Arch. Math., Vol. 51, 71–80 (1988)

0003-889X/88/5101-0071 $ 3.50/0
© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

Sandwich Theorem und offene Zerlegungen in schwach K-analytischen Banachräumen

Von

DOMINIKUS NOLL

1. Problem. Es sei E ein Banachraum, C, D seien konvexe Teilmengen von E, o sei algebraisch innerer Punkt von $C - D$, kurz

$$o \in (C - D)^i. \tag{1}$$

Es seien $\varphi: C \to \mathbb{R}$ eine konvexe, $\psi: D \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion mit $\psi(x) \leqq \varphi(x)$ für alle $x \in C \cap D$. Gibt es eine stetige, affine Funktion $h: E \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$h(x) \leqq \varphi(x),\ x \in C,\ h(y) \geqq \psi(y),\ y \in D, \tag{2}$$

so sagen wir, das Sandwich Theorem sei gültig.

Die rein algebraische Voraussetzung (1) garantiert stets die Existenz einer affinen Funktion h mit den Eigenschaften (2). Die Schwierigkeit liegt im Nachweis stetiger h. Dies bedarf natürlich zusätzlicher Bedingungen an C, D bzw. φ, ψ.

In [6, Theorem 6] konnten wir zeigen, daß das Sandwich Theorem unter der Voraussetzung (1) gültig ist, wenn E ein separabler Banachraum ist, C, D analytische konvexe Teilmengen von E sind, und φ, ψ Borel-meßbare Funktionen sind. Ebenso konnten wir eine nicht separable Version des Sandwich Theorems beweisen für den Fall zweier abgeschlossener konvexer Teilmengen C, D eines Banachraumes E mit Borel-meßbaren Funktionen φ, ψ. Die Frage, ob unter der Voraussetzung (1) das Sandwich Theorem für beliebige konvexe Borelmengen C, D sowie Borel-meßbare φ, ψ in einem (nicht notwendig separablen) Banachraum gültig bleibt, ist offen.

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir zwei Varianten des Sandwich Theorems im nicht separablen Fall. Insbesondere ergibt sich eine Verallgemeinerung des separablen Sandwich Theorems auf den Fall schwach K-analytischer konvexer Mengen C, D sowie schwach K-analytischer Abbildungen φ, ψ eines (wegen Bedingung (1) damit schwach K-analytischen) Banachraumes E.

2. Analytische und K-analytische Mengen. In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begriffe des analytischen und des K-analytischen Raumes ins Gedächtnis gerufen werden.

Ein Hausdorffscher topologischer Raum heißt bekanntlich analytisch, wenn er stetiges Bild eines separablen, vollständig metrisierbaren Raumes ist. Er heißt K-analytisch, wenn er stetiges Bild eines $K_{\sigma\delta}$-Teilraumes eines topologischen Raumes ist (siehe [1]).

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt analytisch bzw. K-analytisch, wenn sie als Unterraum analytisch bzw. K-analytisch ist.

Ein Banachraum E heißt schwach K-analytisch, wenn E mit der schwachen Topologie $\sigma(E, E')$ ein K-analytischer Raum ist. Entsprechend heißt eine Teilmenge von E schwach K-analytisch, wenn sie mit der Spur der schwachen Topologie K-analytisch ist. Die Klasse der schwach K-analytischen Räume wurde von Talagrand eingeführt (siehe [10, 11, 12]), worauf wir bezüglich Details verweisen. Bemerkenswert ist, daß jeder schwach kompakt erzeugte, und damit insbesondere jeder separable Banachraum schwach K-analytisch ist (siehe [10]).

Bekanntlich ist jede Borelmenge eines separablen Banachraumes analytisch. Demgegenüber ist jedoch nicht jede schwache Borelmenge eines schwach K-analytischen Banachraumes schwach K-analytisch. Die Gültigkeit dieser Aussage für einen Banachraum E ist sogar, wie der folgende Satz zeigt, eine sehr einschränkende Bedingung.

