Méthodes PIC-Parcimonieuses d'ordre élevées
High Order Sparse-PIC methods

Paul Pace
paul.pace@math.univ-toulouse.fr

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
de TOULOUSE

2 Avril 2024

On s'intéresse au problème suivant (*Vlasov-Poisson*) :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \tag{Vlasov}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ and } \mathbf{E} = -\nabla \Phi \tag{Poisson}$$

Où $f(x, v, t)$ est la fonction de distribution définie dans l'espace des phases : position, vitesse, temps (donc 7 dimensions).
Et la densité de charge $\rho = n_i - q \int_{\Omega_v} f(x, v, t) dv$
Avec q, m, ϵ_0, n_i, respectivement la charge électrique, la masse, la permittivité diélectrique du vide, la densité de particules.
Et $\boldsymbol{E}$ le champ électrique, $\boldsymbol{B}$ le champ magnétique (constant).

La méthode **Particle In Cell** (PIC) est une approche mixte, Eulerienne-Lagrangienne :
• Résolution de *Poisson* sur grille par Différences Finies.
• Résolution de *Vlasov* par l'intégration des trajectoires de particules numériques.

1. **Déposition** de charge,
des particules vers la grille

2. **Résolution de *Poisson***
sur la grille

3. **Interpolation** :
de la grille vers les particules

4. **Avancée** des particules

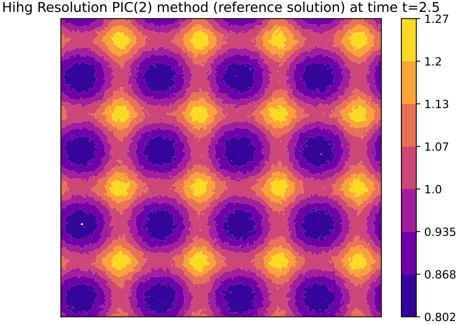
Avantages :

Meilleure mise à l'échelle
Rapidité d'exécution
Mise en oeuvre simple
Interprétabilité physique du modèle
Conservation de quantités physiques

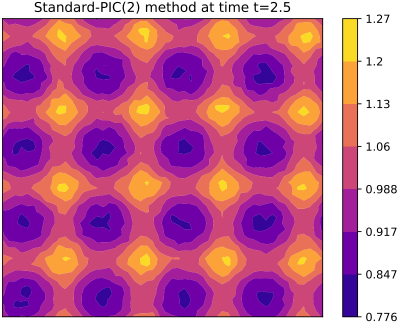
Inconvénients :

Méthode Aléatoire

$$\hat{\rho}_{h_n,N} - \rho = \underbrace{\left(\hat{\rho}_{h_n,N} - \mathbb{E}(\hat{\rho}_{h_n,N})\right)}_{\text{Bruit numérique}} + \underbrace{\left(\mathbb{E}(\hat{\rho}_{h_n,N}) - \rho\right)}_{\text{Erreur de grille}}$$

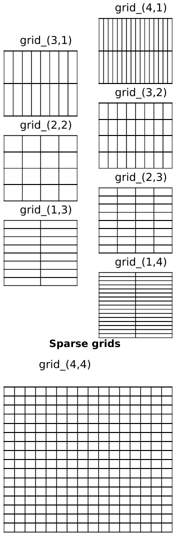


Solution de référence



Méthode PIC Standard

Comment réduire le bruit et gagner en efficacité



Réduction de bruit :

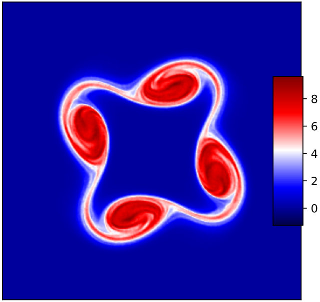
Sparse :

$$(Nh_n)^{-\frac{1}{2}}|\log h_n|^{d-1}\|\rho\|_\infty$$

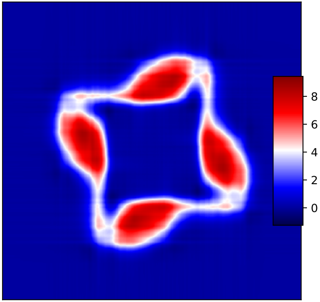
Standard :

$$(Nh_n^d)^{-\frac{1}{2}}\|\rho\|_\infty$$

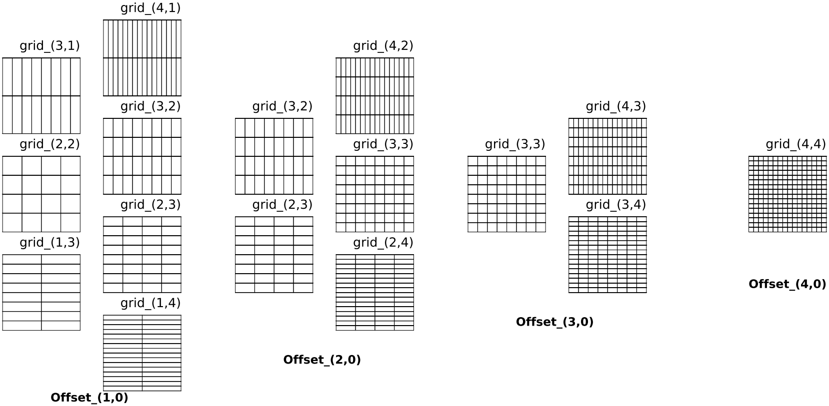
Illustration de cas inhomogène : instabilité Diochotron



PIC Standard



Sparse-PIC



Plus le niveau minimal de résolution des grilles augmente, plus on réduit l'erreur de grille.

