

Présentation des travaux IMT pour ANR MATURATION

Fabrice Deluzet, Jacek Narski, Paul Pace



12 mars 2026

1. Rappel

1.1 La méthode Particle-In-Cell

1.2 La méthode de recombinaison parcimonieuse (Sparse)

2. Décomposition de domaine

2.1 Algorithme avec DD

2.2 Résolution de Poisson

2.3 Transfert des particules

2.4 Test de performance

3. Conclusion

On s'intéresse au problème suivant (*Vlasov-Poisson*) :

$$\partial_t \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{f} = 0 \quad (\text{Vlasov})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (\text{Poisson})$$

Où $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ est la fonction de distribution définie dans l'espace des phases : position, vitesse, temps (donc **6 + 1 dimensions**).

La densité de charge est $\rho = n_i - q \int_{\Omega_v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$,

avec $q, m; \epsilon_0, n_i$, respectivement la charge électrique et la masse des électrons; la permittivité diélectrique du vide, la densité de particules (ions).

Et $\mathbf{E}$ est le champ électrique, $\mathbf{B}$ le champ magnétique (constant).

Rappel/ -Méthode PIC Standard

La méthode **Particle In Cell** (PIC) est une approche mixte, Eulerienne-Lagrangienne :

- Résolution de *Poisson* sur grille par **Différences Finies** (3D).
- Résolution de *Vlasov* par l'intégration des trajectoires de **particules numériques**.

La fonction de distribution est échantillonnée par un nombre limité de particules numériques :
$$F_N(x, v, t) = \sum_{p=1}^{N_p} \omega_p F_{x_p}(x) F_{v_p}(v)$$

Avantages :

Meilleure mise à l'échelle

Rapidité d'exécution

Mise en œuvre simple

Parrallélisation naturelle

Interprétabilité physique du modèle

Conservation de quantités physiques

Inconvénients :

Méthode Aléatoire

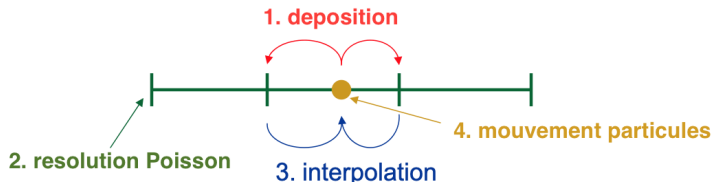
Grille coûteuse en mémoire

Particules coûteuses en mémoire

Algorithm 1: PIC method

Data: The particles' initial position and speed : x_p, v_p

```
1 for  $t \leftarrow 0$  to  $T_{end}$  do
2   Deposit charge from particles to grid  $\rho(x) = \sum_{p=1}^N \frac{q}{N} W(|x - x_p|)$ 
3   Poisson solving and Field computation  $\Delta\phi = \rho$  ;  $\nabla\phi = E$ 
4   Interpolate from grid to particles  $E_p = \sum_{i \in \text{grid}} E(x_i) W(|x_p - x_i|)$ 
5   Move particles along characteristics  $\frac{dx_p}{dt} = v_p$  ;  $\frac{dv_p}{dt} = \frac{q}{m} (E + v \times B)$ 
6 end
```



Rappel/ -Les limites des méthodes PIC

Bruit numérique > Erreur de grille

$$\hat{\rho}_{h_n, N} - \rho = \underbrace{(\hat{\rho}_{h_n, N} - \mathbb{E}(\hat{\rho}_{h_n, N}))}_{\text{Bruit numérique}} + \underbrace{(\mathbb{E}(\hat{\rho}_{h_n, N}) - \rho)}_{\text{Erreur de grille}}$$

