

*THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF*

SUR LES COMPOSANTES EXOTIQUES DES ESPACES D'ACTIONS DE GROUPES DE SURFACES SUR LE PLAN HYPERBOLIQUE

Maxime WOLFF

Soutenue à Grenoble le 14 septembre 2007 devant le jury :

Gérard BESSON (Directeur de recherches, Institut Fourier)
Damien GABORIAU (Directeur de recherches, E.N.S. de Lyon)
Sylvestre GALLOT (Professeur, Institut Fourier)
Louis FUNAR (Chargé de recherches, Institut Fourier), Directeur
Gilbert LEVITT (Professeur, Université de Caen)
Frédéric PAULIN (Professeur, Ecole Normale Supérieure)
Vlad SERGIESCU (Maître de conférences, Institut Fourier)

Au vu des rapports de Gilbert LEVITT et Frédéric PAULIN

Je souhaite tout d'abord remercier Louis Funar, pour m'avoir donné un sujet de thèse aussi vaste et aussi riche, contenant bien plus de problématiques que je n'ai eu le temps d'en aborder. Son immense culture mathématique et son extraordinaire disponibilité ont été déterminants dans le déroulement de ce travail.

Je tiens à remercier Gilbert Levitt et Frédéric Paulin pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail. Merci d'avoir eu la patience de lire une première version de ce manuscrit, truffée d'erreurs, de preuves incomplètes, de conflits de notations. La qualité de ce texte doit tout aux innombrables remarques qu'ils m'ont faites.

Je suis très heureux de la présence de Sylvain Gallot dans ce jury. Depuis mon arrivée à Grenoble, j'ai toujours ressenti une grande bienveillance de sa part. Sans son soutien je n'aurais certainement pas pu faire cette thèse dans les mêmes conditions mathématiques et matérielles.

Vlad Sergiescu m'a appris tout ce que je sais sur la classe d'Euler, et a inspiré mes premiers résultats sur les représentations fidèles ou discrètes. Gérard Besson a toujours fait preuve d'une bonne humeur communicative ; Damien Gaboriau s'est rendu disponible très rapidement, et c'est un honneur que chacun d'entre eux me fait de prendre part à ce jury.

Je tiens à exprimer ici ma vive reconnaissance pour Vincent Guirardel, qui a manifesté beaucoup d'intérêt dans mon travail, et qui, après m'avoir accueilli très amicalement à Toulouse, m'a indiqué la preuve de la proposition 3.3.4, et m'a beaucoup appris sur les actions de groupes sur les $\mathbb{R}^n$ -arbres.

Anne Parreau, en organisant le groupe de travail "Représentations de groupes de surfaces et structures géométriques", et en m'aidant à y préparer mes exposés, avec toute son énergie, m'a transmis une exigence de rigueur dans la présentation des mathématiques, et plus généralement, son influence, puis celle de Frédéric Paulin, ont profondément changé la manière dont j'envisage la rédaction des mathématiques.

Dès le début de ma thèse, les conversations avec Greg McShane, Vladimir Fock, Roland Bacher et Daniele Otera m'ont beaucoup apporté ; merci aussi à Emmanuel Auclair, qui a subi de nombreuses répétitions d'exposés.

Merci infiniment à Léa Blanc-Centi, qui a relu et corrigé la plus grande partie de ce texte, et qui m'a toujours donné les meilleurs conseils mathématiques et humains.

Je souhaite remercier Arlette Guttin-Lombard, Myriam Charles, Mickael Marchand, Françoise Martin, Martine Barbelenet, Robert Feres, et tous les administratifs de ce laboratoire, qui apportent une atmosphère amicale à l'Institut Fourier, en plus de rendre ce travail possible. Merci en particulier à Brigitte Loiodice, qui a toujours pallié, sans le moindre écart d'humeur, à mes oublis récurrents.

J'ai eu la chance de partager mon bureau, tout au long de ces années, avec Michel Schweitzer et Simone Diverio. Le trio très improbable que nous avons formé, et qui se réunissait plus souvent à Grenoble qu'à Saint-Martin-d'Hères, a été une source de délires joyeux, d'écoute, et d'échanges mathématiques, musicaux, linguistiques.

Je ne sais pas ce que je serais devenu sans les randonnées héroïques dans le Vercors avec Catriona, Tanguy et Martin, les sorties à ski et les longues soirées loup-garou avec Andjie et Hadrien, Claire et Christophe, Boris, Olga, Vincent, les discussions passionnées de geek avec Adrien et les footings avec Andréas, Amaël et Samuel ; je profite encore de ces

quelques lignes pour faire un clin d'œil à Fabrice, Ion, Guido, Fabio, Claire, Christophe, et à tous ceux que j'oublie, inévitablement, en rédigeant cette page dans la hâte de la semaine précédent la soutenance.

Enfin, je voudrais mentionner ici des personnes, professeurs ou amis, qui ont marqué mon apprentissage des mathématiques, comme Sylvain Ferrières, Olivier Oury, Laurent Chabriac, Ryszard Rubinsztein.

Table des matières

0	Introduction	7
0.1	Injectivité et discrétude	9
0.2	Compactification et orientation	11
1	Préliminaires	15
1.1	Eléments de géométrie hyperbolique	15
1.1.1	Le plan hyperbolique et ses isométries	15
1.1.2	Sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$	21
1.1.3	Espaces hyperboliques	28
1.2	Groupes de surfaces et groupe modulaire	30
1.2.1	Groupes de surfaces	30
1.2.2	Groupe modulaire et courbes simples	32
1.3	Représentations et classe d'Euler	33
1.3.1	Ordre cyclique et classe d'Euler	33
1.3.2	Algorithme de Milnor	39
1.3.3	Inégalité de Milnor-Wood	43
2	Rappels sur la compactification	47
2.1	Introduction	47
2.2	L'espace $m_{\Gamma}^o(n)$	48
2.3	Topologie de Gromov équivariante	56
2.4	L'espace $\overline{m_{\Gamma}^u(n)}$	58
2.5	Autres compactifications	60
3	Twists dans les anses des surfaces	63
3.1	Densité des représentations non-injectives	63
3.1.1	Relevés	64
3.1.2	Preuve de la proposition 3.1.2	65
3.2	Un seul bout	66
3.3	Applications presque injectives	72
4	Injectivité et discrétude	77
4.1	Représentations d'image discrète	77
4.1.1	Présentation de relevés de groupes fuchsien dans $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$	77
4.1.2	La classe d'Euler des représentations discrètes est déterminée par leur image	80

4.1.3	Il y a très peu d'images discrètes en classe d'Euler non nulle	82
4.1.4	Rareté des représentations discrètes	84
4.1.5	Existence de représentations discrètes de classe d'Euler donnée	84
4.1.6	Les représentations non-injectives sont denses dans toutes les composantes non-Teichmüller	86
4.2	Représentations de classe d'Euler impaire	87
4.2.1	Un critère cohomologique	87
4.2.2	Un exemple explicite	88
4.2.3	Représentations discrètes de classe d'Euler impaire	89
4.3	Déformations des sous-groupes non-élémentaires	90
5	Compactification et orientation	93
5.1	Arbres réels épais	93
5.2	Rigidité de l'ordre	98
5.3	Topologie de Gromov équivariante orientée	101
5.4	L'espace $\overline{m}_\Gamma^o$ est compact	103
5.5	L'espace $\overline{m}_g^o$ admet $4g - 3$ composantes connexes	106
5.6	Arbres réels non-orientables	109
5.7	L'espace $\overline{m}_g^u$ admet au plus 3 composantes connexes	111
5.8	L'espace $\overline{m}_g^u$ est connexe	113
5.9	Dynamique	115
6	Quelques perspectives	117
A	Nœuds holonomes parallélisés	119

Chapitre 0

Introduction

Soit Σ_g une surface connexe, compacte, orientée, sans bord, de genre $g \geq 2$. Nous désignerons un de ses groupes fondamentaux par $\pi_1 \Sigma_g$ (pour un choix indifférent du point base). Nous munissons $\pi_1 \Sigma_g$ d'une présentation standard (à $2g$ générateurs et une relation). Dans ce travail, nous nous intéressons à l'espace $R_g = \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$ des représentations de $\pi_1 \Sigma_g$ dans le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ des isométries du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2$ qui préservent l'orientation. Les éléments de R_g sont déterminés par les images des $2g$ générateurs de $\pi_1 \Sigma_g$, soumises à la relation définissant $\pi_1 \Sigma_g$. En particulier, R_g est un sous-ensemble fermé de $(PSL(2, \mathbb{R}))^{2g}$, ce qui lui confère une topologie localement compacte (donc séparée), et même une structure de variété algébrique réelle (voir M. Culler et P. Shalen [CS83]). En 1984, W. Goldman [Gol84] a aussi montré que, hors des représentations abéliennes, cet espace est lisse, et de la dimension attendue, c'est-à-dire $6g - 3$.

Beaucoup de propriétés intéressantes des représentations sont invariantes par conjugaison ; d'ailleurs le passage d'un modèle à un autre du plan hyperbolique revient à conjuguer les représentations. Il est donc très naturel de s'intéresser à l'espace topologique quotient $R_g / PSL(2, \mathbb{R})$. Cet espace, bien que non séparé, a des propriétés très comparables à celles de R_g . En effet, hors des classes de représentations élémentaires (voir définition 1.1.10), il s'agit encore d'une variété algébrique, lisse, de dimension $6g - 6$ (voir [Gol84]). De plus, nous allons voir que R_g et $R_g / PSL(2, \mathbb{R})$ ont le même nombre de composantes connexes.

Une fonction $e: R_g \rightarrow \mathbb{Z}$, appelée la *classe d'Euler*, joue un rôle central dans l'étude de R_g . On peut la définir de plusieurs manières ; par exemple, étant donnée une représentation ρ , on définit un fibré en cercles au-dessus de la surface, correspondant à cette représentation. Ce fibré admet alors une classe caractéristique à valeurs dans $\mathbb{Z}$, la classe d'Euler. Cette classe est maintenant très bien comprise (voir par exemple [Mil58, Ghy87a, Mat87, Gol88, Cal04]) ; nous reviendrons très en détails sur la construction de cette classe d'Euler dans la section 1.3. J. Milnor et J. Wood [Mil58, Woo71] ont montré que la classe d'Euler ne prend que des valeurs entre $2 - 2g$ et $2g - 2$.

Un théorème de W. Goldman

En 1988, W. Goldman a montré ([Gol88]) que les composantes connexes de R_g sont exactement les fibres de la classe d'Euler. Autrement dit, pour tout k compris entre $2 - 2g$ et $2g - 2$, les préimages $e^{-1}(k)$ sont connexes, non vides. L'espace R_g admet donc $4g - 3$

composantes connexes. Il a montré aussi que les deux composantes $e^{-1}(2-2g)$ et $e^{-1}(2g-2)$ sont constituées exactement de *toutes* les représentations injectives et d'image discrète.

W. Goldman prouve aussi que l'espace $\text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ des représentations dans le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^3$ possède exactement deux composantes connexes. Tout plongement isométrique $\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ donne lieu à une injection $\text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$, et les représentations de classes d'Euler paires d'une part, et impaires d'autre part, ont leur image dans les deux composantes distinctes de $\text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$.

La classe d'Euler sépare les composantes connexes de l'espace R_g , et passe au quotient $R_g \rightarrow R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, en une fonction $\mathbf{e}: R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Ainsi, l'espace $R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a encore autant de composantes connexes que R_g .

En 1987, N. Hitchin [Hit87] avait montré que pour tout $k \neq 0$ tel que $|k| \leq 2g-2$, la préimage $\mathbf{e}^{-1}(k)$, dans l'espace quotient $R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, est un fibré complexe au-dessus du $(2g-2-|k|)$ -ième produit symétrique de la surface avec elle-même : en particulier, cette préimage est connexe. En plus de généraliser cette connexité à la classe d'Euler nulle, W. Goldman en donne une preuve beaucoup plus géométrique.

Les préimages de classes d'Euler extrêmes ($2-2g$ et $2g-2$), dans $R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, jouent ici un rôle très particulier. Ce sont toutes les représentations injectives, dont l'image est un réseau de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. En particulier, elles paramètrent l'espace des métriques hyperboliques marquées que l'on peut mettre sur une surface de genre g (plus précisément, la composante $\mathbf{e}^{-1}(2-2g)$ correspond aux métriques hyperboliques marquées sur la surface, et $\mathbf{e}^{-1}(2g-2)$ correspond à celles sur la surface munie de l'orientation opposée). Cet espace, très important, porte le nom d'espace de Teichmüller, et a déjà été beaucoup étudié (voir [FLP91, Abi80] pour de nombreux exposés). Il est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$, et possède de nombreux systèmes de coordonnées naturels ; l'un d'entre eux consiste à mesurer la longueur de géodésiques fermées sur la surface.

Les composantes de classes d'Euler extrémales sont donc très bien comprises, de plusieurs points de vue : on sait interpréter ces représentations comme l'holonomie d'une structure géométrique sur la surface ; on les caractérise par des propriétés des représentations (injectivité, image discrète) ; et on connaît la géométrie de ces composantes connexes (ce sont des boules). Ces composantes Teichmüller ont aussi des compactifications naturelles, qui ont de bonnes propriétés. Nous renvoyons aux premières pages de [Pau04] pour un tour d'horizon assez exhaustif de toutes ces compactifications.

Les autres composantes, en revanche, sont encore très mal comprises, et c'est l'étude de ces composantes qui a motivé tout notre travail.

Cette thèse s'est principalement centrée autour de la rédaction de deux articles [FW07, Wol] : le premier étudie l'ensemble des représentations injectives, ainsi que l'ensemble des représentations discrètes, dans R_g ; le deuxième concerne une compactification de l'espace de modules $R_g/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. C'est sous ce point de vue que nous allons maintenant en présenter les principaux résultats.

0.1 Injectivité et discrétude

Nous avons commencé par nous intéresser à cette question du point de vue le plus élémentaire possible. Toute représentation s'identifie naturellement à un $2g$ -uplet d'éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$, formé par les images des générateurs, dans la présentation fixée de $\pi_1 \Sigma_g$. La plupart des résultats présentés ici sont obtenus en considérant explicitement ces $2g$ -uplets de matrices.

