

Présentation ANR
Sparse grid reconstructions for High Order
Particle-In-Cell methods

Paul Pace
Fabrice Deluzet, Clément Guillet, Jacek Narski

3 octobre 2023

- 0. Sommaire
 - I. Particle In Cell
 - II. Développement Sparse
 - III. Montée en Ordre
 - IV. Mise en oeuvre Numérique
 - X. Conclusion

On s'intéresse au problème suivant (*Vlasov-Poisson*) :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + v \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (\text{Vlasov})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (\text{Poisson})$$

Où $f(x, v, t)$ la fonction de distribution définie dans l'espace des phases : position, vitesse, temps (donc **7 dimensions**).

Et la densité de charge $\rho = n_i - q \int_{\Omega_v} f(x, v, t) dv$

Avec q, m, ϵ_0, n_i , respectivement la charge électrique, la masse, la permittivité diélectrique du vide, la densité de particules.

Et \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique (constant).

Particle In Cell/ -Méthode PIC

La méthode **Particle In Cell** (PIC) est une approche mixte, Eulerienne-Lagrangienne :

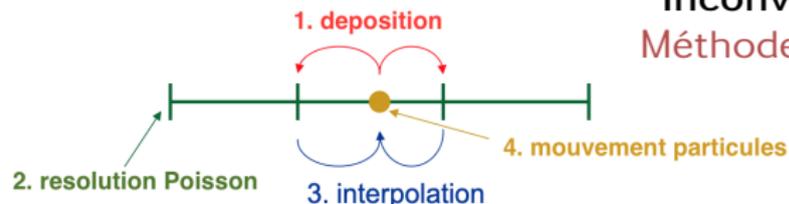
- Résolution de *Poisson* sur grille par **Différences Finies**.
- Résolution de *Vlasov* via la **simulation de particules** numériques.

1. **Déposition** de charge,
des particules vers la grille

2. Résolution de *Poisson*
sur la grille

3. **Interpolation** :
de la grille vers les particules

4. **Avancée** des particules



Avantages :

Meilleure mise à l'échelle

Rapidité d'exécution

Mise en oeuvre simple

Interprétabilité physique du modèle

Conservation de quantités physiques

Inconvénients :

Méthode Aléatoire

Le principe des méthodes PIC est d'approcher la densité ρ par une densité empirique :

$$\rho_{h_n, N}(x, t) = \sum_{p=1}^N q\omega_p \delta(x - x_p(t))$$

Avec N le nombre de particules, et ω_p leur poids

On peut ainsi définir une densité approchée où on aura approximer les distributions δ par des fonctions **B-Splines** S_{h_n} pour pouvoir projeter :

$$\rho_{h_n, N}(x, t) = \sum_{p=1}^N q_p S_{h_n}(x - x_p(t))$$

On peut analyser notre erreur en identifiant deux composantes :

$$\rho_{h_n, N} - \rho = \underbrace{(\rho_{h_n, N} - \mathbb{E}(\rho_{h_n, N}))}_{\text{Bruit Numérique}} + \underbrace{(\mathbb{E}(\rho_{h_n, N}) - \rho)}_{\text{Erreur de grille}}$$

Développement Sparse/ -Méthode PIC parcimonieuse

La méthode PIC parcimonieuse (Sparse-PIC) consiste à substituer à la seule grille cartésienne, de multiples **sous-grilles déraffinés** sauf dans une direction.

Pour chacune des sous-grilles :

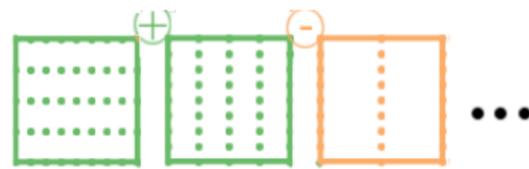
- 1'. **Déposition de charge**, des particules vers la sous-grille

- 2'. **Résolution de Poisson** sur la sous-grille

- 3'a. **Interpolation** : sous-grille vers les particules

3'b. **Recombinaison** des contributions des sous-grilles

4. **Avancée** des particules



Avantages :

Usage réduit de mémoire

Efficacité d'exécution

Précision \approx à PIC standard

Réduction du bruit

Inconvénients :

Dégradation de l'erreur de grille

Perte de positivité (Recombinaison)

Sous réserve d'existence, on a les estimations suivantes :