Satz 1. *Es sei E ein schwach kompakt erzeugter Banachraum. Ist jede schwache Borelmenge in E schwach K-analytisch, so ist E separabel.*

Beweis. Nach [3, 1.1] ist in einem schwach kompakt erzeugten Banachraum jede schwache Borelmenge auch eine $\| \|$-Borelmenge. Wir nehmen nun an, E sei nicht separabel. Dann existiert eine Teilmenge $D = \{y_\alpha\colon \alpha < \varkappa\}$ der Mächtigkeit $\varkappa > \aleph_0$ von E so, daß für $\alpha, \beta < \varkappa$, $\alpha \neq \beta$ gilt

$$\| y_\alpha - y_\beta \| \geqq 3 .$$

Wir wählen eine Teilmenge X der $\| \|$-Einheitskugel B, welche nicht schwach K-analytisch ist. Wir können annehmen, daß X die Mächtigkeit $\varkappa$ besitzt, d. h.

$$X = \{x_\alpha\colon \alpha < \varkappa\}.$$

Nun setzen wir $C = \{x_\alpha - y_\alpha\colon \alpha < \varkappa\}$, dann sind C, D beide diskret, also $\| \|$-abgeschlossen, also nach Voraussetzung schwach K-analytisch. Damit ist aber auch $C + D$ schwach K-analytisch, denn $(x, y) \to x + y$ ist eine schwach stetige Abbildung. Wegen $(C + D) \cap B = X$ ist dies ein Widerspruch. □

Die Klasse der schwach K-analytischen Teilmengen eines schwach K-analytischen Banachraumes umfaßt also im allgemeinen nicht die schwachen Borelmengen, wohl aber die (im Sinne von [1]) schwachen K-Borelmengen. Ein weiteres Indiz dafür, daß die Klasse der schwach K-analytischen Mengen in einem schwach K-analytischen Banachraum nicht zu „klein" ist bildet der folgende

Satz 2. *Jede schwache Bairemenge eines schwach K-analytischen Banachraumes ist schwach K-analytisch.*

Beweis. Die σ-Algebra der Bairemengen bezüglich $\sigma(E, E')$ ist definitionsgemäß die kleinste σ-Algebra, bezüglich der sämtliche schwach stetigen, reellwertigen Funktionen auf E meßbar sind. Nach einem Resultat von Edgar (siehe [3, 2.3]) stimmt diese jedoch überein mit der von den $f \in E'$ erzeugten σ-Algebra.

Es sei $f \in E'$, $f \neq o$, und es sei $B \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Dann ist

$$f^{-1}(B) = \operatorname{Ker} f + x_0 B,$$

wenn x_0 gewählt ist mit $f(x_0) = 1$. Nach [10, Théorème 5.1] ist $\operatorname{Ker} f$ schwach K-analytisch, während $x_0 B$ analytisch, also auch schwach K-analytisch ist. Damit ist freilich $f^{-1}(B)$ schwach K-analytisch.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ die Klasse aller $f^{-1}(B)$ mit $f \in E'$ und $B \subset \mathbb{R}$ Borelsch, so sind folglich die Klassen $\mathfrak{M}_\sigma, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}, \mathfrak{M}_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$, sowie $\mathfrak{M}_\delta, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}, \mathfrak{M}_{\delta\sigma\delta}, \ldots$ allesamt Klassen schwach K-analytischer Teilmengen von E, und dies beweist, daß sämtliche schwachen Bairemengen schwach K-analytisch sind. □

3. Erstes Sandwich Theorem. In diesem Abschnitt beweisen wir ein erstes Sandwich Theorem für schwach K-analytische Banachräume. Zur Formulierung benötigen wir zunächst einen Meßbarkeitsbegriff.