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 0.1.1 *Pour tout $g \geq 2$ et tout k tels que $|k| < 2g - 2$, les représentations non-injectives forment une partie dense de la composante connexe $e^{-1}(k)$.*

Ce résultat complète la description de l'ensemble des représentations injectives, puisque J. DeBlois et R. Kent IV [DK06] ont montré, en 2005, que cet ensemble est dense, en tant qu'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. Leur résultat avait aussi été annoncé, indépendamment, par E. Breuillard, T. Gelander, J. Souto et P. Storm [BGSS06]. En particulier, le théorème 0.1.1 indique que l'ensemble des représentations injectives, dans ces autres composantes connexes, est un G_δ dense de complémentaire dense.

Nous montrons ensuite que la classe d'Euler de toute représentation discrète est essentiellement déterminée par son image, en tant que groupe abstrait. Rappelons ici que les sous-groupes discrets de $PSL(2, \mathbb{R})$ sont appelés *groupes fuchsien*s, et que tout groupe fuchsien cocompact Γ s'identifie au groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique compact : si cet orbifold est de genre g et possède r singularités coniques d'ordres respectifs $k_1, \dots, k_r$, alors le terme $(g; k_1, \dots, k_r)$ est appelé la *signature* du groupe fuchsien Γ , qui admet alors la présentation suivante :

$$\Gamma = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g \mid \begin{array}{l} q_1^{k_1}, \dots, q_r^{k_r} \\ q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \end{array} \right\rangle.$$

Nous reviendrons un peu plus en détail sur les groupes fuchsien dans la section 1.1.2 (voir aussi [Kat92]). Lorsque Γ est un groupe fuchsien non-cocompact, nous posons $e(\Gamma) = 0$. Dans le cas contraire, si $(g; k_1, \dots, k_r)$ est la signature du groupe fuchsien Γ , notons d le plus petit commun multiple des $k_1, \dots, k_r$ (avec par convention $d = 1$ si $r = 0$). Nous posons alors :

$$e(\Gamma) = d \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right),$$

et nous noterons $\mathcal{A}(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right)$. Rappelons que $2\pi \cdot \mathcal{A}(\Gamma)$ est l'aire de tout domaine fondamental de Γ dans $\mathbb{H}^2$; c'est aussi le volume de l'orbifold hyperbolique $\mathbb{H}^2/\Gamma$. Le nombre $e(\Gamma)$ est donc un entier, multiple de $\mathcal{A}(\Gamma)$. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 0.1.2 *Soit ρ une représentation (de n'importe quel groupe de surface $\pi_1 \Sigma_{g'}$) dont l'image est contenue dans Γ . Alors $e(\rho)$ est un multiple de $e(\Gamma)$. De plus, tout multiple de $e(\Gamma)$ est la classe d'Euler d'une représentation dont l'image est précisément Γ .*

En particulier, il n'existe pas de représentations à valeurs dans $PSL(2, \mathbb{Z})$ qui soit de classe d'Euler non nulle.

Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 0.1.3 *Fixons un entier k non nul. Alors il n'existe qu'un nombre fini de signatures de groupes fuchsien Γ tels qu'il existe une représentation (de n'importe quel groupe de surface $\pi_1 \Sigma_g$, avec $g \geq 2$) dont l'image soit contenue dans Γ et dont la classe d'Euler soit k .*

Nous montrons ensuite que les représentations discrètes de classe d'Euler non extrémale sont très rares.

Proposition 0.1.4 *Soient $g \geq 2$ et k tel que $|k| \leq 2g - 3$. Alors les représentations d'image discrète et les représentations élémentaires forment une partie fermée d'intérieur vide de $e^{-1}(k)$ dans R_g .*

Cependant, nous pouvons prouver qu'il en existe dans toutes les composantes :

Théorème 0.1.5 *Pour tout $g \geq 2$ et tout k tel que $|k| \leq 2g - 2$, il existe (au moins) une représentation d'image discrète et de classe d'Euler k dans R_g .*

Ces représentations sont construites explicitement, en termes de signatures de groupes fuchsien. En particulier, en utilisant des résultats, explicites eux aussi, de W. Magnus [Mag73], ces représentations peuvent être exprimées en n'utilisant que des matrices dans $PSL(2, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$.

Finalement, nous déduisons une caractérisation des représentations de classe d'Euler impaire, ce qui nous permet de décrire tous les sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui sont l'image d'une représentation discrète de classe d'Euler impaire (dans n'importe quel R_g). Si Γ est un groupe fuchsien cocompact de signature $(g'; k_1, k_2, \dots, k_r)$, désignons par $m(\Gamma)$ la puissance de 2, maximale, qui divise un des k_i . Si $m(\Gamma) = 0$, posons $n(\Gamma) = 0$. Sinon, soit $n(\Gamma)$ le nombre d'éléments, parmi les k_i , qui sont divisibles par $2^{m(\Gamma)}$. Nous établissons alors la caractérisation suivante :

Proposition 0.1.6 *Un groupe fuchsien $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est l'image d'une représentation (de $\pi_1 \Sigma_g$, pour n'importe quel $g \geq 2$) de classe d'Euler impaire si et seulement si Γ est un groupe fuchsien cocompact tel que $n(\Gamma)$ soit impair.*

Nous illustrons cette étude des représentations discrètes par des exemples explicites ; en particulier nous exhibons des groupes triangulaires qui sont l'image de représentations de classe d'Euler impaire, de manière très élémentaire.

Enfin, nous donnons une caractérisation des sous-groupes discrets dans $PSL(2, \mathbb{R})$: nous disons qu'un sous-groupe Γ d'un groupe de Lie G est *déformable par chemins* si l'espace topologique quotient $Hom(\Gamma, G)/G$ contient un chemin non trivial constitué de représentations injectives partant de la représentation tautologique.

Proposition 0.1.7 *Soit Γ un sous-groupe non-élémentaire, déformable par chemins, de $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors Γ est discret.*

0.2 Compactification et orientation

Dans une deuxième partie de ce travail, nous nous intéressons à la compactification de l'espace $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$, comme l'ont définie, indépendamment, M. Bestvina [Bes88] et F. Paulin [Pau88].

Commençons par fixer quelques notations. Soit Γ un groupe de type fini, sans torsion. Nous allons désigner par $R_\Gamma(n) = Hom(\Gamma, Isom^+(\mathbb{H}^n))$ l'espace des actions de Γ sur l'espace hyperbolique réel de dimension n par isométries préservant l'orientation. Il s'agit bien sûr d'une généralisation de l'espace $R_g(n) = R_{\pi_1 \Sigma_g}(n)$ que nous venons d'étudier dans le cas $n = 2$, où nous conserverons notre notation $R_g = R_{\pi_1 \Sigma_g}(2) = Hom(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$.

En 1976, W. Thurston [Thu88] a introduit une compactification naturelle de l'espace de Teichmüller ; cette compactification a été très étudiée et détaillée dans [FLP91]. Un système naturel de coordonnées, sur l'espace de Teichmüller, consiste à mesurer les longueurs de géodésiques fermées sur la surface. Ainsi, on montre que l'espace de Teichmüller est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$ (en effet, la donnée des longueurs de $6g - 6$ courbes suffit à paramétrer les métriques hyperboliques). La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller consiste à plonger cet espace dans un espace projectif (donc à considérer ces longueurs à un facteur scalaire près), dans lequel l'espace de Teichmüller a une image relativement compacte. Un résultat très important sur cette compactification est que le bord ainsi ajouté à l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une sphère de dimension $6g - 7$, de sorte que la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule fermée de dimension $6g - 6$. Plusieurs travaux successifs ont permis d'étendre cette compactification aux autres composantes connexes de l'espace $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$, qui nous intéressent ici. En 1984, J. Morgan et P. Shalen [MS84] avec des techniques de géométrie algébrique, ont défini une compactification de la variété algébrique réelle $X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}$ des caractères des représentations de Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$. Nous désignerons par $\overline{X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}}^{MS}$ cette compactification, et $\overline{X_{g, SL(2, \mathbb{R})}}^{MS}$ dans le cas où $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$. Vu que les représentations de classe d'Euler paire, dans $PSL(2, \mathbb{R})$ (et, en particulier, les éléments de l'espace de Teichmüller), se relèvent à $SL(2, \mathbb{R})$ (voir par exemple [Gol88]), ceci définit bien une compactification des espaces de Teichmüller, et elle coïncide avec celle de Thurston. Dans son article [Mor86], J. Morgan a généralisé cette construction au groupe $SO(n, 1)$, pour $n \geq 2$. En 1988 [Bes88, Pau88], M. Bestvina et F. Paulin, indépendamment, ont donné un point de vue beaucoup plus géométrique de cette compactification, pour des représentations dans $Isom^+(\mathbb{H}^n)$, $n \geq 2$. F. Paulin a montré que la topologie quotient sur $R_\Gamma(n)/Isom(\mathbb{H}^n)$ coïncide avec la topologie de la convergence au sens de Gromov (sur laquelle nous reviendrons en détail dans le chapitre 5), et que, muni de cette nouvelle topologie, l'espace $m_\Gamma^{fd}(n)$ des (classes de conjugaison de) représentations fidèles et discrètes admet une compactification naturelle, ce qui reconstruit la compactification de [Mor86, MS84]. Enfin, A. Parreau a étendu [Par] cette compactification aux espaces de modules dans des groupes de Lie de rang supérieur.

Cette compactification étant donc bien définie, nous nous demandons ici si elle respecte la topologie et la géométrie de l'espace $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$, comme le fait la compactification de Thurston, lorsqu'on se restreint à l'espace de Teichmüller seul. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas, et que cette compactification, telle qu'elle a été définie dans tous ces travaux, donne lieu à un espace très dégénéré.

Pour utiliser la compactification de F. Paulin, nous commençons par définir (explicitement) le plus gros quotient séparé de $R_\Gamma(n)/\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, que nous notons $m_\Gamma^u(n)$; de même nous construisons le plus gros quotient séparé $m_\Gamma^o(n)$ de l'espace $R_\Gamma(n)/\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$. Le cas qui nous intéresse le plus est celui où $n = 2$, et nous noterons $m_\Gamma^u = m_\Gamma^u(2)$ et $m_\Gamma^o = m_\Gamma^o(n)$ (si $\Gamma = \pi_1\Sigma_g$, nous notons ces espaces m_g^u et m_g^o). Remarquons ici que seule la valeur absolue de la classe d'Euler est encore définie dans m_g^u . En particulier, l'espace m_g^u admet $2g - 1$ composantes connexes. Nous notons $\overline{m_g^u(n)}$ son compactifié, comme le construit F. Paulin dans [Pau88].

Théorème 0.2.1 *Pour tout $g \geq 2$, $\overline{m_g^u(2)}$ admet au plus deux composantes connexes, et pour tout $g \geq 4$, l'espace $\overline{m_g^u(2)}$ est connexe.*

En particulier, les deux composantes connexes de $\text{Hom}(\pi_1\Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{C}))/\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ se recollent au bord, dès que $g \geq 3$:

Corollaire 0.2.2 *Pour tout $g \geq 3$, l'espace $\overline{m_g^u(3)}$ est connexe.*

Si on ne considère que les représentations de classe d'Euler paire, le résultat est valable pour tout $g \geq 2$:

Corollaire 0.2.3 *Pour tout $g \geq 2$, l'espace $\overline{X_{g, \text{SL}(2, \mathbb{R})}}^{MS}$ est connexe.*

Ces résultats, ainsi que le suivant, sont très probablement vrais pour tout $g \geq 2$, mais les preuves présentées ici ne fonctionnent pas toujours en genre 2 et 3.

Nous montrons aussi que l'espace $\overline{m_g^u}$, en plus d'être connexe, est particulièrement dégénéré :

Théorème 0.2.4 *Pour tout $g \geq 3$, il n'existe pas de structure de complexe cellulaire fini sur $\overline{m_g^u}$, qui soit compatible avec la compactification.*

En particulier, cette situation contraste très singulièrement avec le cas de la compactification de l'espace de Teichmüller seul.

On montre en fait que le bord des composantes $\mathbf{e}^{-1}(k)$, pour $|k| \neq 2g - 2$, ressemble à un espace de dimension au moins $6g - 6$. Cette compactification est donc très différente du cas décrit par G. Bergman [Ber71], qui donne une construction comparable à la compactification de J. Morgan et P. Shalen.

La preuve du théorème 0.2.4 utilise le fait suivant, intéressant pour lui-même :

Proposition 0.2.5 *Pour tout k tel que $|k| \leq 2g - 2$, la composante connexe $\mathbf{e}^{-1}(k)$ admet exactement un bout.*

Ainsi, toutes les composantes connexes de m_g^u , m_g^o ont chacune exactement un bout. En classe d'Euler non nulle, cette proposition découle du théorème de N. Hitchin [Hit87] déjà cité, mais nous en donnons une preuve très nettement plus simple.

Cette dégénérescence spectaculaire des espaces de représentations est peut-être comparable à ce qui arrive aussi en dimension plus grande, où le bord de l'espace de déformations des variétés hyperboliques de dimension trois admet des “self-bumpings” (voir [BH01]).

La dégénérescence de la compactification de l'espace m_g^u vient, au moins en partie, du fait que la topologie de Gromov équivariante oublie l'orientation de l'espace $\mathbb{H}^n$, qui, dans le cas $n = 2$, est l'information qui porte la classe d'Euler, et sépare m_g^u en composantes connexes distinctes. C'est en restaurant cette orientation que nous allons remédier (en partie au moins) à cette dégénérescence.

Nous définissons une notion de convergence au sens de Gromov entre des espaces *orientés*, qui préserve l'orientation. Ceci nous permet de définir une nouvelle compactification de m_Γ^o , dans laquelle les points idéaux, ajoutés au bord, sont des arbres réels *épais*, c'est-à-dire munis d'une "orientation". Ces arbres réels épais forment un ensemble $\mathcal{T}^o$, qui compactifie notre espace des modules :

Théorème 0.2.6 *L'espace m_Γ^o est relativement compact dans $m_\Gamma^o \cup \mathcal{T}^o$, et l'application $\pi : \overline{m_\Gamma^o} \rightarrow \overline{m_\Gamma^u}$, qui consiste à oublier l'orientation, est surjective.*

Une classe d'Euler peut encore être définie dans un contexte très général, comme nous le verrons dans la section 1.3. En particulier, les actions de $\pi_1 \Sigma_g$ sur les arbres réels épais admettent une telle classe d'Euler, et nous montrons le résultat suivant :

Théorème 0.2.7 *La classe d'Euler $e : \overline{m_g^o} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction continue. En particulier, la compactification $\overline{m_g^o}$ admet autant de composantes connexes que l'espace m_g^o .*

Pour montrer ce résultat, par commodité, on utilise le fait que nous avons affaire à un groupe de surface. On peut, plus généralement, définir la classe d'Euler pour n'importe quel groupe de type fini Γ , et prouver que cette classe d'Euler s'étend continûment au bord de l'espace des représentations, muni de la topologie de Gromov orientée. Cependant, pour des groupes Γ quelconques, il n'y a aucune raison pour que la classe d'Euler distingue les composantes connexes de R_Γ .

