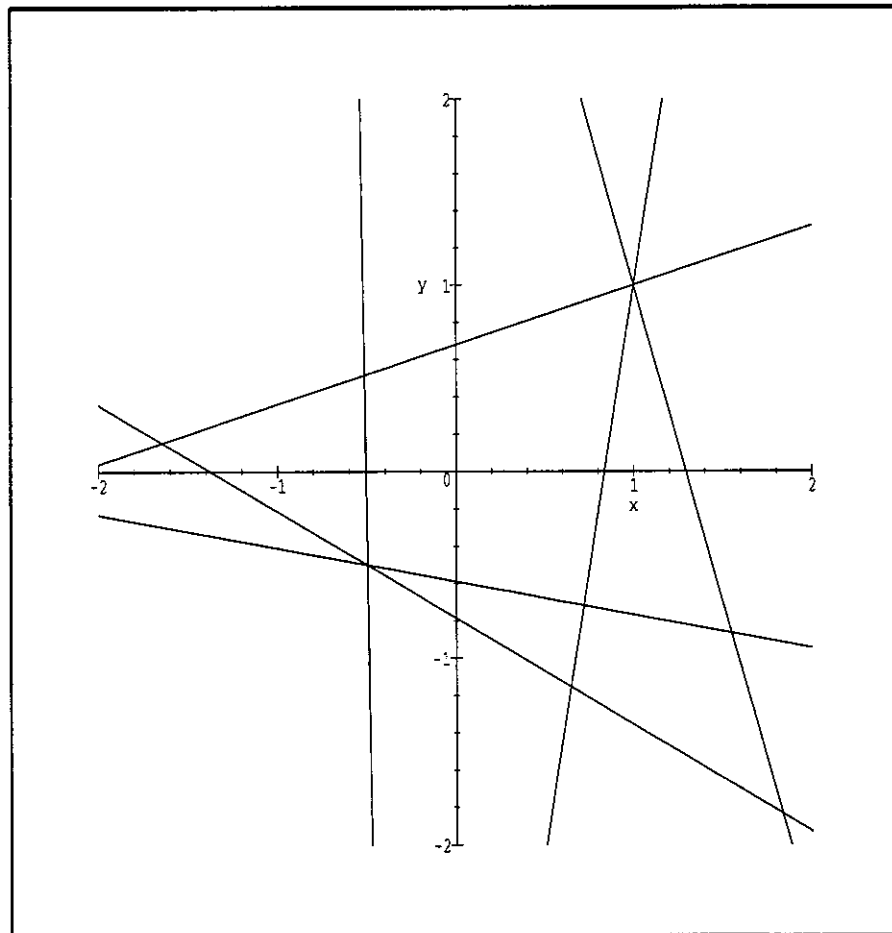


FIG. 6.3 - *Cas où la mesure est uniforme : quadrilatère.*

Bibliographie

- [1] L. Alili, D. Dufresne, and M. Yor. Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement Brownien avec drift. A paraître, 1996.
- [2] D. Bakry. La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés. In *Séminaire de probabilité XXII, Lectures Notes in Mathematics*, volume 1321, pages 1–50. Springer, 1988.
- [3] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes. In *Lectures on Probability Theory*, volume 1581. Springer, 1994.
- [4] D. Bakry. Remarques sur les semi-groupes de Jacobi. In *Hommage à P.A. Meyer et J. Neveu*, volume 236, pages 23–40. Astérisque, 1996.
- [5] D. Bakry and M. Emery. Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion. *C.R.Acad. Sci.*, 299, Série I(15):775–778, 1984.
- [6] C. Berg, J.P.R. Christensen, and P. Ressel. *Harmonic Analysis on Semigroups*. Springer, 1984.
- [7] H. Bloom, W.R. et Heyer. *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*. Walter de Gruyter, 1995.
- [8] S. Bochner. Positive zonal functions on spheres. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40(12):1141–1147, 1954.
- [9] S. Bochner. Sturm-Liouville and heat equations whose eigenfunctions are ultraspherical polynomials or associated Bessel functions. *Proc. Conf. Differential Equations*, pages 23–48, 1955.