Es sei T ein Hausdorffscher topologischer Raum. Eine Funktion $f: T \to \mathbb{R}$ heißt K-analytisch, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{t \in T \mid f(t) < \alpha\}$$

K-analytisch ist.

Satz 3. *Es sei E ein schwach K-analytischer Banachraum, C, D seien konvexe Teilmengen von E mit $o \in (C - D)^i$. Es sei $\varphi: C \to \mathbb{R}$ eine konvexe, $\psi: D \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion mit $\psi(x) \leqq \varphi(x)$ für alle $x \in C \cap D$. φ, $-\psi$ seien schwach K-analytisch. Dann existiert eine stetige, affine Funktion $h: E \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $x \in C$, $y \in D$*

$$h(y) \geqq \psi(y), \quad h(x) \leqq \varphi(x)$$

erfüllt sind.

Beweis. Definiert man eine sublineare Abbildung $\chi: E \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi(z) = \inf \{\lambda(\varphi(x) - \psi(y)) \mid \lambda \geqq 0,\ x \in C,\ y \in D,\ z = \lambda(x - y)\},$$

so existiert nach Hahn-Banach ein lineares Funktional $f: E \to \mathbb{R}$ mit $f \leqq \chi$. Dieses genügt folglich der Beziehung

$$f(x) - \varphi(x) \leqq \alpha \leqq f(y) - \psi(y)$$

für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in C$, $y \in D$. Setzt man also $h = f - \alpha$, so erfüllt h vorbehaltlich des Nachweises seiner Stetigkeit die Erwartungen.

Wir zeigen, daß f stetig ist. Hierzu genügt es natürlich zu zeigen, daß χ stetig ist. Wir beweisen zunächst, daß χ schwach K-analytisch ist.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien mit C_α bzw. D_α die Mengen

$$\{x \in C \mid \varphi(x) < \alpha\} \text{ bzw. } \{y \in D \mid \psi(y) > \alpha\}$$

bezeichnet. Dann sind die C_α, D_α nach Voraussetzung schwach K-analytisch. Vermöge der Gleichung

$$\{z \in E \mid \chi(z) < \alpha\} = \bigcup \{u(C_\beta \times D_\gamma \times [0, \lambda]) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{Q}, \lambda \in \mathbb{Q}_+, \lambda(\beta - \gamma) < \alpha\}$$

folgt hieraus die schwache K-Analytizität von χ, wenn u die Abbildung

$$(x, y, \eta) \to \eta(x - y)$$

bezeichnet.

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes T heißt universell meßbar, wenn sie für jedes endliche Borelmaß μ auf T Element der Carathéodory-Vervollständigung der Borel σ-Algebra ist. Analog zum klassischen Fall gilt nun der folgende

Hilfssatz 1. *Jede schwach K-analytische Teilmenge C des Banachraumes E ist schwach universell meßbar.*

Beweis. C sei schwach K-analytisch im Banachraum E. Nach [4, Thm. 14] gibt es eine Familie $(C(n_1, \ldots, n_k) \mid k, n_i \in \mathbb{N})$ von Teilmengen von C mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $C = \bigcup \{C(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(2) $C(n_1, \ldots, n_k) = \bigcup \{C(n_1, \ldots, n_k, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ für $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ fest.
(3) Für jede Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ in $\mathbb{N}$ ist $\bigcap \{\overline{C(n_1, \ldots, n_k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ schwach kompakt und in C enthalten, wobei der Abschluß bezüglich $\sigma(E, E')$ gebildet ist.