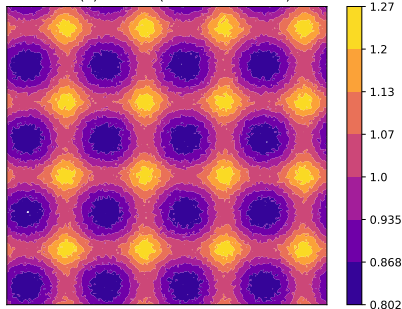
Erreur de grille : Valeur la plus probable

Bruit numérique : Écart moyen à la valeur la plus probable

$$\propto h_n^{-1}$$

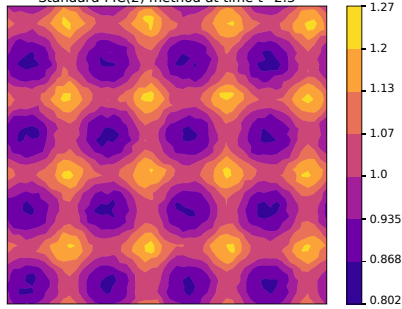
$$\propto Nh_n$$

High Resolution PIC(2) method (reference solution) at time t=2.5



Solution de référence

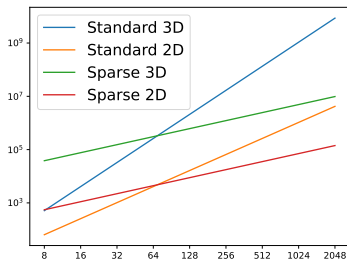
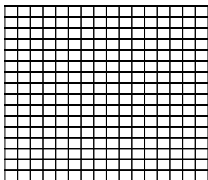
Standard-PIC(2) method at time t=2.5



Méthode PIC Standard

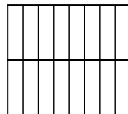
Rappel/ - Technique de Recombinaison Sparse

grid_(4,4)

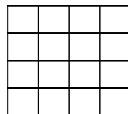


Nombre de cellules par taille de grille

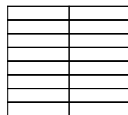
grid_(3,1)



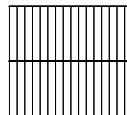
grid_(2,2)



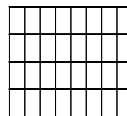
grid_(1,3)



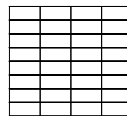
grid_(4,1)



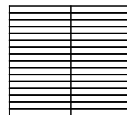
grid_(3,2)



grid_(2,3)



grid_(1,4)



Sparse grids

Rappel/ -Réduction du bruit

Réduire le bruit numérique et gagner en efficacité

Algorithm 2: Sparse-PIC

Data: The particles' initial position and speed

```
1 for  $t \leftarrow 0$  to  $T_{end}$  do
2   for each  $g \in Grids$  do
3     Deposit charge from particles to the grid  $g$ 
4     Poisson Solving and Field computation using FDM on  $g$ 
5     Interpolate and recombine from grid  $g$  to particles
6   end
7   Move particles along characteristics
8 end
```

Result: Recombine the quantities on the full grid (visualisation only)

Réduction du bruit numérique :

Sparse PIC :

$$(Nh_n)^{-\frac{1}{2}} |\log(h_n)|^{d-1} \|\rho\|_\infty$$

Standard PIC :

$$(Nh_n^d)^{-\frac{1}{2}} \|\rho\|_\infty$$

Rappel/ -Méthode Sparse PIC

Comparaison avec PIC

Avantages :

- Réduction du bruit
- Méthode qui présente un autre niveau de parallélisme
- Bien meilleure efficacité, en particulier en 3D
- Besoin de moins de particules à précision équivalente
- Grilles nécessitant peu de mémoire

Inconvénients :

- Erreur de grille détériorée; Analyse comparative :

$$h_n^2 \sum_{i=1}^d \|\partial_i^2 \rho\|_\infty \text{ (st.)} \quad \text{Contre} \quad h_n^2 |\log(h_n)|^{d-1} \|\partial_1^2 \dots \partial_d^2 \rho\|_\infty \text{ (sp.)}$$