La méthode Offset compense donc le problème mais on revient en arrière sur nos points forts de la méthode Sparse.

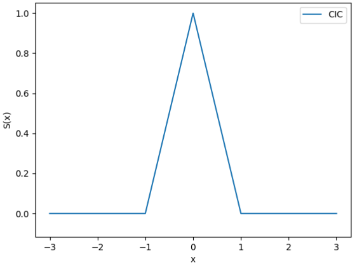
Ce qui implique quelques limitations :

- Arbitrage nécessaire entre le bruit et la précision de la maille
- On perd au passage certaines des propriétés sparse (efficacité, légèreté en mémoire)

On se demande donc si on ne pourrait pas améliorer l'erreur de grille sans dégrader la réduction de bruit apportée par les méthodes Sparse.

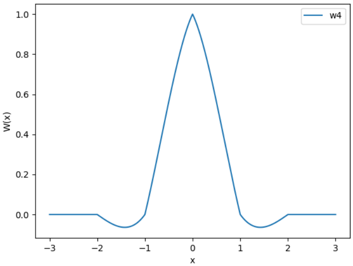
Comment obtenir un schéma d'ordre 4 ?

Il faut à la fois remplacer les Splines linéaires W^2 par une fonction W^4 et aussi résoudre l'équation de *Poisson* avec un schéma Différence Finies exact à l'ordre 4.



La fonction W^2 ou "Cloud in Cell"

$\longrightarrow$



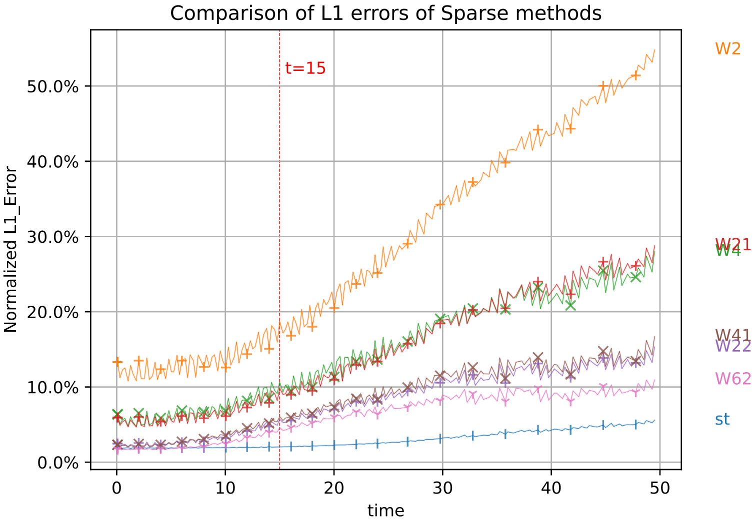
La fonction W^4

Avantages :
Erreur d'Ordre 4
réduction de bruit préservée

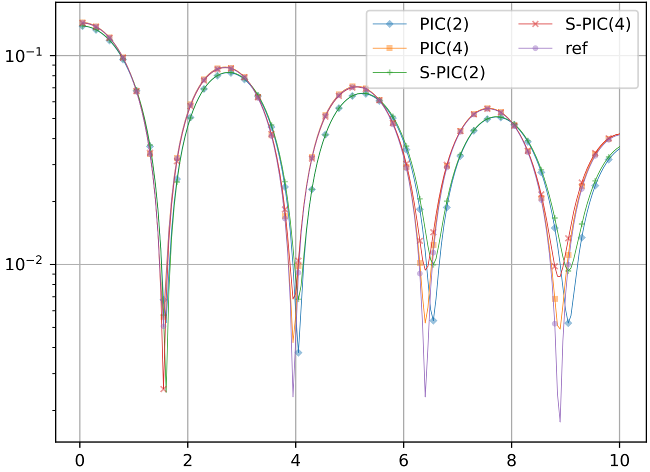
Inconvénients :
Taille de support augmentée
Perte de positivité sur chaque grille

-Cas Défavorable : Instabilité Diochotron

Correction partielle



Amélioration de la méthode Sparse



Avantage Méthode HO-SPIC :

- Combinaison efficace avec la technique offset
- Compense partiellement les défauts de la méthode Sparse dans les cas défavorables
- Renforce la méthode Sparse dans les cas favorables

Limitations :

- Intensité arithmétique augmentée
- Support élargi : Nécessite des conditions de bord adaptées
- Plus d'amélioration significative au delà de l'ordre 6

Conclusion/ -Perspectives

Que faire maintenant ?

Pour prolonger ces travaux, de nombreuses possibilités s'ouvrent à nous :

- Décomposition de domaine
- Implémentations efficaces de la méthode
- Simulation 3 Dimensions
- Relâcher certaines hypothèses initiales
- D'autres méthode préservant la positivité (Sparse Grid hierarchic)