Es sei nun μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf E bezüglich der schwachen Topologie. Wir definieren eine Funktion λ auf $\mathfrak{P}E$ durch

$$\lambda(A) = \inf \{\mu(B): A \subset B \in \mathfrak{B}\},$$

wenn $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der schwachen Borelmengen bezeichnet. Somit gibt es zu jedem $A \subset E$ ein $B \in \mathfrak{B}$ mir $\lambda(A) = \mu(B)$. Weiter gilt für jede Folge $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ die Beziehung

$$\lambda(A) \leqq \sup_n \lambda(A_n).$$

Gemäß (1) ist $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} C(k)$, also gibt es zu festem $\varepsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda(C) \leqq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n_1} C(k)\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter gilt gemäß (2) und dem obigen $\bigcup_{k=1}^{n_1} C(k) = \bigcup_{k=1}^{n_1} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{j} C(k, i)$, also gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n_1} C(k)\right) \leqq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n_1} \bigcup_{i=1}^{n_2} C(k, i)\right) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Induktiv erhält man eine Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so, daß für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n_1} \cdots \bigcup_{j=1}^{n_r} C(k, \ldots, j)\right) \leqq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n_1} \cdots \bigcup_{j=1}^{n_r} \bigcup_{i=1}^{n_{r-1}} C(k, \ldots, j, i)\right) + \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}.$$

Faßt man diese Ungleichungen zusammen, so ergibt sich für jedes r mit der Abkürzung

$$D_r = \bigcup_{k=1}^{n_1} \cdots \bigcup_{j=1}^{n_r} C(k, \ldots, j)$$

die Abschätzung

$$\lambda(C) \leqq \lambda(D_r) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{2^i} \leqq \lambda(D_r) + \varepsilon.$$

Wir wählen $C_0 \in \mathfrak{B}$ mit $\lambda(C) = \mu(C_0)$, $C \subset C_0$, dann gilt

$$\mu(C_0) \leqq \lambda(D_r) + \varepsilon \leqq \mu(\bar{D}_r) + \varepsilon,$$

also wegen $D_r \supset D_{r+1}$ auch

$$\mu(C_0) \leqq \mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{D}_r\right) + \varepsilon,$$

wobei jeweils der Abschluß bezüglich $\sigma(E, E')$ zu bilden ist.

Setzt man also $D(\varepsilon) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{D}_r$, so gilt aufgrund der Bedingung (3) und unter Verwendung von Königs Lemma die Beziehung $C_0 \subset C \subset D(\varepsilon)$ mit $\mu(D(\varepsilon) \setminus C_0) \leqq \varepsilon$. Setzt man weiter $D_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{1}{n}\right)$, so ist $C_0 \subset C \subset D_0$, $\mu(D_0 \setminus C_0) = 0$, d. h. C ist Element der Carathéodory-Vervollständigung von $\mathfrak{B}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Damit können wir zum Beweis von Satz 3 zurückkehren. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{z \in E: \chi(z) < \alpha\}$ schwach K-analytisch, nach Hilfssatz 1 also schwach universell meßbar. Nach einem Resultat von Edgar [3, 1.4] stimmen jedoch die schwach universell meßbaren Mengen mit den bezüglich der Normtopologie universell meßbaren überein. Hieraus folgt, daß χ meßbar ist bezüglich der Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und der σ-Algebra der (in der Norm) universell meßbaren Mengen auf E. Es sei nun

$$B_n = \{z \in E: |\chi(z)| \leqq n\},$$

dann ist B_n universell meßbar und es gilt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Aufgrund des folgenden Hilfssatzes 2 is also für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Menge $U = B_{n_0} - B_{n_0}$ eine Nullumgebung in E. Da χ auf U durch $2n_0$ beschränkt ist, folgt hieraus die Stetigkeit von χ. Damit ist der Beweis von Satz 3 abgeschlossen.

Hilfssatz 2. (Christensen [2, Thm. 7.1]). *Es sei E ein Banachraum, $B_1, B_2, \ldots$ eine Folge universell meßbarer Teilmengen von E mit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $U = B_{n_0} - B_{n_0}$ Nullumgebung in E ist.* □

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem einfachen aber nützlichen Invarianzresultat für die Klasse der K-analytischen Funktionen.