Il découle du théorème 0.2.6 qu'une condition nécessaire, pour qu'une action de $\pi_1 \Sigma_g$ sur un arbre réel soit dans $\overline{m_g^u}$, est qu'elle préserve une orientation. En particulier, nous construisons des exemples explicites d'arbres réels qui ne sont pas limites d'actions de surfaces sur $\mathbb{H}^2$. Certains d'entre eux peuvent même s'obtenir comme limites d'actions de $\pi_1 \Sigma_g$ sur $\mathbb{H}^3$, de sorte que nous avons la proposition suivante :

Proposition 0.2.8 *Soit $g \geq 3$. Il existe des actions minimales de $\pi_1 \Sigma_g$ sur des arbres réels, qui sont dans $\overline{\partial m_g^u(3)}$ mais pas dans $\overline{\partial m_g^u(2)}$.*

Ceci contraste nettement avec le cas des représentations fidèles et discrètes. En effet, R. Skora a montré [Sko96] qu'une action minimale de $\pi_1 \Sigma_g$ sur un arbre réel, a des petits stabilisateurs d'arêtes (c'est-à-dire que le stabilisateur de toute paire de points distincts de l'arbre est virtuellement abélien) si et seulement s'il est la limite de représentations fidèles et discrètes de $\pi_1 \Sigma_g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$, et il est connu (voir par exemple [MS84, Pau88, Bes88]) que les limites de représentations fidèles et discrètes dans $\overline{Isom(\mathbb{H}^n)}$ satisfont cette propriété. En particulier, pour tout $n \geq 2$, nous avons $\overline{\partial m_g^{fd}(n)} = \overline{\partial m_g^{fd}(2)}$.

Ce texte est organisé de la façon suivante. Dans le chapitre 1, nous faisons un certain nombre de rappels sur les espaces hyperboliques en général, et sur leurs isométries. Nous y ferons aussi quelques rappels sur le groupe fondamental des surfaces, et leur groupe

d'automorphismes extérieurs (connu sous le nom de groupe modulaire de Teichmüller, ou “mapping class group”), puis nous donnerons une définition de la classe d'Euler, pour des actions d'un groupe de surface sur un ensemble muni d'un ordre cyclique total. Nous y donnerons la preuve de quelques faits bien connus, comme l'inégalité de Milnor-Wood, ainsi que de quelques résultats techniques qui nous serviront par la suite.

Dans le chapitre 2, nous rappelons la construction de la compactification de l'espace de Teichmüller par la topologie de Gromov équivariante, en l'adaptant à l'espace m_g^u tout entier.

Dans le chapitre 3, nous avons regroupé les preuves, élémentaires, du théorème 0.1.1 et de la proposition 0.2.5. Ces deux preuves utilisent la même technique, qui consiste à se servir de twists de Dehn sur les anses des surfaces pour se déplacer dans l'espace des représentations. Ce chapitre se termine avec des lemmes techniques sur les groupes limites, qui serviront dans le chapitre 5.

Le chapitre 4 concerne l'étude des représentations discrètes, et des représentations injectives. Il est composé en grande partie de la traduction de l'article [FW07].

Enfin, dans le chapitre 5 se trouvent les preuves des résultats que l'on vient d'énoncer, concernant la dégénérescence de $\overline{m}_g^u$ et la compactification avec orientation.

En annexe de ce texte figure un article, écrit en commun avec Tobias Ekholm, sur les noeuds holonomes parallélisés. Il s'agit d'un travail entamé avant le début de cette thèse, et dont le thème en est très indépendant.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Eléments de géométrie hyperbolique, et sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$

1.1.1 Le plan hyperbolique et ses isométries

Nous commençons par faire quelques rappels sur la géométrie du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et quelques propriétés du groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique. Pour des études beaucoup plus approfondies et plus détaillées de ce sujet, je renvoie aux livres [Kat92, Thu97].

Topologiquement, le plan hyperbolique est un disque ouvert. Sur ce disque, il existe une unique métrique riemannienne, à constante multiplicative près, telle que les géodésiques soient les arcs de cercles perpendiculaires au bord de notre disque (ce fait est expliqué de manière très élégante dans [Thu97], chapitre 1).

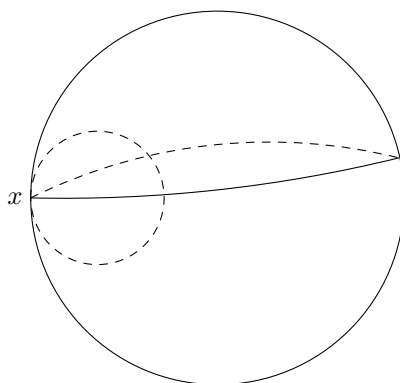


FIG. 1.1 – Le plan hyperbolique

Dans cette figure, nous avons dessiné une géodésique avec un trait plein, et deux courbes en pointillés. Le petit cercle représente une *horosphère centrée en* $x \in \partial\mathbb{H}^2$. C'est un ensemble de points qui sont à distance presque constante d'un point qui serait très proche de x . La deuxième courbe en pointillés contient des points qui sont tous à égale distance de la géodésique dessinée.

Un autre modèle conforme du plan hyperbolique est le demi-plan supérieur dans $\mathbb{C}$,

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\},$$

muni de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Dans ce modèle, les géodésiques sont les arcs de cercles qui rencontrent perpendiculairement l'axe (Ox) , ainsi que les demi-droites verticales. Le groupe de Lie

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{M \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

agit sur $\mathbb{H}^2$ par isométries : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, alors l'homographie $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ est une isométrie de ce modèle du demi-plan supérieur. Le noyau de cette action est le centre de $SL(2, \mathbb{R})$, $\{\pm \text{Id}\}$, et le groupe

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$$

s'identifie au groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^2$.

Nous munissons $SL(2, \mathbb{R})$ de la topologie usuelle ($SL(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$) et $PSL(2, \mathbb{R})$, de la topologie quotient. Elle coïncide avec la topologie de la convergence simple, mais aussi la topologie compacte ouverte, sur $Isom^+(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$.

Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les points de $\mathbb{H}^2$, mais aussi sur les directions en ces points. Je renvoie à [Kat92], théorème 2.1.1, pour une preuve du fait suivant :

Proposition 1.1.1 *Le groupe topologique $PSL(2, \mathbb{R})$ est homéomorphe au fibré tangent unitaire sur $\mathbb{H}^2$, de sorte que la multiplication à gauche dans $PSL(2, \mathbb{R})$ corresponde à l'action naturelle de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur ce fibré.*

Le fait suivant en découle :

Proposition 1.1.2 *Si $x \in \mathbb{H}^2$ est fixé, et $d \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble*

$$\{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid d(x, \gamma x) \leq d\}$$

est compact.

En particulier, topologiquement, le groupe de Lie $PSL(2, \mathbb{R})$ est un tore plein, de dimension 3 (voir figure 1.2). Le groupe de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ est aussi homéomorphe à un tore plein, et la projection $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ est un revêtement de degré 2.

Dans l'ensemble de ce travail, nous noterons toujours, abusivement, les éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$ par un de leurs représentants dans $SL(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire par des matrices; autrement dit nous omettrons le signe $\pm$ pour désigner ces éléments.

Les isométries de $\mathbb{H}^2$ agissent encore sur le bord $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, par homographies. Ceci définit une injection $PSL(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$, que nous considérerons généralement, par la suite, comme une inclusion.

Nous allons maintenant rappeler la classification des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^2$.

Dans $PSL(2, \mathbb{R})$, seule la valeur absolue de la trace est encore définie. Si $M \in SL(2, \mathbb{R})$, nous noterons $\text{Tr}(M) = |\text{tr}(M)|$. Les éléments de $PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\text{Id}\}$ forment alors trois familles, que nous noterons *Ell*, *Par* et *Hyp*, en fonction de leur trace :

- Si $\text{Tr}(M) \in [0, 2[$ alors M a un point fixe dans $\mathbb{H}^2$, et agit sur $\mathbb{H}^2$ comme une rotation autour de ce point. La matrice M est conjuguée dans $PSL(2, \mathbb{R})$ à une matrice qui s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Par conséquent, deux tels éléments sont conjugués entre eux si et seulement s'ils ont la même trace (en valeur absolue). Ces matrices sont appelées *elliptiques*.
- Si $\text{Tr}(M) = 2$, alors M n'a pas de point fixe dans $\mathbb{H}^2$, mais il fixe un unique point du bord. Ses orbites dans $\mathbb{H}^2$ sont sur les horosphères définies par ce point fixe. La matrice est conjuguée, dans $PSL(2, \mathbb{R})$, à une matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces éléments sont appelés *paraboliques*. Les éléments de *Par* constituent deux classes de conjugaison (dans $PSL(2, \mathbb{R})$), en fonction du signe de t .
- Si $\text{Tr}(M) \in]2, +\infty[$ alors M est conjuguée dans $PSL(2, \mathbb{R})$ à $\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$ pour un certain $u \in \mathbb{R}$, et là encore, deux tels éléments sont conjugués si et seulement s'ils ont la même trace. L'action de M sur $\mathbb{H}^2$ fixe alors deux points du bord de $\mathbb{H}^2$, et agit comme une translation de longueur u dans la géodésique comprise entre ces deux points du bord : l'un est attractif, et l'autre est répulsif. Ces éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$ sont appelés *hyperboliques*.

Pour tout $M \in PSL(2, \mathbb{R})$, on pose $d(M) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d(x, Mx)$. Alors $d(M) = 0$ si et seulement si $M \notin Hyp$, et cette borne inférieure est atteinte si et seulement si $M \notin Par$. Si $M \in Hyp$ alors $d(M)$ est appelé la *distance de translation* de M , et l'axe déterminé par les deux points fixes de M dans $\partial\mathbb{H}^2$ est appelé l'*axe de translation* de M .

D'après les informations correspondant à chacune de ces familles d'isométries, la figure 1.1 permet de dessiner facilement l'action de ces isométries dans le plan hyperbolique.

Remarquons que, d'après la classification qui vient d'être rappelée, deux éléments $A, B \in PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\text{Id}\}$ commutent si et seulement s'ils ont le même ensemble de points fixes dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ (ou de façon équivalente, s'ils sont dans un même sous-groupe à un paramètre de $PSL(2, \mathbb{R})$).

Plusieurs informations, parmi celles que nous venons de rappeler, se retrouvent dans le dessin suivant, qui figure aussi dans la thèse de W. Goldman [Gol80] :

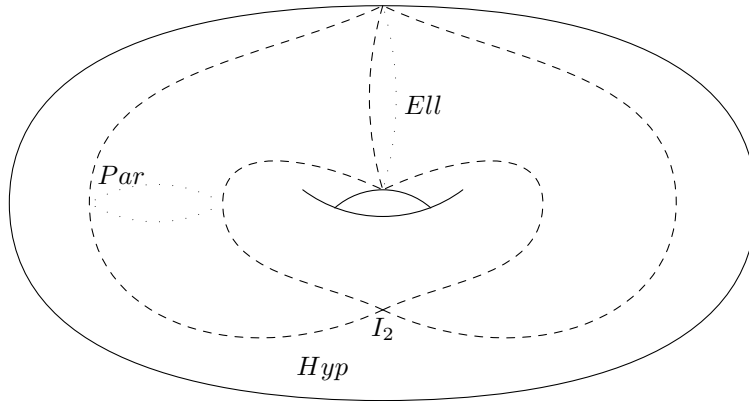


FIG. 1.2 – Le groupe de Lie $PSL(2, \mathbb{R})$

Comme on l'a vu dans la classification des isométries de $\mathbb{H}^2$, la trace des matrices joue un rôle très particulier, et les remarques suivantes, qui s'établissent par le calcul direct, auront une grande utilité.

Commençons par la formule la plus simple, néanmoins très utile.

Proposition 1.1.3 *Soient $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$. Alors $\text{tr}(AB^{-1}) = \text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB)$. En particulier, pour tous $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A)^2 - 2$.*

L'application $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, définie par $(A, B) \mapsto [A, B]$, passe au quotient dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Autrement dit, si $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ alors $[A, B]$ est bien défini dans $SL(2, \mathbb{R})$ et nous pouvons parler de sa trace (sans valeur absolue).

Proposition 1.1.4 *Pour tous $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$:*

- Si $A \in \text{Ell}$ et A et B ne commutent pas, alors $\text{tr}([A, B]) > 2$.
- Si $A \in \text{Par}$ et B ne fixe pas le point fixe de A , alors $\text{tr}([A, B]) > 2$.
- Si $A \in \text{Par}$ et $B \in \text{Hyp}$ fixe le point fixe de A , alors $\text{tr}([A, B]) = 2$, et $[A, B]$ est parabolique et commute avec A .
- Le nombre $\text{tr}([A, B])$ prend toutes les valeurs réelles lorsque (A, B) parcourt l'ensemble $\text{Hyp} \times \text{Hyp}$. Plus précisément, $\text{tr}([A, B])$ parcourt $]2, +\infty[$ lorsque les axes de A et B ne se croisent pas dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$; $] - \infty, 2[$ lorsque ces axes se croisent dans $\mathbb{H}^2$, et vaut 2 si A et B partagent un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$.

Autrement dit, pour qu'un commutateur ait une trace plus petite que 2, il est nécessaire que les deux éléments correspondants soient hyperboliques.

Preuve

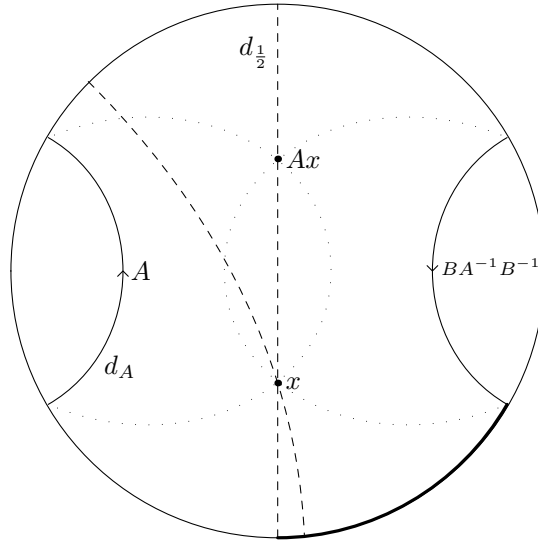
Nous allons établir chacun de ces résultats par le calcul, dans chacun des cas.