- Dépendance au dérivées croisées d'ordre plus élevé
=> besoin de plus de régularité
- Présence d'une dégradation supplémentaire $|\log(h_n)|^{d-1}$

- Perte de positivité

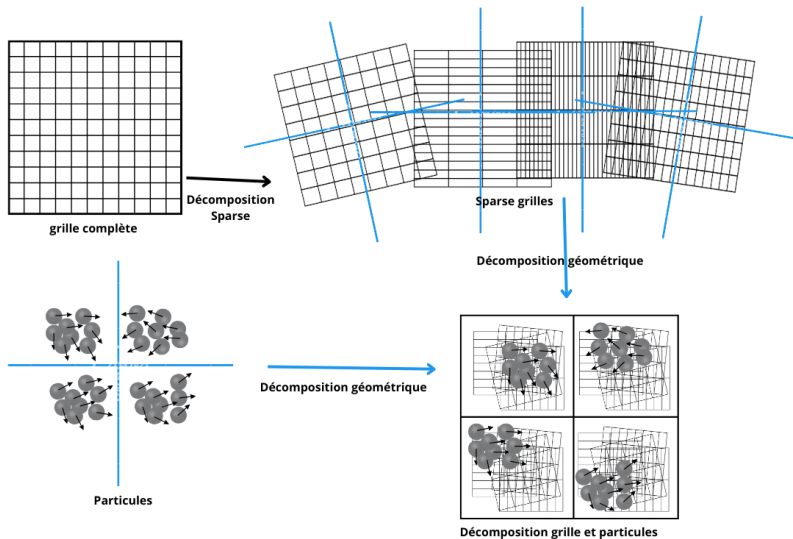
Décomposition de domaine/ -Passage à l'échelle



Centre de Calcul Haute
Performance (HPC) **CALMIP**



Décomposition de domaine/ -Décomposition de Domaine



Algorithm 3: Sparse-PIC with Domain Decomposition

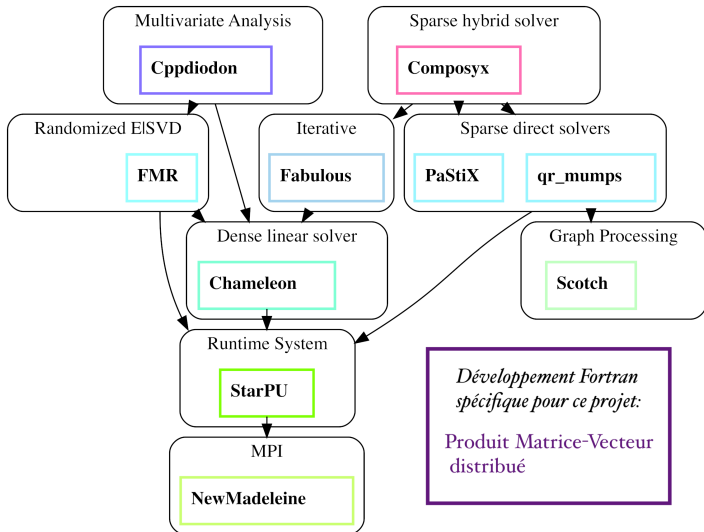
Data: The particles' initial position, speed and their subdomain

```
1 for  $t \leftarrow 0$  to  $T_{end}$  do
2   for  $s \in Subdomains$  do
3     for each  $g \in Grids$  do
4       Deposit charge from particles to grid  $g$ 
5       Poisson Solving using DD method on  $g$ 
6       Field computation using FDM with Interface interaction
7       Interpolate and recombine from grid  $g$  to particles
8     end
9   end
10  Move particles along characteristics
11  Exchange particles crossing the subdomain boundaries
12 end
```