- [10] S. Bochner. Positivity of the heat kernel for ultraspherical polynomials and similar functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 70, 1979.
- [11] N. Bouleau and F. Hirsch. *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*. de Gruyter, 1991.
- [12] C. Dellacherie and P-A Meyer. *Probabilités et potentiel*. Number X, 78. Hermann, 1983.
- [13] W. Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Ann. of Math.*, 55:468–519, 1952.
- [14] W. Feller. Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 77:1–31, 1954.
- [15] R. Gangolli. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, III(2):9–226, 1967.
- [16] G. Gasper. Linearization of the product of Jacobi polynomials. *Can. J. Math.*, 22:171–175, 582–593, 1970.
- [17] G. Gasper. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel. *Ann. of Math.*, 2(95):261–280, 1972.
- [18] B V. Gnedenko and A N. Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independant random variables*. Addison-Wesley, 1968.
- [19] K. Ito and H. P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*, volume 125. Springer, 1965.
- [20] S. Karlin and J. McGregor. Classical diffusion processes and total positivity. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1:163–183, 1960.
- [21] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.
- [22] H. Koornwinder. Jacobi functions and analysis on noncompact semi-simple Lie groups. In R.A. Askey et al. (eds.), editor, *Special functions: group theoretical aspects and applications*, pages 1–85. 1984.

- [23] A. Korzeniowski and D. Stroock. An example in the theory of hypercontractive semigroups. *Proc. A.M.S.*, 94:87–90, 1985.
- [24] J. Lamperti. The arithmetic of certain semigroups of positive operators. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 64(161):161–166, 1968.
- [25] R. Lasser. Bochner theorems for hypergroups and their applications to orthogonal polynomial expansions. *Journal of Approximation Theory*, 37:311–325, 1983.
- [26] R. Lasser. Orthogonal polynomials and hypergroups. *Rendiconti di Matematica*, 2:185–209, 1983.
- [27] R. Lasser. Orthogonal polynomials and hypergroups 2 - the symmetric case. *Transactions of the A.M.S.*, 341(2):749–770, 1994.
- [28] O. Mazet. Une caractérisation des générateurs de semi-groupes markoviens. *C.R.Acad.Sci.*, t.322, Série I:165–168, 1996.
- [29] O. Mazet. Classification des semi-groupes de diffusion sur $\mathbb{R}$ associés à une famille de polynômes orthogonaux. In *Séminaire de probabilités, Lectures notes in Mathematics*, volume 1655, pages 40–54. Springer, 1997.
- [30] O. Mazet. Une caractérisation des semigroupes markoviens sur $\mathbb{R}$ associés aux polynômes de Hermite. Preprint, 1997.
- [31] P.A. Meyer. Note sur le processus d’Ornstein-Uhlenbeck. In *Séminaire de probabilités XVI*, volume 920, pages 95–133. Springer, 1982.
- [32] C. Mueller and F. Weissler. Hypercontractivity for the heat semi-group for ultraspherical polynomials and on the n-sphere. *J.Func.Anal.*, 48:252–283, 1982.
- [33] O.V. Sarmanov and Z.N. Bratoeva. Probabilistic properties of bilinear expansions of Hermite polynomials. *Teor. Verujatnost. i Primenen.*, 12:470–481, 1967.
- [34] T. Shiga and S. Watanabe. Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 27:37–46, 1973.

- [35] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [36] D. Stroock. *Probability Theory: an analytic view*. Cambridge University Press, 1993.
- [37] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 4th edition, 1975.
- [38] H.C. Wang. Two-point homogeneous spaces. *Annals of Mathematics*, 55:177–191, 1952.
- [39] E. Wong. The construction of a class of stationary Markov processes. *Amer. Math. Soc., Proc. of the XVIth Symp. of App. Math.*, pages 264–276, 1964.
- [40] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 1968.