Comparaison de l'erreur de grille

Méthode	Terme Dominant	Terme Négligeable
PIC-Standard	$h_n^2 \left(\sum_{i=1}^d \ \partial_i^2 \rho\ _\infty \right)$	$h_n^{2d} \ \partial_1^2 \dots \partial_d^2 \rho\ _\infty$
Sparse-PIC	$h_n^2 \log h_n ^{d-1} \ \partial_1^2 \dots \partial_d^2 \rho\ _\infty$	$h_n^2 \left(\sum_{i=1}^d \ \partial_i^2 \rho\ _\infty \right)$

Pour le **bruit numérique** :

Méthode	Terme Dominant	
PIC-Standard	$(N h_n)^{-\frac{1}{2}}$	d est la dimension de l'espace (2 ou 3)
Sparse-PIC	$(N h_n)^{-\frac{1}{2}} \log h_n ^{d-1}$	

On dégrade l'erreur de grille et on gagne une dépendance dans **les dérivées croisées** en échange d'un gain sur le bruit numérique.

Après un développement de Taylor, on peut réécrire l'erreur de grille comme la somme des moments de notre interpolant :

$$\mathbb{E}(\rho_{h_n, N}(x)) - \rho = \sum_{n=1}^{\infty} h^n \int_{\text{supp}(S_{h_n})} y^n S_{h_n}(y) dy \int_{\Omega_v} f^{(n)}(x, v) dv$$

Ainsi pour les méthodes PIC et Sparse-PIC, le premier terme non nul est une dépendance en h^2 .

Par symétrie des Splines, tous les moments impairs sont nuls :

$$\int_{\Omega} x^{\alpha} S_{h_n}(x) dx = 0, \quad \alpha = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

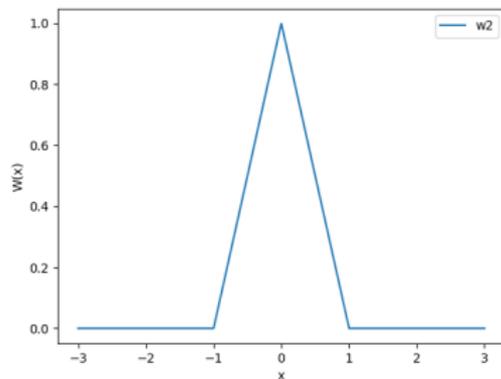
On note par W^m la **combinaison de Spline** construit précisément pour **annuler les moments jusqu'à l'ordre m** :

Elles héritent donc des propriétés de symétrie.

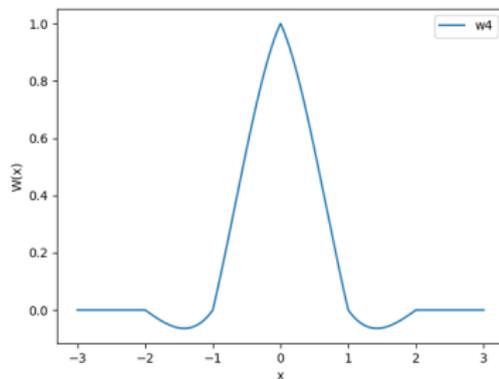
On a donc atteint juste à annuler les moments d'ordre pairs.

Montée en Ordre/ -4th Order

Pour améliorer l'ordre de convergence de l'erreur à l'ordre 4, il faut à la fois remplacer les Splines linéaires W2 par une fonction W4 et aussi résoudre l'équation de *Poisson* avec un schéma exacte à l'ordre 4.