- Quitte à conjuguer (et à fixer le relevé de A dans $SL(2, \mathbb{R})$), nous pouvons écrire $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le calcul donne alors $\text{tr}([A, B]) = 2 + ((a-d)^2 + (b+c)^2) \sin^2 \theta$. Donc $\text{tr}([A, B]) \geq 2$, avec égalité si et seulement si $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $A \in \text{Par}$, écrivons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors le calcul donne $\text{tr}([A, B]) = 2 + c^2$; cela implique les deux assertions concernant $A \in \text{Par}$.
- Encore une fois, quitte à conjuguer, on a $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ et $B = C \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$, où $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$. Le calcul donne alors

$$\text{tr}([A, B]) = 2 + abcd \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) \left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 \right).$$

Mais C envoie 0 sur $\frac{b}{d}$ et ∞ sur $\frac{a}{c}$ donc $abcd < 0$ si les points fixes de A et ceux de B sont en quinconce sur le cercle $\partial\mathbb{H}^2$ (ou de façon équivalente, si les axes de A et B se croisent), et $abcd > 0$ si les axes de A et B sont disjoints dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$. La formule de $\text{tr}([A, B])$ permet de conclure. $\square$

Remarque 1.1.5 *S'agissant de résultats sur les traces, il est naturel que la preuve la plus efficace se fasse par le calcul. Cependant toutes ces propriétés peuvent être interprétées géométriquement; à titre d'exemple considérons le cas où A et B sont hyperboliques et ont leurs points fixes en quinconce sur le cercle $\partial\mathbb{H}^2$ (autrement dit, les axes de A et B se croisent). Notons d_A l'axe de A et $d_{BA^{-1}B^{-1}}$ celui de $BA^{-1}B^{-1}$. Il existe un unique élément $B_{\frac{1}{2}} \in \text{Hyp}$ tel que $B_{\frac{1}{2}}^2 = B$; notons $d_{\frac{1}{2}}$ l'axe de $B_{\frac{1}{2}}AB_{\frac{1}{2}}^{-1}$. Ces trois axes ne s'intersectent pas; le troisième étant à mi-chemin entre les deux autres. Si $BA^{-1}B^{-1}(d_{\frac{1}{2}})$ rencontre $d_{\frac{1}{2}}$ en un point $x \in \mathbb{H}^2$, alors ce point x est fixé par $[A, B]$, qui est donc elliptique (voir figure ci-dessous).*



Si la distance de translation de A est un peu plus grande, alors $BA^{-1}B^{-1}(d_{\frac{1}{2}})$ et $d_{\frac{1}{2}}$ se rencontrent en un point $x \in \partial\mathbb{H}^2$ du bord, et dans ce cas $[A, B]$ est parabolique, de point fixe x . Si la trace de A est encore plus grande, alors $BA^{-1}B^{-1}(d_{\frac{1}{2}})$ et $d_{\frac{1}{2}}$ ne se rencontrent plus dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, et dans ce cas $[A, B]$ est hyperbolique, et ses deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$ sont dans la zone épaissie dans la figure ci-dessus.

Dans ces deux derniers cas, le signe de $\text{tr}([A, B])$ apparaîtra beaucoup plus clairement dans la section 1.3, mais risquons dès maintenant un raisonnement très heuristique : d'après la proposition 1.1.1, le groupe fondamental de $PSL(2, \mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}$, et passer à son revêtement universel $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ revient à compter un nombre de tours. Le revêtement intermédiaire $SL(2, \mathbb{R})$, de degré 2, ne se souvient que de la parité de ce nombre de tours. Sur la figure ci-dessus, on peut se convaincre que, dans un certain sens, un point fixe $x \in \partial\mathbb{H}^2$ de $[A, B]$ réalise en fait un tour complet dans ce cercle, d'où le signe de $\text{tr}([A, B])$. Nous reviendrons plus en détail sur ces nombres de tours dans la section 1.3.

Voici encore un résultat pour lequel un calcul de trace donne un argument très efficace.

Lemme 1.1.6 *Toute isométrie hyperbolique de $\mathbb{H}^2$ est le commutateur de deux isométries elliptiques.*

Preuve

Soit $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $U_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{Tr}([A_\theta, U_t A_\theta U_{-t}]) = 2 + (4t^2 + t^4) \sin^4 \theta.$$

Cette trace atteint toutes les valeurs de l'intervalle $[2, +\infty[$, de plus l'ensemble $[Ell, Ell]$ est stable par conjugaison. D'après la classification des isométries de $\mathbb{H}^2$, il en découle que tout élément hyperbolique est le commutateur de deux éléments elliptiques. $\square$

La géométrie plane, dans le cas hyperbolique comme dans le cas euclidien, offre des formules de trigonométrie :

Proposition 1.1.7 (voir [Kat92], théorème 1.5.2) *Soit Δ un triangle non dégénéré, de longueurs a , b et c et d'angles correspondants α , β et γ . Alors on a les relations suivantes.*

$$\text{Loi du sinus : } \frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

$$\text{Loi du cosinus I : } \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

$$\text{Loi du cosinus II : } \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Nous utiliserons aussi le résultat suivant, pour répéter dans ce texte la preuve de la proposition 6.2 de [Pau88] :

Proposition 1.1.8 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que pour tous $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$ dans $\mathbb{H}^2$, si pour tous i, j , $|d(x_i, x_j) - d(x'_i, x'_j)| < \varepsilon'$ alors il existe une isométrie φ de $\mathbb{H}^2$ telle que $d(\varphi(x_i), x'_i) < \varepsilon$.*

Commençons par signaler le fait suivant, qui est une conséquence de la proposition 1.1.1 (le fait d'avoir trois points force φ à préserver l'orientation).

Proposition 1.1.9 *Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{H}^2$ formant un triangle non dégénéré. Alors pour tout voisinage de l'identité $V \subset PSL(2, \mathbb{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$, $(d(x_i, \varphi \cdot x_i) < \varepsilon) \Rightarrow \varphi \in V$.*

Preuve de la proposition 1.1.8.

Cette propriété vient de la trigonométrie hyperbolique, qui permet de reconstruire (continûment) les triangles à partir de leurs longueurs. Plus précisément, quitte à changer les indices, supposons que x_1 et x_2 soient des points les plus éloignés, et supposons que $d(x_1, x_2) > \frac{\varepsilon}{2}$ (dans le cas contraire, la proposition est banale). Il existe alors deux isométries de $\mathbb{H}^2$ qui envoient x_1 sur x'_1 et le germe de segment $[x_1, x_2[$ sur le germe de $[x'_1, x'_2[$: l'une renverse l'orientation, l'autre la conserve (cela découle de la proposition 1.1.1). Ensuite, quitte à réindexer, soit x_3 un point à distance supérieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'axe (x_1, x_2) (s'il n'en existe pas, alors chacune des deux isométries convient). Cela détermine une unique isométrie φ , parmi les deux considérées, telle que les triangles $\Delta(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$ et $\Delta(x'_1, x'_2, x'_3)$ soient orientés de la même manière. La loi du cosinus I donne l'angle $\widehat{x'_2 x'_1 x'_3}$ continûment en fonction des trois longueurs, de sorte que le point x'_3 est repéré continûment par les valeurs des longueurs du triangle $\Delta(x'_1, x'_2, x'_3)$;

et ainsi on a bien $d(\varphi(x_3), x'_3) < \varepsilon$, dès que ε' est assez petit devant ε . Ensuite, pour tout $k \in \{4, \dots, n\}$ tel que x_k est distant d'au moins $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'axe (x_1, x_2) , les triangles $\Delta(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$ et $\Delta(x'_1, x'_2, x'_3)$ sont orientés de la même manière (autrement, on aurait une contradiction avec $|d(x_3, x_k) - d(x'_3, x'_k)| < \varepsilon'$) donc comme dans le triangle $\Delta(x'_1, x'_2, x'_3)$, on trouve $d(\varphi(x_k), x'_k) < \varepsilon$, dès que ε' est assez petit. $\square$

1.1.2 Sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$

La classification des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^2$ permet de bien comprendre les sous-groupes à un paramètre de $PSL(2, \mathbb{R})$: à la vitesse de parcours près, ils sont entièrement déterminés par leur ensemble de points fixes dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$. Plus généralement :

Définition 1.1.10 *Un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ est élémentaire s'il admet un point fixe global dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$. Une représentation $\rho: \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ est dite élémentaire si son image est un sous-groupe élémentaire de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Nous allons maintenant rappeler les principales propriétés des sous-groupes discrets de $PSL(2, \mathbb{R})$, appelés *groupes fuchsien*s ; nous renvoyons encore à [Kat92] pour un traitement beaucoup plus complet.

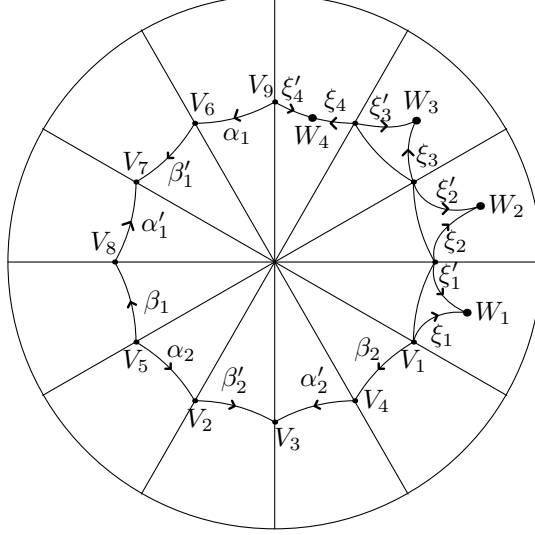
Si Γ est un groupe fuchsien, alors tout domaine D de $\mathbb{H}^2$ tel que $\Gamma \cdot \overline{D} = \mathbb{H}^2$ et tel que pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\gamma D \cap D = \emptyset$, est appelé *domaine fondamental* de Γ . Un groupe fuchsien est dit *géométriquement fini* s'il admet un domaine fondamental qui est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans. Nous nous intéresserons uniquement aux groupes fuchsien de *covolume fini* ; ce sont les groupes fuchsien géométriquement finis, et qui admettent un domaine fondamental d'aire finie. Cette aire est alors indépendante du domaine fondamental. Il existe alors des entiers $g \geq 0$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$ et $r \geq l$ tels que Γ admette la présentation suivante :

$$\Gamma = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid q_1^{k_1} = 1, \dots, q_l^{k_l} = 1, q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \right\rangle.$$

De plus, l'aire de tout domaine fondamental de Γ vaut alors

$$\mathcal{A}(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) + (r - l),$$

et Γ admet un domaine fondamental qui a l'allure suivante dans $\mathbb{H}^2$:



(nous avons dessiné ici un cas où $g = 2$ et $r = l = 4$).

Pour $1 \leq i \leq 4$, l'élément q_i de la présentation de groupe est représenté par l'unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$, elliptique, qui fixe W_i et qui agit comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{k_i}$ autour de W_i . En particulier, q_i est représenté par l'unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie le segment orienté ξ_i sur ξ'_i . De même, a_i (resp. b_i) est représenté par l'unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie α_i (resp. β_i) sur α'_i (resp. β'_i). Lorsqu'on "lit" le mot $q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ en partant de V_1 , on parcourt V_2, V_3 , etc.

La donnée de

$$(g; k_1, k_2, \dots, k_l, \overbrace{\infty, \dots, \infty}^{r-l})$$

est appelée la *signature* de notre groupe fuchsien Γ . Réciproquement, si $g, l, r, k_1, \dots, k_l$ sont des entiers tels que $g \geq 0$, $r \geq l \geq 0$, $k_i \geq 2$ et $2g - 2 + \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) + (r - l) > 0$, il

existe un groupe fuchsien de signature $(g; k_1, \dots, k_l, \overbrace{\infty, \dots, \infty}^{r-l})$.

Je ne sais pas à qui attribuer le fait classique suivant (voir par exemple [Ahl64]).

Proposition 1.1.11 *Soit Γ un groupe fuchsien de signature $(g; k_1, k_2, \dots, k_l, \overbrace{\infty, \dots, \infty}^{r-l})$.*

Alors $\mathcal{A}(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{k_i})$ vérifie $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{1}{42}$.

Preuve

1. Si $g \geq 1$ alors $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{r}{2}$. Si $r = 0$ alors $g \geq 2$ (sinon $\mathcal{A}(\Gamma) = 0$, ce qui est impossible) et $\mathcal{A}(\Gamma) \geq 2$, autrement $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{1}{2}$.

2. Supposons $g = 0$. Si $-2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \leq \frac{1}{4}$ alors $-2 + \frac{r}{2} \leq \frac{1}{4}$, donc $r \leq 4$. Mais $-2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) > 0$ donc $r \geq 3$. Par conséquent, il suffit de traiter les cas $r = 3$ et $r = 4$.
- (a) Si $r = 4$, alors $2 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_4} > 0$ et $k_i \geq 2$. Ainsi, un des k_i est supérieur ou égal à 3. Par conséquent, $2 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_4} \geq \frac{1}{6}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{1}{6}$.
 - (b) Si $r = 3$, alors $1 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} > 0$. Supposons d'abord que $k_1, k_2, k_3 \geq 3$. Alors un des k_i est supérieur ou égal à 4, et alors $1 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{12}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{1}{12}$. Le seul cas restant est celui où un des k_i , disons k_3 , vaut 2. Nous avons alors $\mathcal{A}(\Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} > 0$. Ainsi, $k_1, k_2 \geq 3$. Et si $k_1, k_2 \geq 4$, la condition $\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} > 0$ impose à k_1 ou k_2 d'être supérieur ou égal à 5, de sorte que $\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \geq \frac{1}{20}$ c'est-à-dire $\mathcal{A}(\Gamma) \geq \frac{1}{20}$. Enfin, si k_1 ou k_2 (disons, k_2) vaut 3, alors $\mathcal{A}(\Gamma) = \frac{1}{6} - \frac{1}{k_1} > 0$ et alors $\mathcal{A} \geq \frac{1}{42}$.