Satz 4. *Es seien S, T Hausdorffsche topologische Räume, $f: S \times T \to \mathbb{R}$ sei eine K-analytische Funktion. Dann ist auch die Funktion $f^{\perp}: T \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$f^{\perp}(t) = \inf_{s \in S} f(s, t)$$

K-analytisch.

Beweis. Bezeichnet p_T die Projektionsabbildung $S \times T \to T$, so ist offensichtlich

$$\{t \in T \mid f^{\perp}(t) < \alpha\} = p_T(\{(s, t) \mid f(s, t) < \alpha\}),$$

und hieraus ergibt sich die Behauptung, da Bilder K-analytischer Räume unter stetigen Abbildungen wieder K-analytisch sind. □

Mit Hilfe von Satz 4 läßt sich einfach zeigen, daß das Infimum einer Folge K-analytischer Funktionen wieder K-analytisch ist.

4. Offene Zerlegungen. In diesem Abschnitt soll ein weiteres Sandwich Theorem für schwach K-analytische Banachräume bewiesen werden. Hierzu benötigen wir den Begriff der offenen Zerlegung.

Es sei E ein Banachraum, C, D seien konvexe Teilmengen von E mit $o \in (C - D)^i$ und $o \in C \cap D$. Das Paar (C, D) induziert eine offene Zerlegung von E, wenn zu jeder Nullfolge (z_n) in E ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und Nullfolgen (x_n) in C, (y_n) in D existieren so, daß (z_n) eine Zerlegung

$$z_n = x_n - y_n,$$

$n \geqq n_0$, gestattet.

Der Begriff der offenen Zerlegung ist für den Fall konvexer Kegel C, D mit Spitze o vertraut (siehe etwa [9], [5]). Die hier gegebene Definition stellt eine naheliegende Verallgemeinerung auf den Fall beliebiger konvexer Mengen dar.

In [7] konnten wir zeigen, daß in einem separablen Banachraum E jedes Paar (C, D) analytischer, konvexer Teilmengen von E mit $o \in (C - D)^i$ eine offene Zerlegung induziert. Dies läßt sich auf den nichtseparablen Fall wie folgt verallgemeinern.

Satz 5. *Es sei E ein schwach K-analytischer Banachraum, C, D seien schwach K-analytische, konvexe Teilmengen von E mit $o \in (C - D)^i$ und $o \in C \cap D$. Dann induziert (C, D) eine offene Zerlegung von E.*

Beweis. Es sei B die Einheitskugel in E, $\tilde{B}$ bezeichne die konvexe, absorbierende Menge $(B \cap C) - (B \cap D)$. Es gilt zu zeigen, daß $\tilde{B}$ eine Nullumgebung in E ist.

Es sei q das Minkowski Funktional von $\tilde{B}$, dann ist $q: E \to \mathbb{R}$ sublinear. Es sei E_0 ein eindimensionaler linearer Teilraum von E, $f_0: E_0 \to \mathbb{R}$ sei linear, und es gelte $f_0 \leqq q$. f_0 ist stetig auf E_0, während q schwach K-analytisch ist. Letzteres folgt aus der Beziehung

$$\{x \in E: q(x) < \alpha\} = \bigcup \{\beta \tilde{B}: \beta \in \mathbb{Q}_+, \beta < \alpha\}.$$

Damit können wir unser Sandwich Theorem anwenden und erhalten eine stetige, lineare Fortsetzung f von f_0 auf ganz E, die nach wie vor $f \leqq q$ erfüllt. Da E_0 und f_0 mit

$f_0 \leqq q$ beliebig waren, ist gezeigt, daß q unterhalb halbstetig ist. Da E ein Banachraum ist, ist q mithin sogar stetig, also ist $\tilde{B}$ eine Nullumgebung in E. □

Nun sind wir in der Lage, das folgende Sandwich Theorem zu beweisen.