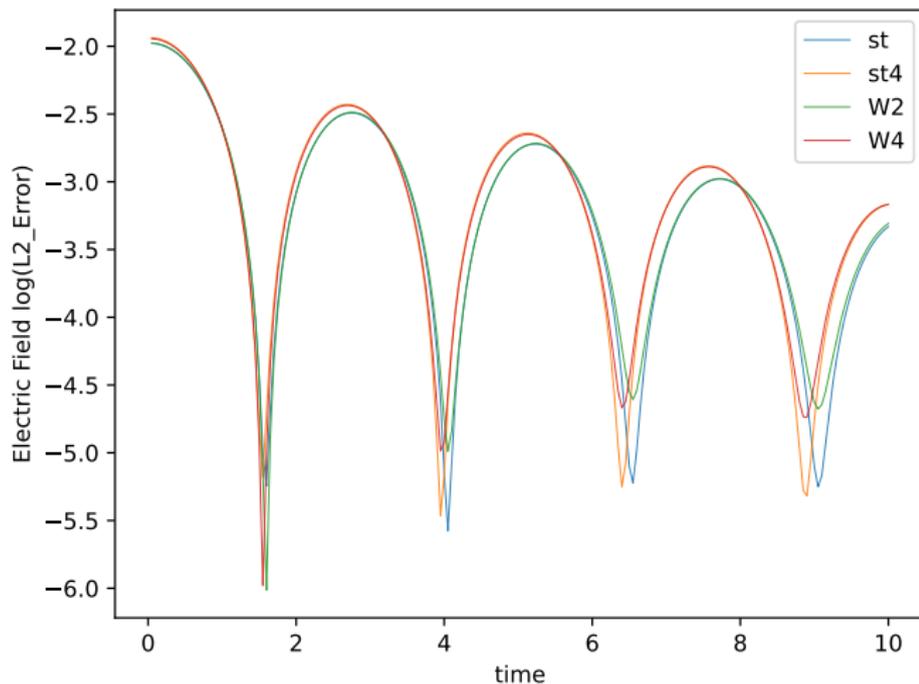
La fonction W2



La fonction W4

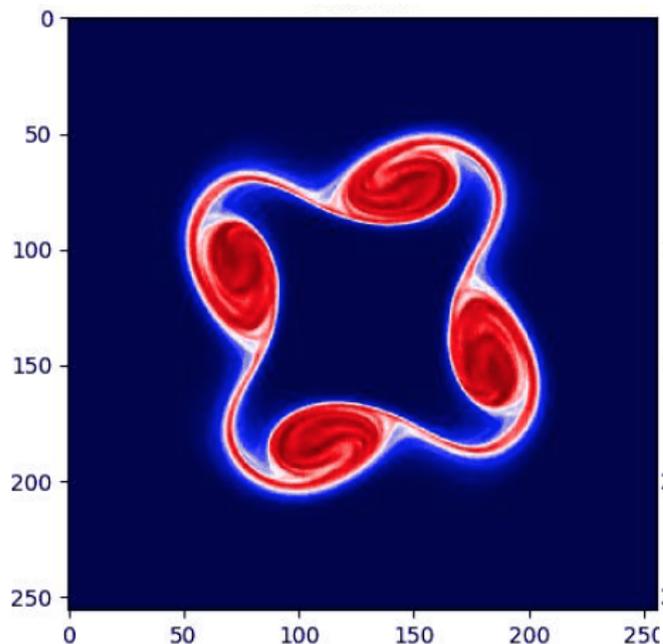
Avantages :
Erreur d'Ordre 4

Inconvénients :
Taille de support augmentée
Perte de positivité sur chaque grille

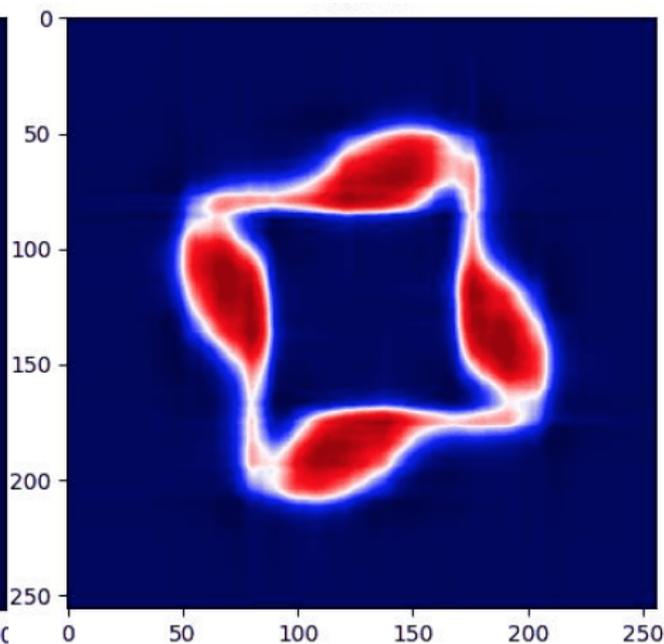


Comparaison des Erreurs sur le Champs Électrique pour des méthodes d'ordre 2 et 4

L'instabilité Diocotron est un cas hautement hétérogène, ce qui est très défavorable aux méthodes Sparse :