□

Nous allons aussi utiliser la propriété suivante, connue sous le nom de lemme de Jørgensen. Si $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$, on pose $J(A, B) = |\text{Tr}^2(A) - 4| + |\text{Tr}([A, B]) - 2|$.

Lemme 1.1.12 *Si $\langle A, B \rangle$ est un groupe non-élémentaire discret, alors $J(A, B) \geq 1$.*

Rappelons aussi la caractérisation suivante :

Proposition 1.1.13 (voir [Kat92], théorème 2.4.8) *Un sous-groupe non-élémentaire Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est discret si et seulement si pour tous $A, B \in \Gamma$, le groupe $\langle A, B \rangle$ est discret.*

J'emprunte à S. Katok ([Kat92], exercice 2.14), la preuve du résultat suivant, que j'aurai besoin d'utiliser par la suite.

Proposition 1.1.14 *Soit Γ un sous-groupe non-élémentaire, non discret de $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors Γ contient des éléments elliptiques d'ordre infini.*

Il s'agit là d'une *caractérisation*, vu que tout groupe contenant un élément elliptique d'ordre infini est évidemment non discret. La preuve repose de façon cruciale sur le fait suivant, dû à A. Selberg ([Sel60], lemme 8) :

Théorème 1.1.15 (A. Selberg) *Soit H un groupe de matrices $n \times n$ de type fini. Alors H contient un sous-groupe distingué d'indice fini, qui ne contient aucun élément de torsion.*

Preuve de la proposition 1.1.14.

Nous allons d'abord montrer que tout groupe non-élémentaire et non discret contient des éléments elliptiques (d'ordre fini ou non). Supposons ici que $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ soit un sous-groupe non-élémentaire, ne contenant que des paraboliques et des hyperboliques, et supposons par l'absurde que Γ soit non discret. Alors il existe une suite d'éléments γ_n , qui tend vers Id dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Fixons un élément $\gamma \in \Gamma$. Quitte à faire une conjugaison

globale dans $PSL(2, \mathbb{R})$, on peut écrire notre élément γ sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, et γ_n sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\text{tr}([\gamma, \gamma_n]) = 2 + bc(2 - \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})$ donc $[\gamma, \gamma_n]$ est elliptique ou $bc \leq 0$ pour tout n assez grand. Mais $\text{tr}([\gamma, [\gamma, \gamma_n]]) = 2 - abcd(1 - \frac{1}{\lambda^2})^2(2 - \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})$ impose que $[\gamma, [\gamma, \gamma_n]]$ soit elliptique ou bien que $abcd \geq 0$, pour n assez grand. Vu que $\gamma_n \rightarrow \text{Id}$, pour que Γ ne contienne pas d'éléments elliptiques, il faudrait que $b = 0$ ou $c = 0$, c'est-à-dire que γ_n ait un point fixe commun avec γ , à partir d'un certain rang (encore une fois, on peut traduire géométriquement cet argument : si les axes de γ et γ_n se croisent, alors d'après la proposition 1.1.4, $[\gamma, \gamma_n] \in \text{Ell}$, dès que n est assez grand ; et si ces axes ne se croisent pas, alors on remarque que les axes de γ et $[\gamma, \gamma_n]$, eux, se croisent). Le fait que Γ soit non-élémentaire conclut alors.

Soit maintenant $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$, non-élémentaire, ne contenant pas d'éléments elliptiques d'ordre fini. Considérons donc un sous-groupe Γ_0 , de type fini, qui a les mêmes propriétés. D'après le théorème dû à A. Selberg, Γ_0 contient un sous-groupe Γ_1 , d'indice fini, qui ne contient pas d'éléments elliptiques d'ordre fini, et donc pas d'éléments elliptiques du tout. Alors Γ_1 est discret, et il en découle que Γ_0 l'est aussi. Or, un sous-groupe non-élémentaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ est discret si et seulement si tous ses sous-groupes de type fini le sont, d'après la proposition 1.1.13. Ainsi, Γ est discret. $\square$

Nous aurons aussi besoin de la propriété suivante :

Proposition 1.1.16 *Soit Γ un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ tel que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\text{Tr}([\gamma_1, \gamma_2]) = 2$. Alors Γ est élémentaire.*

Preuve

S'il existe un élément elliptique $\gamma \in \Gamma$, alors d'après la proposition 1.1.4, Γ est élémentaire ; tous les éléments de Γ étant dans un même sous-groupe à un paramètre (elliptique) que γ . Supposons donc que tous les éléments de Γ aient un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$. Si deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Hyp} \cup \text{Par}$ n'ont pas de point fixe commun, et sont tels que $\text{Tr}([\gamma_1, \gamma_2]) = 2$, alors $\text{tr}([\gamma_1, \gamma_2]) = -2$ (d'après la proposition 1.1.4), mais alors $\text{tr}([A^n, B]) < -2$ pour tout n assez grand. Ainsi, tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ partagent un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$. Il en découle alors que tous les éléments de Γ ont un point fixe commun dans $\partial\mathbb{H}^2$. $\square$

Rappelons que R_g désigne l'espace $\text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence simple.

Corollaire 1.1.17 *L'ensemble des représentations élémentaires est un fermé d'intérieur vide dans R_g .*

Preuve

Commençons par montrer que cet ensemble est fermé. D'après la proposition 1.1.16, si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ est tel que pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\text{Tr}([\gamma_1, \gamma_2]) = 2$, alors Γ est élémentaire. Réciproquement, tout sous-groupe élémentaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ vérifie cette condition : en effet, si $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ partagent un point fixe dans $\mathbb{H}^2$ alors A et B sont elliptiques et commutent donc $\text{Tr}([A, B]) = 2$, et s'ils partagent un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$ alors quitte à les conjuguer par un même élément, ce point fixe est ∞ et alors A et B sont des

matrices triangulaires supérieures inversibles ; on trouve alors $\text{Tr}([A, B]) = 2$. Ainsi, une représentation $\rho \in R_g$ est élémentaire si et seulement si pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$, $\text{Tr}(\rho([\gamma_1, \gamma_2])) = 2$. Notons ici $E_g \subset R_g$ l'ensemble des représentations élémentaires. On a donc

$$E_g = \bigcap_{\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1 \Sigma_g} \{\rho \mid \text{Tr}(\rho([\gamma_1, \gamma_2])) = 2\}.$$

Les traces étant des fonctions continues, l'ensemble E_g est donc bien fermé.

Le fait que E_g soit d'intérieur vide découle par exemple du théorème de J. De Blois et R. Kent ([DK06]), qui affirme que l'ensemble des représentations injectives est dense dans R_g . En effet, toute représentation élémentaire est métabélienne (les commutateurs commutent entre eux), de sorte qu'aucune représentation élémentaire ne peut être injective. $\square$

Enfin, nous donnons une description des “petits” sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$. On note ici $\mathbb{F}_2$ un groupe libre sur deux générateurs.

Lemme 1.1.18 *Soit Γ un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$, ne contenant pas de groupe isomorphe à $\mathbb{F}_2$. Alors Γ fixe globalement un point de $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, ou Γ préserve globalement une géodésique de $\mathbb{H}^2$.*

Dans ce dernier cas, on dit souvent que Γ est *diédral*.

Preuve

Supposons que Γ ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{F}_2$, et ne soit pas élémentaire. La proposition 1.1.4 assure que l'on peut trouver un élément hyperbolique $M \in \Gamma$, d'axe $]a, b[\subset \mathbb{H}^2$. Tout élément de Γ doit alors envoyer a ou b dans $\{a, b\}$, sinon il existerait un élément hyperbolique $M' \in \Gamma$, sans point fixe commun avec M , et alors on pourrait trouver un groupe de Schottky dans $\langle M, M' \rangle$. Ainsi, si Γ contient un élément parabolique A , alors son point fixe doit être a ou b (disons a), et alors tout élément de Γ doit fixer a (sinon, on trouverait un élément parabolique $B \in \Gamma$ avec un point fixe différent de a , puis en conjuguant A par B^n , $n \in \mathbb{N}$, on trouverait une infinité d'éléments paraboliques de points fixes deux à deux distincts et l'un d'entre ces points fixes serait hors de $\{a, b\}$), donc Γ est élémentaire. Si Γ contient un élément hyperbolique qui ne commute pas avec M , cet élément doit partager un point fixe avec M et alors Γ contient un élément parabolique. Si Γ ne contient pas d'élément hyperbolique d'axe distinct de celui de M , alors Γ doit préserver la géodésique $]a, b[$. $\square$

En particulier, ces groupes sont métabéliens, c'est-à-dire que les commutateurs commutent.

Terminons cette description du plan hyperbolique par quelques rappels sur le modèle de l'hyperboloïde (nous renvoyons cette-fois ci à [BP92], Chapitre A, pour un traitement plus complet). Ce modèle est valable en toute dimension $n \geq 2$, de sorte que c'est l'espace $\mathbb{H}^n$ que nous décrivons ici, plus généralement.

Considérons sur $\mathbb{R}^{n+1}$ la forme quadratique

$$q(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0 x_1 + \frac{1}{2} (x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

(c'est pour la forme des éléments paraboliques que nous utilisons cette forme quadratique, qui se ramène à la forme quadratique un peu plus habituelle $\frac{1}{2}(-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)$ par un simple changement de base).

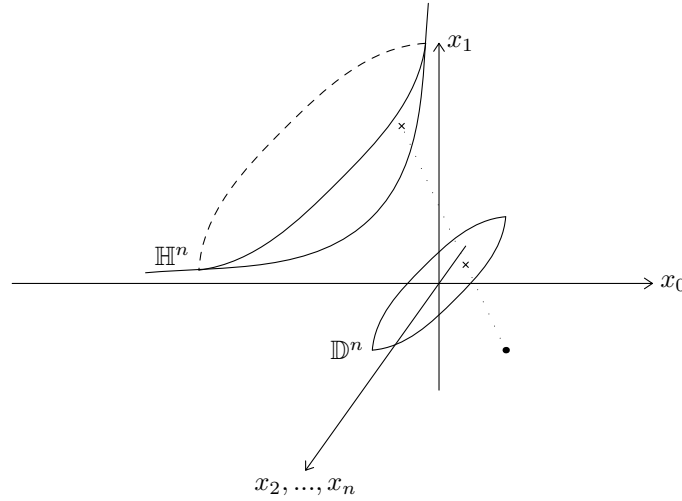
Alors l'ensemble $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | q(\underline{x}) = -1\}$ (où $\underline{x}$ désigne $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$) possède deux composantes connexes, et l'ensemble $\mathbb{H}^n$ est défini par

$$\mathbb{H}^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | q(\underline{x}) = -1, x_1 - x_0 > 0\}.$$

La forme $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ définit un produit scalaire sur l'espace tangent en chaque point, donc une structure riemannienne sur $\mathbb{H}^n$. Les géodésiques de $\mathbb{H}^n$ sont les intersections de $\mathbb{H}^n$ avec les plans (vectoriels) de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Notons $SO_{\mathbb{R}}(n, 1)$ l'ensemble des éléments de $SL(n+1, \mathbb{R})$ qui préservent q . Notons $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ le sous-groupe d'indice 2 de $SO_{\mathbb{R}}(n, 1)$ formé par les éléments qui préservent $\mathbb{H}^n$ (les autres éléments, eux, échangent les deux composantes connexes de $q^{-1}(-1)$). Alors $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ est le groupe d'isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^n$.

L'image de la projection stéréographique de $\mathbb{H}^n$ sur l'hyperplan $\{x_0 - x_1 = 0\}$ et de centre $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ est un disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, que nous noterons $\mathbb{D}^n$.



Remarquons au passage que ceci induit une compactification de $\mathbb{H}^n$, et le projeté de chaque géodésique de $\mathbb{H}^n$ sur $\mathbb{D}^n$ est une portion de sphère, qui rencontre perpendiculairement le bord $\partial\mathbb{D}^n$. On retrouve ainsi le modèle du disque $\mathbb{D}^2$ présenté plus haut.

Dans $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$, le stabilisateur du point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0) \in \partial\mathbb{D}^n$ est le sous-groupe de $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ formé par les matrices sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ r & \frac{1}{\lambda} & Y \\ Z & (0) & A \end{pmatrix},$$

avec $\lambda > 0$, $A \in SO(n-1)$, $\|Y\|^2 = -\frac{2r}{\lambda}$ et $A^t Y = -\frac{1}{\lambda} Z$. Le groupe des éléments qui fixent aussi le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0) \in \partial\mathbb{D}^n$ (et, en particulier, préservent globalement

la géodésique $\mathbb{H}^n \cap \{x_2 = \dots = x_n = 0\}$ est formé par les matrices sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & (0) \\ (0) & (0) & A \end{pmatrix},$$

avec $\lambda > 0$ et $A \in SO(n-1)$. Par analogie avec le cas $n = 2$, nous noterons 0 le point $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right) \in \partial\mathbb{D}^n$, et le point $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right) \in \partial\mathbb{D}^n$ sera noté ∞ .

Comme dans le cas $n = 2$, les éléments de $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ fixant un point de $\mathbb{H}^n$ sont appelés *elliptiques*, les éléments fixant un unique point de $\partial\mathbb{H}^n$ sont appelés *paraboliques*, et les éléments $\varphi \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ tels que $\inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, \varphi(x)) > 0$ (cette borne inférieure est alors atteinte), eux, sont appelés *loxodromiques*. Ils fixent deux points dans $\partial\mathbb{H}^n$, et sont conjugués à une matrice sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & (0) \\ (0) & (0) & A \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où $A = \text{Id}$, nous dirons que φ est *hyperbolique*.

Les éléments de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$, distincts de l'identité, et qui ont au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^n$ sont appelés *elliptiques*, et les éléments qui ont exactement un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$ sont appelés *paraboliques*. Comme dans le cas $n = 2$, ces différentes situations (éléments identité, elliptiques, paraboliques ou loxodromiques) recouvrent tous les éléments de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$.

La borne inférieure

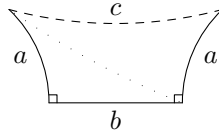
$$d(u) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, u \cdot x)$$

est atteinte si et seulement si u est non-parabolique. Dans ce cas on note $\min(u)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, u \cdot x) = d(u)\}$, et si $r > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, u \cdot x) < r + d(u)\}$ est noté $\min_r(u)$.