Satz 6. *Es sei E ein schwach K-analytischer Banachraum, C, D seien schwach K-analytische, konvexe Teilmengen von E mit $o \in (C - D)^{\iota}$. Es seien $\varphi: C \to \mathbb{R}$ eine konvexe, $\psi: D \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion mit $\psi(x) \leqq \varphi(x)$ für alle $x \in C \cap D$. Es existiere ein $x_0 \in C \cap D$ so, daß φ an x_0 von oben, ψ an x_0 von unten halbstetig ist. Dann gilt die Aussage des Sandwich Theorems, d. h. es existiert eine stetige, affine Funktion $h: E \to \mathbb{R}$ so, daß für alle $x \in C$, $y \in D$ die Beziehungen*

$$h(y) \geqq \psi(y), \quad h(x) \leqq \varphi(x)$$

erfüllt sind.

Beweis. Wir können annehmen, daß $x_0 = o$ ist, da wir widrigenfalls C, D, φ, ψ durch $C - x_0$, $D - x_0$, φ_0, ψ_0 ersetzen können, wobei

$$\varphi_0(x - x_0) = \varphi(x), \quad \psi_0(y - x_0) = \psi(y)$$

gesetzt sei. Nach Voraussetzung gibt es nun eine Nullumgebung U in E so, daß für alle $x \in U \cap C$ und alle $y \in U \cap D$ gilt

$$\varphi(x) \leqq \alpha, \quad \psi(y) \geqq -\alpha$$

für ein $\alpha > 0$. Wir behaupten, daß die im Beweis von Satz 3 definierte Funktion $\chi: E \to \mathbb{R}$ damit auf einer Nullumgebung nach oben durch 2α beschränkt ist. Analog dem Beweis von Satz 3 folgt dann hieraus die Behauptung.

Annahme, χ sei auf keiner Nullumgebung durch 2α nach oben beschränkt. Dann existiert eine Nullfolge (z_n) mit $\chi(z_n) > 2\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$. Da (C, D) nach Satz 5 eine offene Zerlegung von E induziert, gibt es Nullfolgen (x_n) in C, (y_n) in D mit $z_n = x_n - y_n$. Nach Definition der Abbildung χ gilt aber

$$\chi(z_n) \leqq \varphi(x_n) - \psi(y_n),$$

und dies bedeutet wegen $x_n \in U$, $y_n \in U$ für $n \geqq n_0$ einen Widerspruch. □

Bemerkung. Man beachte, daß die Voraussetzung über φ (bzw. ψ) nicht besagt, daß die durch $\varphi(x) = -\infty$ (bzw. $\psi(y) = \infty$) für $x \notin C$ (bzw. $y \notin D$) auf ganz E definierte, $\bar{\mathbb{R}}$-wertige Funktion im üblichen Sinn von oben (bzw. von unten) halbstetig ist. Die Voraussetzung ist wesentlich schwächer, da über die Menge C (bzw. D) nichts ausgesagt wird.

5. Konvexe Optimierung. In diesem letzten Paragraphen wollen wir eine Anwendung des Sandwich Theorems auf die konvexe Optimierung herleiten.

Es sei E ein Banachraum, C sei eine konvexe Teilmenge von E, und $\varphi: C \to \mathbb{R}$ sei eine konvexe Funktion. Es sei weiter F ein geordneter Banachraum (siehe etwa [9]) mit positivem Ordnungskegel F_+. Die durch F_+ induzierte Ordnung werde durch $\leqq$ bezeichnet.