Result: Recombine the quantities on the full grid

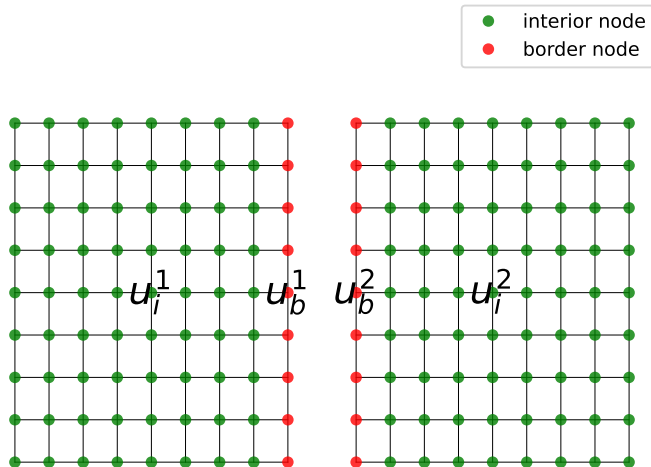
Décomposition de domaine/ -Composyx

Outil formulé en élément fini agglomérant des implémentations efficaces de nombreuses méthodes de décomposition de domaine.



Décomposition de domaine/ -Différenciation du champs

On utilise ainsi les valeurs d'interface pour calculer les contributions des bords qui sont transmis avec les sous-domaines voisins.



Décomposition de domaine/ -Échanges MPI

A des fin de visualisation, ces vérifications sont effectuées en simili 2D

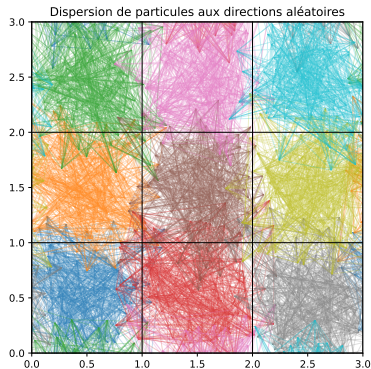


Figure – Diffusion des particules sur les sous-domaines voisins après plusieurs itérations

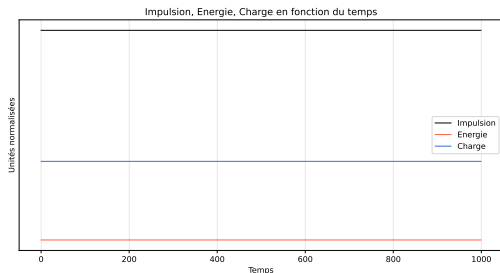
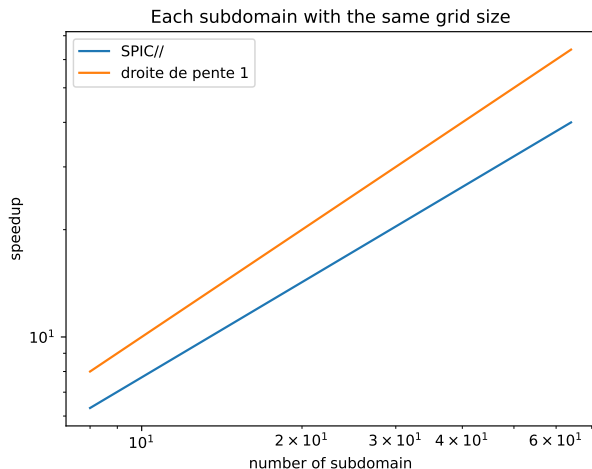


Figure – Préservation des quantités physiques : Impulsion, Energie, Charge (unités arbitraires)

Décomposition de domaine/ -Scalabilité faible



Court terme :

- Ajouter une couche de parallélisme OpenMP correspondant à des patches particules / sous-grilles
- Sortir la méthode des benchmarks classiques et expérimenter sur des cas physiques plus ambitieux

Moyen terme :

- Partager/Diffuser la méthode
- Explorer les méthodes hiérarchiques