Lemme 1.1.19 *Soit $u \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$, non parabolique. Alors $\min_r(u)$ est à distance bornée de $\min(u)$. Autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in \min_r(u)$ on ait $d(x, \min(u)) < k$.*

Preuve

Supposons d'abord que u soit loxodromique. Dans la figure plane ci-dessous, la loi du cosinus I appliquée dans les deux triangles adjascent donne (avec un peu de calcul) la formule



$$\cosh c = 1 + \cosh^2 a (\cosh b - 1).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{H}^n$ on a

$$\cosh(d(x, u \cdot x)) \geq 1 + (\cosh(d(u)) - 1) \cdot \cosh^2(d(x, \min(u))),$$

donc le lemme est vérifié dans ce cas.

Supposons maintenant que u fixe un unique point x_0 de $\mathbb{H}^n$. Alors l'angle entre $[x_0, x]$ et $[x_0, ux]$, lorsque x parcourt la sphère, compacte, de rayon 1 centrée en x_0 , atteint un minimum $\theta_0 \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{x_0\}$, notons $\theta(x)$ l'angle, en x_0 , dans le triangle $\Delta(x, x_0, u \cdot x)$. La loi du cosinus I dans ce triangle donne alors

$$\begin{aligned} \cosh(d(x, u \cdot x)) &= 1 + \sinh^2(d(x, \min(u)))(1 - \cos \theta) \\ &\geq 1 + \sinh^2(d(x, \min(u)))(1 - \cos \theta_0), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Supposons enfin que u soit elliptique, et fixe point par point (au moins) une géodésique de $\mathbb{H}^n$. Choisissons un point $x_0 \in \min(u)$. Si $x \in \mathbb{H}^n$, notons $\pi(x)$ le projeté de x sur $\min(u)$. Quitte à conjuguer par une isométrie hyperbolique qui commute avec u , nous pouvons supposer que $\pi(x)$ soit le point x_0 . Alors, lorsque x parcourt l'ensemble compact $\{x \in \mathbb{H}^n \mid \pi(x) = x_0, d(x, x_0) = 1\}$ (qui est l'intersection entre la sphère de rayon 1 centrée en x_0 , et l'orthogonal à $\min(u)$ en x_0), l'angle entre les segments $[x_0, x]$ et $[x_0, \pi(x)]$ atteint un minimum $\theta_0 \neq 0$. On trouve alors, comme dans le cas précédent, pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, la formule

$$\cosh(d(x, u \cdot x)) \geq 1 + \sinh^2(d(x, \min(u)))(1 - \cos \theta_0)$$

qui termine la preuve. $\square$

1.1.3 Espaces hyperboliques

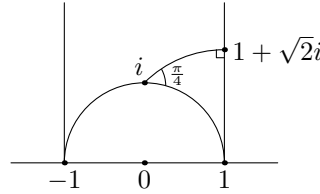
Nous allons utiliser quelques notions générales sur les espaces hyperboliques au sens de Gromov, et nous faisons ici de très brefs rappels sur ces espaces. Nous renvoyons au livre [GdlH90] pour une étude très approfondie de nombreuses propriétés de ces espaces.

Soit X un espace métrique géodésique. Un *triangle géodésique*, dans X , est la donnée de trois points $x_1, x_2, x_3 \in X$, ainsi que de trois segments géodésiques $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_1, x_3]$. Nous condenserons souvent ces notations en $\Delta(x_1, x_2, x_3)$. Si $\delta \geq 0$, on dit qu'un tel triangle est δ -fin à condition que pour tout $p \in [x_1, x_2]$, $d(p, [x_1, x_3] \cup [x_2, x_3]) \leq \delta$ (pour alléger la notation, nous identifions ici la géodésique $[x_i, x_j]$ avec son image dans X) et que la même condition soit satisfaite sur les deux autres côtés (autrement dit, la distance d'un point d'un côté aux deux autres côtés ne dépasse pas δ). Il s'agit d'une condition fermée sur $\delta \in \mathbb{R}_+$, et nous noterons $\delta(X)$ le plus petit élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que tous les triangles géodésiques de X soient $\delta(X)$ -fins. Si $\delta(X) < +\infty$ on dit que X est *hyperbolique au sens de Gromov*; plus spécifiquement on dira que X est δ -hyperbolique si tous ses triangles géodésiques sont δ -fins. On a alors $\delta(X) \leq \delta$. Le nombre $\delta(X)$, s'il est fini, est appelé *meilleure constante d'hyperbolicité de X* .

Si X est un espace métrique géodésique et si $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ est un triangle géodésique, alors il existe un unique triangle, $\Delta(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ dans $\mathbb{R}^2$, à isométrie du plan près, tel que $d(x_i, x_j) = d(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$. Ce triangle est appelé le *triangle de comparaison de $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^2$* . Tout point p du segment $[x_i, x_j]$ correspond alors à un unique $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$, et on dira que l'espace X est un *espace CAT(0)* si dans tout triangle géodésique de X , pour tous points p, q du triangle, l'inégalité $d(p, q) \leq d(\underline{p}, \underline{q})$ est satisfaite (encore une fois, pour éviter de surcharger les notations, on identifie ici les points p et q des géodésiques (*données*) du triangle avec leur image dans X pour pouvoir parler de $d(p, q)$).

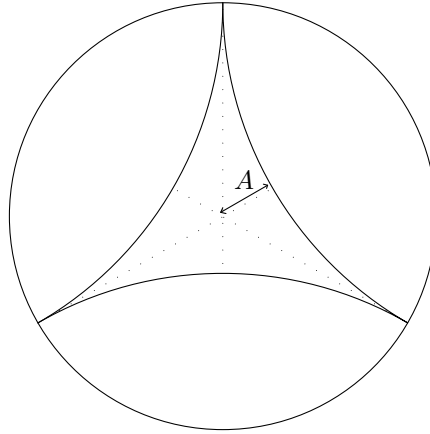
Si X est un espace $CAT(0)$ on dit que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si sa restriction à chaque géodésique est une fonction convexe. Par exemple, pour tout $x_0 \in X$, il découle de l'inégalité $CAT(0)$ que la fonction $x \mapsto d(x, x_0)$ est convexe. Si X est $CAT(0)$ et si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local en un point, alors ce minimum est global.

Dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, muni de sa distance usuelle $d_{\mathbb{H}^n}$, les triangles les moins fins sont les triangles idéaux, où les trois sommets sont au bord de $\mathbb{H}^n$. On constate ainsi que $\mathbb{H}^n$ est hyperbolique au sens de Gromov, et nous noterons $\delta_{\mathbb{H}^n} = \delta(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$. L'action de $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ est transitive sur les triplets non dégénérés de $\partial\mathbb{H}^n$, et un tel triplet détermine un plan hyperbolique (totalement géodésique); en particulier on a $\delta_{\mathbb{H}^n} = \delta_{\mathbb{H}^2}$ pour tout $n \geq 2$. Par transitivité de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur les triangles idéaux, et par symétrie, on constate que $\delta_{\mathbb{H}^2}$ est la distance entre i et l'axe $(1, \infty)$.



La loi du cosinus II, dans le triangle formé par les points i , $1 + \sqrt{2}i$ et 1 donne alors $\delta_{\mathbb{H}^2} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Signalons encore que dans l'espace $\mathbb{H}^n$, le rayon du cercle inscrit à un triangle est majoré. Ce rayon est maximal pour les triangles idéaux,



et le nombre A , qui est le supremum des rayons des cercles inscrits dans les triangles géodésiques de $\mathbb{H}^n$, est donné par la loi du cosinus II dans le triangle d'angles 0 , $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$: on trouve $A = \frac{1}{2} \ln 3$. cela donne lieu à une autre définition, équivalente, de l'hyperbolicité au sens de Gromov. Mais d'autres définitions conduisent à d'autres valeurs pour $\delta_{\mathbb{H}^2}$; aussi, il est courant que la valeur de $\delta_{\mathbb{H}^2}$ soit prise comme étant $\ln 3 = 2A$.

On dit que X est un *arbre réel* si $\delta(X) = 0$. Ces arbres peuvent être définis, ou caractérisés par d'autres propriétés équivalentes ; ce sont les espaces dans lesquels les triangles sont dégénérés en tripodes. Ces espaces généralisent les arbres simpliciaux de plusieurs manières : un point de branchement peut avoir un ensemble d'arêtes de cardinalité arbitraire issues de ce point, et les points de branchement peuvent s'accumuler. Deux exemples

correspondants sont le plan (ou n'importe quel espace vectoriel) muni de la distance SNCF (on fixe P un point du plan, et pour tout (M, N) on pose $d_{\text{SNCF}}(M, N) = d(M, N)$ si M, P, N sont alignés, et $d_{\text{SNCF}}(M, N) = d(M, P) + d(N, P)$ sinon), et un peigne polonais (si $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, on considère le “peigne” P , dans le plan, constitué du segment joignant $(0, 0)$ à $(1, 0)$ et des segments joignant $(x, 0)$ à $(x, 1)$, pour tout $x \in D$, et pour tout $M, N \in P$ on note $d_P(M, N)$ la longueur du plus court chemin, dans P , joignant M à N).

Si T est un arbre réel, et si φ est une isométrie de T , alors la borne inférieure $\inf_{x \in T} d(x, \varphi(x))$ est atteinte. Si $d(\varphi) = \min_{x \in T} d(x, \varphi(x)) > 0$, alors ce minimum est atteint sur une géodésique (à reparamétrisation près) $L(\varphi)$ de T ; cet axe est appelé l'*axe de translation* de φ . Pour tout $x \in T$, on a alors $d(x, \varphi(x)) = d(\varphi) + 2d(x, L(\varphi))$. L'isométrie φ est alors dite *hyperbolique*. Si $d(\varphi) = 0$, alors l'ensemble $F(\varphi)$ des points fixes de φ est un convexe non vide, et pour tout $x \in T$ on a $d(x, \varphi(x)) = 2d(x, F(\varphi))$. Dans ce cas φ est dite *elliptique*. J'attire l'attention du lecteur sur le fait que, par définition, l'identité est un élément elliptique. C'est là une convention qui est prise unanimement dans la littérature concernant les isométries des arbres réels, et cela contraste légèrement avec le fait que, suivant [Kat92], l'élément $\text{Id} \in PSL(2, \mathbb{R})$ n'est pas considéré ici comme une isométrie elliptique de $\mathbb{H}^2$.

Si X est un espace hyperbolique, on définit son *bord à l'infini*, $\partial_\infty X$, comme l'ensemble des classes d'équivalence des rayons géodésiques pour la relation d'être à distance bornée l'un de l'autre. Les isométries (ainsi, en fait, que les quasi-isométries) de X agissent sur $\partial_\infty X$ d'une façon bien définie. Un ε -quasi segment, dans X , est une fonction $f: I \rightarrow X$, où I est un segment de $\mathbb{R}$, tel que pour tous $x, y \in I$, $|d(f(x), f(y)) - |x - y|| < \varepsilon$. Si X est δ -hyperbolique, alors l'image de n'importe quel ε -quasi segment $f: [a, b] \rightarrow X$ est à distance au plus $\varepsilon + 2\delta$ d'un segment géodésique $[f(a), f(b)]$.

1.2 Groupes de surfaces et groupe modulaire de Teichmüller

1.2.1 Groupes de surfaces

Commençons par rappeler que la surface compacte, connexe et orientable de genre g (considérée à homéomorphisme près), avec $g \geq 1$, qui s'obtient en faisant la somme connexe de g copies du tore, est aussi obtenue à partir du polygone suivant, en recollant les arêtes orientées comme le suggèrent les notations :

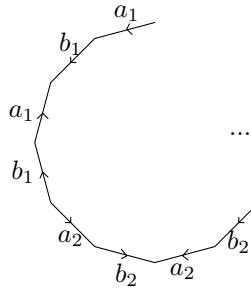
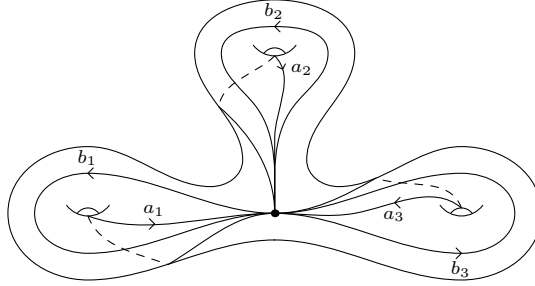


FIG. 1.3 – Le $4g$ -gone

On peut recouvrir la surface à l'aide de deux ouverts, l'un à l'intérieur du polygone et l'autre contenant les arêtes ; celui-là se rétracte sur un bouquet de $2g$ cercles. D'après le théorème de Seifert-Van Kampen, le groupe fondamental de la surface Σ_g admet donc la présentation suivante :

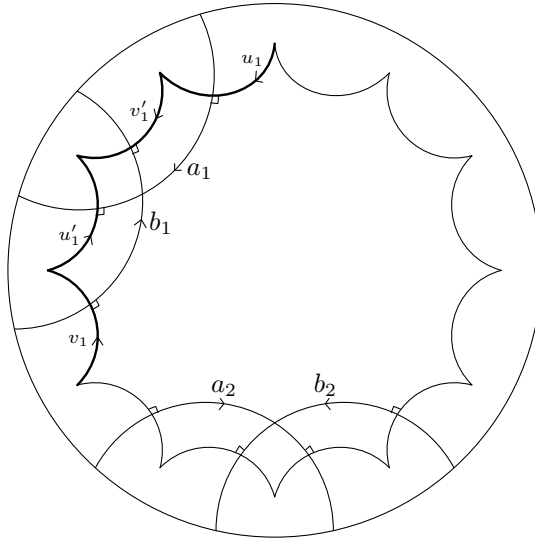
$$\pi_1 \Sigma_g = \langle a_1, b_1 \dots a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Une fois les arêtes recollées et la surface reconstituée, les arêtes a_i, b_i se lisent encore sur la surface et le dessin a l'allure suivante :



Les courbes $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ dessinées sur la surface forment alors un *système standard de courbes* sur la surface.