F sei normal geordnet. Es sei D eine weitere konvexe Teilmenge von E mit $C \subset D$, $\chi: D \to F$ sei ein konvexer Operator. Wir betrachten das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } \varphi(x),\ x \in C \\ (\mathrm{P}) \quad &\text{unter der Nebenbedingung} \\ &\chi(x) \leqq 0. \end{aligned}$$

Ein stetiges, positives Funktional $f \in F'$ heißt Lagrange Multiplikator für (P), falls mit

$$\alpha = \inf_{x \in C,\, \chi(x) \leqq 0} \varphi(x) \in \bar{\mathbb{R}}$$

die Beziehung

$$\inf_{x \in C} (\varphi(x) + f(\chi(x))) = \alpha$$

erfüllt ist. Die Existenz von Lagrange Multiplikatoren folgt gewöhnlich unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen über das Problem (P). Klassisch ist etwa Slaters Bedingung (siehe [8]). Im folgendem wollen wir eine schwächere Regularitätsbedingung untersuchen, welche gleichfalls die Existenz von Lagrange Multiplikatoren für (P) garantiert.

Das Problem (P) genügt Rockafellars Bedingung, wenn zu jedem $y \in F$ ein $x \in C$ und ein $\lambda > 0$ existieren mit $\chi(x) \leqq \lambda y$.

Die Namenswahl bezieht sich auf die erstmalige Verwendung dieser Bedingung in [8]. Offensichtlich ist Rockafellars Bedingung eine Folge von Slaters Bedingung. Rockafellars Bedingung kann aber im Gegensatz zu Slaters Bedingung auch dann erfüllt sein, wenn der Ordnungskegel F_+ keine inneren Punkte besitzt.

Satz 7. *Es sei C eine schwach K-analytische Teilmenge des Banachraumes E, $\varphi: C \to \mathbb{R}$ sei konvex und schwach K-analytisch. Es sei F ein schwach K-analytischer, normal geordneter Banachraum. Die konvexe Abbildung $\chi: C \to F$ besitze schwach K-analytischen Epigraphen*

$$\mathrm{Epi}(\chi) = \{(x, y) \in C \times F: y \geqq \chi(x)\}.$$

Es gelte Rockafellars Bedingung für das Problem (P). *Dann existiert ein Lagrange Multiplikator für* (P).

Beweis. Man beachte, daß als Folge von Rockafellars Bedingung sicherlich $-\infty \leqq \alpha < \infty$ gilt. Es sei zunächst $\alpha = -\infty$. Dann ist offensichtlich jedes positive, stetige lineare Funktional f auf F ein Lagrange Multiplikator für (P). Es sei also $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren konvexe Teilmengen X, Y von $F \times \mathbb{R}$ durch

$$X = \{0\} \times \mathbb{R},$$

$$Y = \{(y, \mu) \mid \exists x \in C\, \chi(x) \leqq y,\ \varphi(x) \leqq \mu\}.$$

Die Abbildungen $\xi: X \to \mathbb{R}$, $\eta: Y \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\xi(0, \mu) = \mu, \quad \eta(y, \mu) = \alpha,$$

$(0, \mu) \in X$, $(y, \mu) \in Y$. Offensichtlich ist ξ konvex, η konkav, und es gilt $\eta(0, \mu) = \alpha \leqq \xi(0, \mu)$ für alle $(0, \mu) \in Y$ nach Definition von α. Rockafellars Bedingung besagt gerade, daß $(0, 0)$

algebraisch innerer Punkt von $X - Y$ ist. Ist nämlich $(y, \mu) \in F \times \mathbb{R}$, so wählen wir $x \in C$ und $\lambda > 0$ mit $\chi(x) \leqq \lambda(-y)$. Damit ist $(-\lambda y, \varphi(x)) \in Y$, $(0, \lambda \cdot \mu + \varphi(x)) \in X$ und es gilt

$$(y, \mu) = \frac{1}{\lambda}[(0, \lambda \cdot \mu + \varphi(x)) - (-\lambda y, \varphi(x))],$$

woraus sich $(0, 0) \in (X - Y)^i$ ergibt.