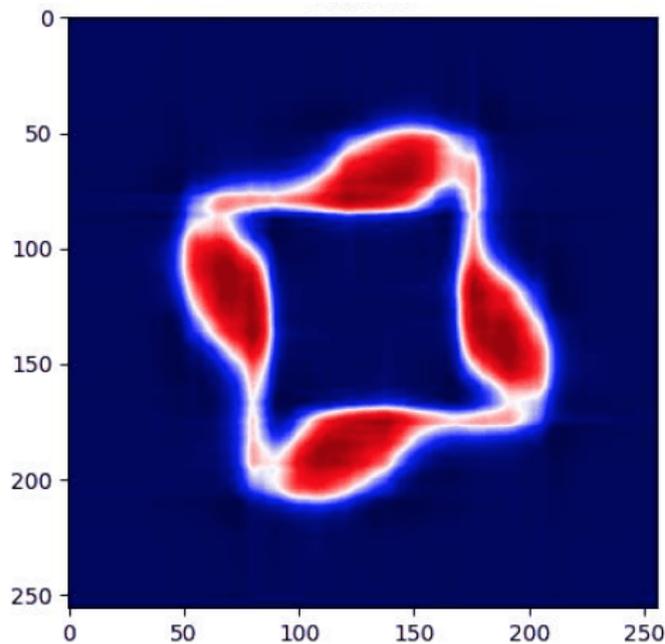


PIC Standard

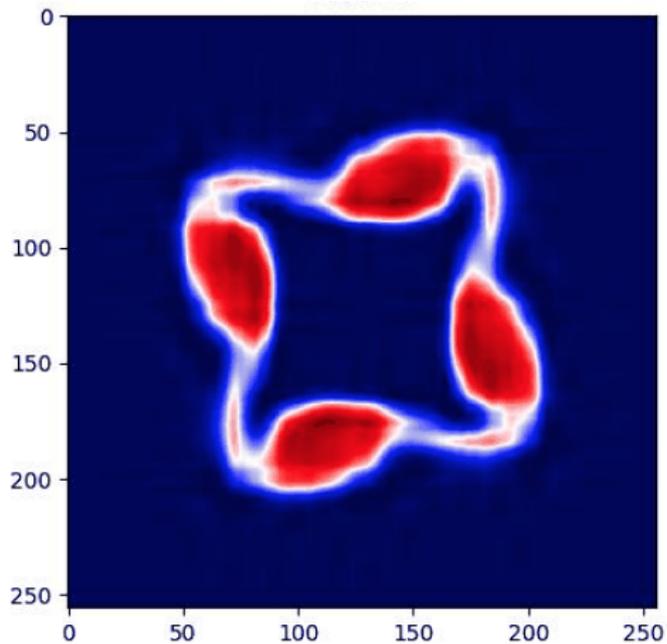


Sparse-PIC

Pour le cas test du Diochotron :



Sparse-PIC(2)

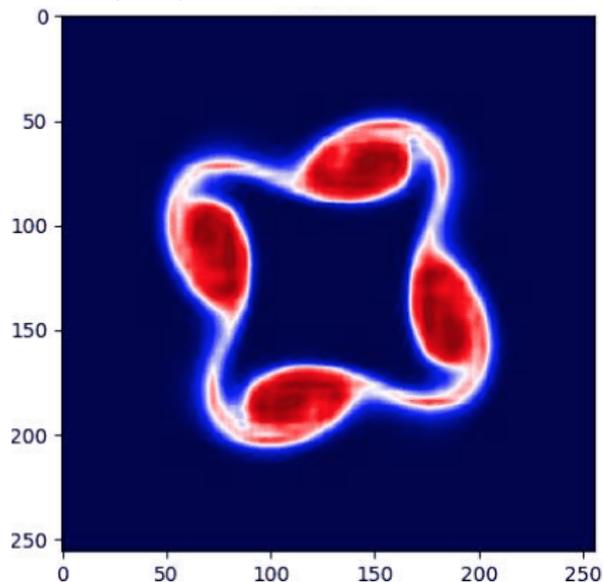


Sparse-PIC(6)