Si $g \geq 2$, on peut plonger notre polygone régulier dans $\mathbb{H}^2$, de sorte que chaque angle intérieur vaille $\frac{\pi}{2g}$:



On reconnaît, bien entendu, un domaine fondamental d'un groupe fuchsien de signature $(g; -)$. Ce polygone étant régulier, les segments orientés u_1 et u'_1 sont de mêmes longueurs, donc d'après la proposition 1.1.1, il existe un (unique) élément $a_1 \in PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie u_1 sur u'_1 . Il existe ainsi des isométries $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $\mathbb{H}^2$ qui définissent, d'après le théorème de Poincaré (voir par exemple [Hub06], théorème 3.9.5, p. 97) une représentation fidèle et d'image discrète de $\pi_1 \Sigma_g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$. En utilisant la symétrie de ce polygone, on constate facilement, ici, que a_1 est une isométrie hyperbolique dont l'axe est la

perpendiculaire commune à u_1 et u'_1 , et de même pour $b_1, a_2, \dots, b_g$. Les représentations fidèles et discrètes (qui peuvent toujours s'obtenir en déformant ce polygone dans $\mathbb{H}^2$) forment l'espace de Teichmüller de la surface $\pi_1 \Sigma_g$, qui constitue, d'après le corollaire C de [Gol88], une composante connexe de l'espace $Hom(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))/PSL(2, \mathbb{R})$. Cette représentation particulière a l'avantage de présenter plusieurs symétries ; nous nous en servirons plus tard.

1.2.2 Groupe modulaire et courbes simples

Le groupe $\pi_0 \text{Diff}(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de la surface Σ_g , modulo isotopie, s'identifie, d'après un théorème de Nielsen, au groupe $Out(\pi_1 \Sigma_g)$ des automorphismes extérieurs du groupe $\pi_1 \Sigma_g$. Son sous-groupe $\pi_0 \text{Diff}^+(\Sigma_g)$, d'indice 2, formé par les difféomorphismes préservant l'orientation de la surface est appelé *groupe modulaire de Teichmüller*, ou encore *mapping class group*, et on note $Out^+(\pi_1 \Sigma_g)$ le sous-groupe d'indice 2 de $Out(\pi_1 \Sigma_g)$ correspondant. Ce groupe est “très gros”, en particulier il agit transitivement sur l'ensemble des courbes simples non séparantes de la surface. Plus précisément,

Proposition 1.2.1 *Si α est une courbe fermée simple non séparante de la surface Σ , alors il existe un système standard $\{\alpha_i, \beta_i\}$ de courbes sur Σ , tel que $\alpha_1 = \alpha$.*

On prouve cette propriété de la manière suivante. La courbe α (notons-la α_1) est non-séparante, donc il existe une courbe fermée simple β_1 dans Σ , qui l'intersecte exactement une fois (puisque $\Sigma \setminus \alpha_1$ est connexe par arcs). Maintenant, épaississons l'ensemble $\alpha_1 \cup \beta_1$ dans Σ , en un voisinage Σ_1 : alors Σ_1 est homéomorphe à un tore troué, et Σ est la somme connexe du tore troué Σ_1 avec une autre surface trouée $\Sigma \setminus \Sigma_1$. D'après la classification des surfaces, $\Sigma \setminus \Sigma_1$ est la surface, trouée, de genre un de moins que Σ , et dans cette surface on peut trouver des courbes qui complètent $\{\alpha_1, \beta_1\}$ en un système de courbes sur Σ .

Le groupe modulaire de Teichmüller agit aussi proprement discontinûment sur l'espace de Teichmüller, et agit de façon minimale (c'est-à-dire que toutes les orbites sont denses) sur son bord. Je renvoie au livre de N. Ivanov [Iva02] pour de nombreuses investigations sur ce groupe, qui intervient dans de très nombreux domaines en topologie et géométrie.

Voici maintenant un cas particulier du théorème principal de l'article [Sco78] de P. Scott, dont nous aurons besoin :

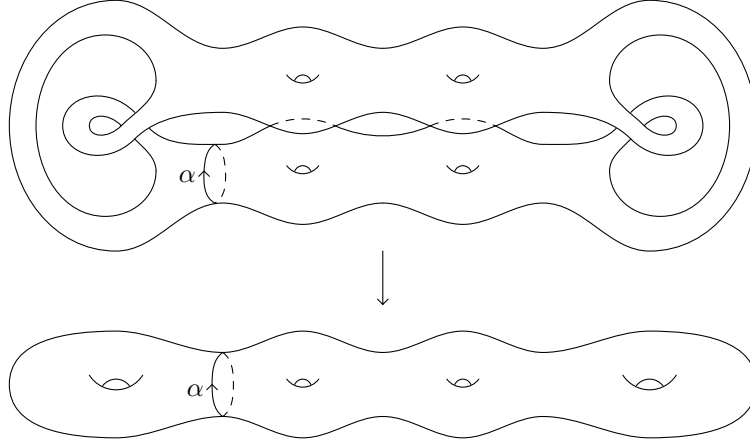
Théorème 1.2.2 (P. Scott) *Soit $\alpha \in \pi_1 \Sigma$, avec $g \geq 2$. Alors il existe un revêtement d'ordre fini de la surface, $\pi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$, tel que $\pi_1 \Sigma'$ contienne α , et tel que α soit représenté par une courbe simple dans Σ' .*

Nous utiliserons en fait une version très légèrement renforcée de cet énoncé :

Proposition 1.2.3 *Soit $\alpha \in \pi_1 \Sigma$, avec $g \geq 2$. Alors il existe un revêtement d'ordre fini de la surface, $\pi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$, tel que $\pi_1 \Sigma'$ contienne α , et tel que α soit représenté par une courbe simple non séparante dans Σ' .*

Pour prouver cette proposition, il suffit de montrer que pour toute courbe fermée simple séparante sur la surface Σ_g , il existe un revêtement qui la rend non séparante.

De même que précédemment, la classification des surfaces implique qu'il n'y a que $E(\frac{g}{2})$ telles courbes (E étant la partie entière), à l'action de $Out^+(\pi_1 \Sigma_g)$ près. La figure suivante suggère comment construire un tel relevé, de degré 2, en plaçant chacun des deux point bases sur la courbe α représentée.



1.3 Représentations de groupes de surfaces et classe d'Euler

1.3.1 Ordre cyclique sur un ensemble et classe d'Euler

Nous allons maintenant introduire un des objets principaux de notre travail, qui est la classe d'Euler d'actions de groupes sur des ensembles cycliquement ordonnés. La construction que nous donnons ici n'est pas nouvelle ; des constructions équivalentes sont données par E. Ghys et W. Thurston dans [Ghy87b, Thu]. Nous renvoyons à [Cal04] pour un tour d'horizon très détaillé.

Ordre cyclique sur un ensemble

Définition 1.3.1 Soit X un ensemble. Un ordre cyclique (total) sur X est une fonction $o : X^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ telle que :

- (i) $o(x, y, z) = 0$ si et seulement si $\text{card}\{x, y, z\} \leq 2$;
- (ii) Pour tous x, y et z , $o(x, y, z) = o(y, z, x) = -o(x, z, y)$;
- (iii) Pour tous x, y, z et t , si $o(x, y, z) = 1$ et $o(x, z, t) = 1$ alors $o(x, y, t) = 1$.

Remarque 1.3.2 Si $o(x, y, z) = 1$ et $o(x, z, t) = 1$ alors on a aussi $o(x, z, t) = 1$ et $o(y, z, t) = 1$. En effet, $o(z, x, y) = o(z, t, x) = 1$ donc d'après la condition (iii) de la définition, $o(z, t, y) = 1$, c'est-à-dire $o(y, z, t) = 1$. De la même manière, $o(x, y, t) = 1$ donc $o(t, x, y) = 1$, ce qui, avec $o(t, y, z) = 1$, donne $o(t, x, z) = 1$, c'est-à-dire $o(x, z, t) = 1$. Autrement dit, la relation de transitivité (iii) implique toutes les relations de transitivité "naturelles", et en particulier, il y a autant d'ordres cycliques totaux sur un ensemble à 4 éléments que d'injections de cet ensemble dans le cercle orienté, à homéomorphisme préservant l'orientation du cercle près, c'est-à-dire 6.

Remarque 1.3.3 Dans l'ensemble de ce texte, nous n'utilisons que des ordres cycliques totaux (autrement dit, tous les triplets définissent un ordre). Par conséquent, il nous arrivera d'omettre le mot "total" lorsque nous parlons d'ordre cyclique.

Fixons maintenant un ensemble X muni d'un ordre cyclique o et d'un point base $x_0 \in X$.

Définition 1.3.4 On pose $y <_{x_0} z$ si $o(x_0, y, z) = 1$, et on pose $y \leq_{x_0} z$ si $y <_{x_0} z$ ou $y = z$.

La proposition suivante découle immédiatement des propriétés de o .

Proposition 1.3.5 La relation $\leq_{x_0}$ est une relation d'ordre total sur $X \setminus \{x_0\}$.

Remarque 1.3.6 Réciproquement, si $\leq$ est un ordre total sur $X \setminus \{x_0\}$, alors il existe un unique ordre cyclique total sur X vérifiant $o(x, y, z) = 1$ pour tous $x, y, z \neq x_0$ tels que $x < y < z$, et vérifiant $o(x_0, y, z) = 1$ dès que $y < z$ (l'énumération tous les cas possibles permet de constater que les axiomes de la définition de l'ordre cyclique total sont bien vérifiés). Pour tout $x_0 \in X$, ces deux constructions réalisent une bijection, et sa réciproque, entre l'ensemble (qui est bien un ensemble, en tant que partie de $\{-1, 0, 1\}^{X^3}$) des ordres cycliques totaux sur X , et l'ensemble des ordres totaux sur $X \setminus \{x_0\}$. En particulier, sur tout ensemble X il existe au moins un ordre cyclique total o , d'après l'axiome du choix.

Définition 1.3.7 Sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times X$ on pose :

- $(m, x) <_{x_0} (n, y)$ dès que $m < n$, pour tous $x, y \in X$,
 - $(k, y) <_{x_0} (k, z)$ dès que $y <_{x_0} z$,
 - $(k, x_0) <_{x_0} (k, y)$ pour tout $y \in X \setminus \{x_0\}$,
- et on pose $(m, y) \leq_{x_0} (n, z)$ si $(m, y) <_{x_0} (n, z)$ ou $(m, y) = (n, z)$.

En particulier, restreint à l'ensemble $\mathbb{Z} \times (X \setminus \{x_0\})$ il s'agit de l'ordre lexicographique.

On vérifie alors très aisément la proposition suivante.

Proposition 1.3.8 La relation $\leq_{x_0}$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times X$.

Exemple

Si $X = \mathbb{S}^1$ et $x_0 \in \mathbb{S}^1$, alors $X \setminus \{x_0\}$ est un intervalle,

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \{1\} \times (X \setminus \{x_0\}) \left(\begin{array}{c} \bullet (2, x_0) \\ \bullet (1, x_0) \end{array} \right) \\
 \{0\} \times (X \setminus \{x_0\}) \left(\begin{array}{c} \bullet (0, x_0) \end{array} \right) \\
 \{-1\} \times (X \setminus \{x_0\}) \left(\begin{array}{c} \bullet (-1, x_0) \end{array} \right) \\
 \dots
 \end{array}$$

et $\mathbb{Z} \times X$ s'identifie naturellement à $\mathbb{R}$, et cette identification dépend canoniquement de x_0 .

Un autre exemple est celui du paquet de cartes. Celui-ci est muni d'un ordre cyclique, qui est préservé lorsqu'on le "coupe". Le choix d'une "coupe" consiste à choisir une carte x_0 , et détermine un ordre total dans le paquet. Ici notre définition de l'ordre sur $\mathbb{Z} \times X$ consiste à choisir une coupe, puis à empiler $\mathbb{Z}$ copies du jeu de cartes les unes par-dessus les autres.

Applications et relevés

Nous considérons ici un ensemble X muni d'un ordre cyclique total o . Nous allons voir que les bijections de X qui préservent o se relèvent à $\mathbb{Z} \times X$ de façon naturelle (dès qu'on se donne un point base x_0), de la même manière que les homéomorphismes de $\mathbb{S}^1$ préservant l'ordre se relèvent de façon naturelle à son revêtement $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.9 Soit $f : X \rightarrow X$ une application quelconque. On appelle relevé arbitraire de f toute fonction $\tilde{f}$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{Z} \times X \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow pr_2 \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}.$$

Dans ce cas on dit que $\tilde{f}$ se projette sur f .

On définit l'application $h : \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z} \times X$ par $h(n, x) = (n + 1, x)$.

Proposition 1.3.10 Soit $f : \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z} \times X$ une bijection qui préserve $\leq_{x_0}$ et qui se projette sur id_X . Alors il existe un entier n tel que $f = h^n$.

Preuve

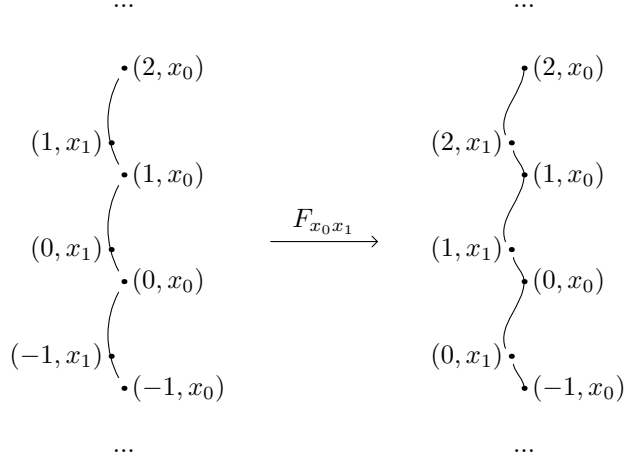
Soit f une telle fonction ; posons $n = pr_1(f(0, x_0))$. Alors la fonction $pr_1 \circ f(\cdot, x_0) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une bijection qui préserve l'ordre, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k, x_0) = (n + k, x_0)$. Ensuite, pour tout $y \in X \setminus \{x_0\}$, on a $f(k, x_0) \leq_{x_0} f(k, y) \leq_{x_0} f(k + 1, x_0)$, c'est-à-dire $(n + k, x_0) \leq_{x_0} f(k, y) \leq_{x_0} (n + k + 1, x_0)$, donc $f(k, y) = (n + k, y)$, car f se projette sur id_X . $\square$

Proposition 1.3.11 Pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe une unique bijection $F_{x_0 x_1}$ de $\mathbb{Z} \times X$ qui se projette sur id_X telle que pour tous $a, b \in \mathbb{Z} \times X$, $a <_{x_0} b \Leftrightarrow F_{x_0 x_1}(a) <_{x_1} F_{x_0 x_1}(b)$, et telle que $F_{x_0 x_1}(0, x_0) = (0, x_0)$.