Vorbehaltlich des Nachweises, daß Y eine schwach K-analytische Teilmenge von $F \times \mathbb{R}$ ist, läßt sich nun eines der beiden Sandwich Theoreme anwenden und wir erhalten eine stetige, affine Funktion $h: F \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(y, \mu) \geqq \alpha, \quad h(0, \mu) \leqq \mu$$

für alle $(y, \mu) \in Y$ und alle $\mu \in \mathbb{R}$. h besitzt eine Darstellung

$$h(y, \mu) = f(y) + \beta\mu + \gamma$$

mit $f \in F'$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Aus $\beta\mu + \gamma \leqq \mu$ für alle μ folgt sofort $\beta = 1$, $\gamma \leqq 0$. Aus $y \geqq 0$, $x \in C$, $\chi(x) \leqq 0$ ergibt sich $(y, \varphi(x)) \in Y$, also

$$\alpha \leqq f(y) + \varphi(x) + \gamma,$$

woraus wiederum

$$\alpha \leqq f(y) + \alpha + \gamma$$

oder kurz

$$f(y) \geqq -\gamma \geqq 0$$

folgt, wenn man zum Infimum übergeht. Schließlich gilt für $x \in C$ allemal $(\chi(x), \varphi(x)) \in Y$, woraus wir

$$f(\chi(x)) + \varphi(x) \geqq \alpha - \gamma \geqq \alpha$$

folgern. Das bedeutet, f ist der gesuchte Lagrange Multiplikator. Es bleibt also zu zeigen, daß Y schwach K-analytisch ist.

Wir zeigen zunächst, daß auch φ schwach K-analytischen Epigraphen besitzt. Dies folgt aus

$$\operatorname{Epi}(\varphi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\eta \in \mathbb{Q}} \left[\left\{x: \eta > \varphi(x) - \frac{1}{n}\right\} \times \mathbb{R}\right] \cap \left[C \times \left(\eta - \frac{1}{m}, \eta + \frac{1}{m}\right)\right].$$

Bezeichnet nun p die Projektionsabbildung $E \times F \times \mathbb{R} \to F \times \mathbb{R}$, so folgt aus

$$Y = p([\operatorname{Epi}(\chi) \times \mathbb{R}] \cap [\operatorname{Epi}(\varphi) \times F])$$

in der Tat, daß Y schwach K-analytisch ist. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen. □

Literaturverzeichnis

[1] G. Choquet, Ensembles K-analytiques et K-sousliniens. Cas général et cas métrique. Ann. Inst. Fourier **9**, 75–89 (1959).

[2] J. P. R. Christensen, Topology and Borel Structure. Notas Mat. **51**, New York 1974.

[3] G. A. Edgar, Measurability in Banach Spaces I. Indiana Univ. Math. J. **26**, 663–677 (1977).

[4] Z. FROLÍK, On the desciptive theory of sets. Czech. Math. J. (88) **13,** 335–359 (1963).
[5] G. JAMESON, Ordered Linear Spaces. LNM **141,** Berlin-Heidelberg-New York 1970.
[6] D. NOLL, Continuous Affine Support Mappings for Convex Operators. J. Funct. Anal. **76,** 411–431 (1988).
[7] D. NOLL, Sandwich Theorems, Supportability, and the Separation of Convex Sets. Manuscript eingereicht.
[8] R. T. ROCKAFELLAR, Conjugate duality and optimization. Regional conference series in Appl. Math. **16,** SIAM, Philadelphia 1974.
[9] H. H. SCHAEFER, Topological Vector Spaces. New York 1971.
[10] M. TALAGRAND, Espaces de Banach faiblements K-analytiques. Ann. of Math. **110,** 407–438 (1979).
[11] M. TALAGRAND, Espaces de Banach faiblements K-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284,** A745–A748 (1977).
[12] M. TALAGRAND, Sur les espaces de Banach faiblements K-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **285,** A119–A122 (1977).

Eingegangen am 27. 3. 1987

Anschrift des Autors:

Dominikus Noll
Universität Stuttgart
Mathematisches Institut B
Pfaffenwaldring
D-7000 Stuttgart 80