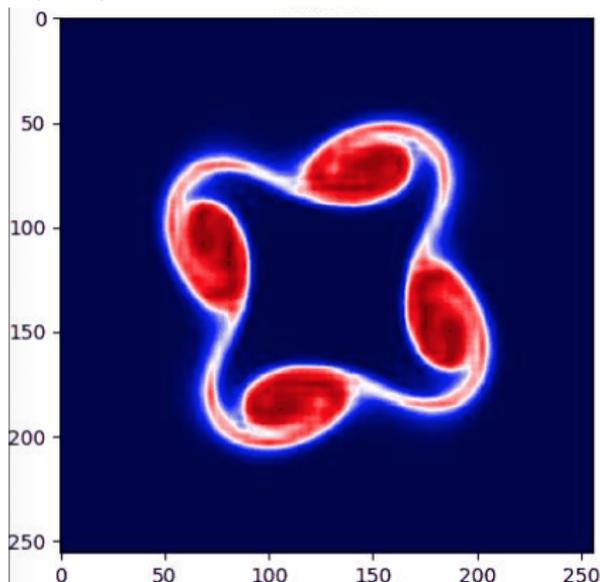
Mise en Oeuvre/ -Technique Offset

La technique **offset** consiste à augmenter le niveau minimal de raffinement des sous-grilles considérées :

offset(0,0) = méthode Sparse, **offset(n,0)** = méthode Standard.

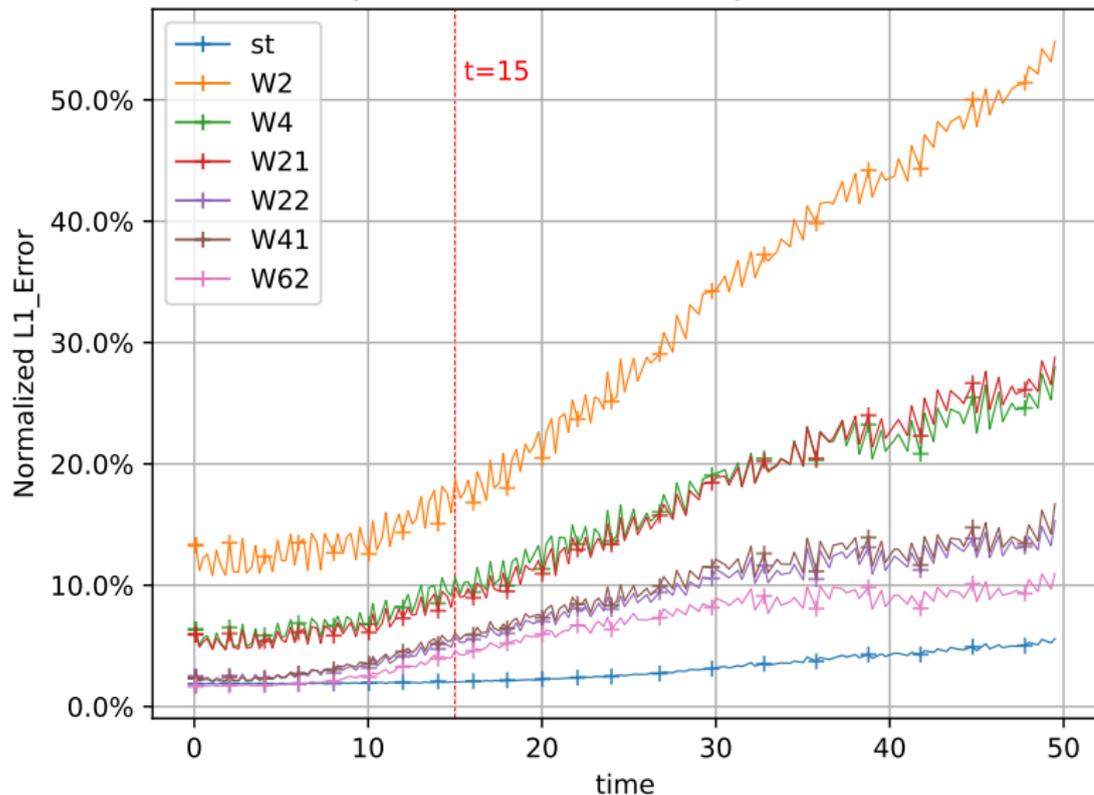


Sparse-PIC(2), **offset(2)**



Sparse-PIC(6), **offset(2)**

Comparison of L1 errors of Sparse methods



Ces travaux aura permis de mettre au point :

- ▶ Des méthodes Sparse-PIC d'ordre élevé qui viennent compléter l'existant dans des cas défavorables.
- ▶ Des estimations analytiques qui soutiennent ces résultats numériques.
- ▶ La rédaction en cours d'un **article** scientifique