Preuve

Si $x_0 = x_1$, alors d'après la proposition précédente, l'unique fonction qui convienne est $F_{x_0 x_1} = id_{\mathbb{Z} \times X}$. Supposons maintenant que $x_0 \neq x_1$. L'application $F_{x_0 x_1}$ doit se projeter

sur id_X , donc nous ne devons que décaler des indices, de la manière suggérée par la figure ci-dessous.



On pose $F_{x_0 x_1}(k, x_0) = (k, x_0)$ et $F_{x_0 x_1}(k, x_1) = (k + 1, x_1)$. Pour tout $y \in X \setminus \{x_0, x_1\}$, si $o(x_0, x_1, y) = -1$ on pose $F_{x_0 x_1}(k, y) = (k, y)$ et sinon on pose $F_{x_0 x_1}(k, y) = (k + 1, y)$: on a alors bien $a <_{x_0} b \Leftrightarrow F_{x_0 x_1}(a) <_{x_1} F_{x_0 x_1}(b)$. Ensuite, si f est une autre bijection vérifiant les mêmes hypothèses, alors $F_{x_0 x_1} \circ f^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{Z} \times X$ qui préserve l'ordre $\leq_{x_0}$, qui se projette sur id_X et qui fixe $(0, x_0)$ donc d'après la proposition 1.3.10, c'est l'identité. $\square$

Remarquons que pour tous $x_0, x_1 \in X$ distincts, on a $F_{x_0 x_1} \circ F_{x_1 x_0} = h$, contrairement à ce que notre notation pourrait laisser croire.

Proposition 1.3.12 *Soit X un ensemble muni d'un ordre cyclique (total) o , soit $x_0 \in X$, et soit $f : X \rightarrow X$ une bijection préservant o . Alors f admet au moins un relevé $\tilde{f}$ préservant l'ordre $\leq_{x_0}$. De plus, si $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont deux tels relevés, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{f}' = h^n \cdot \tilde{f}$.*

Remarque 1.3.13 *C'est vrai en général pour toutes les applications préservant l'ordre (donc injectives), pas nécessairement surjectives. Mais on ne s'en servira pas, et la preuve présentée ici est un peu plus courte que dans le cas général.*

Preuve

Soit $f : X \rightarrow X$ préservant o . On vérifie facilement que l'application $F : \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z} \times X$ définie par $F(n, x) = (n, f(x))$ vérifie : $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times X, a \leq_{x_0} b \Leftrightarrow F(a) \leq_{f(x_0)} F(b)$. On pose donc $\tilde{f} = F_{f(x_0)x_0} \circ f$. Alors $\tilde{f}$ est bien un relevé de f , préservant $\leq_{x_0}$.

Ensuite, si $\tilde{f}'$ est un autre relevé de f préservant $\leq_{x_0}$, alors $\tilde{f}' \circ \tilde{f}^{-1}$ est un relevé de id_X préservant $\leq_{x_0}$, donc d'après la proposition 1.3.10, $\tilde{f}' \tilde{f}^{-1} = h^n$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Nous noterons maintenant $Ord(X, o)$ le groupe des bijections de X qui préservent o , et $\widetilde{Ord(X, o, x_0)}$ le groupe formé par les relevés d'éléments de $Ord(X, o)$ à $\mathbb{Z} \times X$ préservant l'ordre $\leq_{x_0}$. D'après la proposition 1.3.11, la conjugaison par $F_{x_0 x_1}$ réalise un isomorphisme canonique entre les groupes $\widetilde{Ord(X, o, x_0)}$ et $\widetilde{Ord(X, o, x_1)}$, pour tous $x_0, x_1 \in X$. Ce

groupe, à isomorphisme près, sera noté $\widetilde{Ord(X, o)}$, et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur o , on notera $Ord(X)$ et $\widetilde{Ord(X)}$ ces deux groupes.

Classe d'Euler

Soit (X, o) un ensemble cycliquement ordonné, soit Σ une surface (connexe) et soit $\rho : \pi_1 \Sigma \rightarrow Ord(X)$ une représentation : on va définir un élément $e(\rho) \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$, qui ne dépend que de ρ , et qu'on appelle la classe d'Euler de la représentation.

Tout d'abord, vu que nous nous intéressons à des représentations de $\pi_1 \Sigma$ dans un groupe non abélien, il nous faut choisir un point base $* \in \Sigma$ pour pouvoir définir nos objets correctement. Choisissons un point base $x_0 \in X$. Soit alors $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$; $C_i = \{\sigma_\alpha^i\}_\alpha$, une cellulation de Σ , où chaque cellule est équipée d'une orientation, et telle que $* \in C_0$. Pour chaque boucle γ (basée en $*$) dans le 1-squelette, nous pouvons écrire γ comme un mot $(\sigma_1^1)^{s_1} \cdots (\sigma_k^1)^{s_k}$, $s_j = \pm 1$, en les éléments de C_1 . Nous dirons qu'une fonction $f : C_1 \rightarrow Ord(X)$ se projette sur ρ si pour toute boucle γ basée en $*$ dans le 1-squelette, l'élément $(f(\sigma_1^1))^{s_1} \circ \cdots \circ (f(\sigma_k^1))^{s_k}$ (encore avec les mêmes notations pour γ), que nous appelons $f(\gamma)$, est un relevé de $\rho(\gamma)$. Vu que le 1-squelette est homotope à un bouquet de cercles, il existe au moins une telle fonction f (en effet, on peut choisir un arbre maximal T contenant $*$ dans le 1-squelette, poser $f(\sigma^1) = id_X$ pour chaque arête σ^1 de T , et pour chaque arête σ^1 qui n'est pas dans T , σ^1 (munie de son orientation) définit, conjointement avec T , un élément $\gamma \in \pi_1 \Sigma$, et on pose $f(\sigma^1) = \rho(\gamma)$). Maintenant, le bord d'une 2-cellule σ_α^2 est une boucle $\gamma(\sigma_\alpha^2)$ (pas basée en $*$) dans le 1-squelette, triviale en homotopie. Nous pouvons encore l'écrire comme un mot $(\sigma_1^1)^{s_1} \cdots (\sigma_k^1)^{s_k}$, $s_j = \pm 1$, bien défini à permutation cyclique près, et, d'après la proposition 1.3.10 et le fait que h soit central dans $\widetilde{Ord(X)}$, il existe $n(\sigma_\alpha^2) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(\gamma(\sigma_\alpha^2)) = h^{n(\sigma_\alpha^2)}$. Finalement, si $c = \Sigma \lambda_i \sigma_i^2$ est un 2-cycle, nous posons $e(\rho) \cdot c = \Sigma \lambda_i n(\sigma_i^2)$.

Théorème 1.3.14 *Pour tout 2-cycle c , l'entier $e(\rho) \cdot c$ ne dépend que de (X, o) et de ρ , ce qui définit bien $e(\rho) \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$, appelée classe d'Euler de la représentation ρ .*

Si la surface Σ est orientée, alors l'évaluation de $e(\rho)$ sur la classe fondamentale est un entier, que nous appellerons encore (abusivement) la classe d'Euler de la représentation, $e(\rho) \in \mathbb{Z}$.

Preuve

Etape 1 : nous prouvons d'abord qu'étant donnés des points base $* \in \Sigma$, $x_0 \in X$ et une cellulation, $e(\rho)$ ne dépend pas du choix de la fonction f . Soient f_1 et f_2 deux telles fonctions. Choisissons un arbre maximal T dans le 1-squelette, contenant $*$. Pour chaque cellule $\sigma^1 \in T$, posons $f_1'(\sigma^1) = f_2'(\sigma^1) = 1$. Chaque cellule σ^1 qui n'est pas dans T détermine, avec T , une boucle $\gamma(\sigma^1)$ (vu que σ^1 est munie d'une orientation) dans le 1-squelette, basée en $*$. Pour $i = 1, 2$ on pose $f_i'(\sigma^1) = f_i(\gamma(\sigma^1))$. Vu que ces éléments $\sigma^1 \notin T$ engendrent le groupe fondamental du 1-squelette, pour toute boucle γ dans le 1-squelette on a donc $f_i(\gamma) = f_i'(\gamma)$, en particulier f_i' se projette sur ρ et définit la même classe d'Euler que f_i . Maintenant, pour toute 1-cellule σ^1 , il existe un entier $n(\sigma^1) \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1'(\sigma^1) \circ f_2'(\sigma^1)^{-1} = h^{n(\sigma^1)}$: c'est 0 si $\sigma^1 \in T$, et autrement cela découle de la proposition

1.3.10. Alors pour toute 2-cellule σ_α^2 , on a $f_1(\gamma(\sigma_\alpha^2)) - f_2(\gamma(\sigma_\alpha^2)) = \sum_{\sigma^1 \in \partial\sigma^2} n(\sigma^1)$ (en effet, si $\gamma(\sigma_\alpha^2)$ est donné par le mot cyclique $(\sigma_1^1)^{s_1} \dots (\sigma_k^1)^{s_k}$ alors

$$\begin{aligned} f_1(\gamma(\sigma_\alpha^2)) &= f_1(\sigma_1^1)^{s_1} \circ \dots \circ f_1(\sigma_k^1)^{s_k} = \left(f_2(\sigma_1^1)^{s_1} \circ h^{s_1 n(\sigma_1^1)} \right) \dots \left(f_2(\sigma_k^1)^{s_k} \circ h^{s_k n(\sigma_k^1)} \right) \\ &= f_2(\gamma(\sigma_\alpha^2)) \circ h^{\sum_{\sigma^1 \in \partial\sigma^2} n(\sigma^1)}, \end{aligned}$$

vu que h est central). Ainsi pour tout 2-cycle c , nous avons

$$e(\rho)_1 \cdot c - e(\rho)_2 \cdot c = \sum_{\sigma^2 \in c} \sum_{\sigma^1 \in \partial\sigma^2} n(\sigma^1),$$

où $e(\rho)_i$ désigne la classe d'Euler définie par la fonction f_i . Cette somme est nulle, puisque c n'a pas de bord.

Etape 2 : nous prouvons que $e(\rho)$ ne dépend ni du point $* \in \Sigma$, ni de la cellulation, ni du point base $x_0 \in X$. L'indépendance par rapport à $*$ découle de ce que h est central dans $\widetilde{Ord(X)}$, de sorte qu'une conjugaison globale d'une représentation ne change pas sa classe d'Euler. De plus, $e(\rho)$ est définie en termes de la cellulation de Σ , et est donc constant sous n'importe quelle isotopie de la cellulation de la surface. Maintenant, soit $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ une cellulation de Σ . Soit σ^1 une 1-cellule, et x un point de σ^1 qui n'est pas dans C_0 : on définit une nouvelle cellulation $C' = C'_0 \cup C'_1 \cup C'_2$, avec $C'_0 = C_0 \cup \{x\}$, $C'_1 = (C_1 \setminus \{\sigma^1\}) \cup \{\sigma_1^1, \sigma_2^1\}$ et $C'_2 = C_2$ coupant la 1-cellule σ^1 en deux morceaux le long du nouveau sommet x ; les nouvelles arêtes σ_1^1 et σ_2^1 héritent de l'orientation de σ^1 . Alors la classe d'Euler définie par C' est la même que celle définie par C . En effet, si $f : C_1 \rightarrow \widetilde{Ord(X)}$ est une fonction qui se projette sur ρ , définissons simplement $f' : C'_1 \rightarrow \widetilde{Ord(X)}$ par $f'(\sigma_1^1) = 1$, $f'(\sigma_2^1) = f(\sigma^1)$, et $f'(\sigma_\alpha^1) = f(\sigma_\alpha^1)$ pour toutes les autres 1-cellules σ_α^1 . De même, si σ^2 une 2-cellule, on définit une nouvelle cellulation $C'' = C''_0 \cup C''_1 \cup C''_2$ avec $C''_0 = C_0$, $C''_1 = C_1 \cup \{\sigma_n^1\}$ et $C''_2 = (C_2 \setminus \{\sigma^2\}) \cup \{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$ obtenue en coupant la 2-cellule σ^2 en deux, le long d'une nouvelle arête σ_n^1 , dont les sommets sont dans ∂C_2 . Soit alors $f : C_1 \rightarrow \widetilde{Ord(X)}$ une fonction qui se projette sur ρ . La boucle définie par $\partial\sigma_1^2$ (éventuellement, avec l'orientation opposée) s'écrit en un mot $\sigma_n^1 \gamma$ en les éléments de C'_1 (où γ désigne un mot en les éléments de $\partial\sigma^2$). Nous posons donc $f'(\sigma_n^1) = f(\gamma)$, et $f'(\sigma_\alpha^1) = f(\sigma_\alpha^1)$ pour toutes les autres 1-cellules σ_α^1 . Alors par construction, f' se projette sur ρ . Puis $f(\gamma(\sigma^2)) = f'(\gamma(\sigma^2)) = f'(\gamma(\sigma_1^2)) \circ f'(\gamma(\sigma_2^2))$, donc f' donne la même classe d'Euler que f . Ainsi, la classe d'Euler définie par C'' est encore la même que celle définie par C . Maintenant, nous utilisons le fait classique qu'en utilisant ces deux opérations (consistant à raffiner C), ainsi que des homotopies, depuis n'importe quelles cellulations C^1 et C^2 de la même surface Σ , on peut trouver un raffinement commun C^3 de C^1 et C^2 . Finalement, soient x_0, x'_0 deux points de X . Prenons une cellulation C de Σ et une fonction $f : C_1 \rightarrow \widetilde{Ord(X)}_{x_0}$ qui se projette sur ρ . Définissons alors $f' : C_1 \rightarrow \widetilde{Ord(X)}_{x'_0}$ par $f' = F_{x_0 x'_0} \circ f \circ (F_{x_0 x'_0})^{-1}$. Il est clair que f' se projette sur ρ et que f' définit la même classe d'Euler que f , vu que h commute avec $F_{x_0 x'_0}$. $\square$

Remarque 1.3.15 Soient Σ une surface orientée, ρ une représentation et $h : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ un revêtement de degré d . Alors $e(\rho \circ h) = d \cdot e(\rho)$. En effet, il suffit de prendre une cellulation

C de Σ qui se relève en une cellulation de Σ' , de prendre une fonction $f: C_1 \rightarrow \text{Ord}(X)$ qui se projette sur ρ , et de prendre $f' = f \circ h$ pour définir les classes d'Euler dans Σ et Σ' .

1.3.2 Représentations dans $PSL(2, \mathbb{R})$ et algorithme de Milnor

L'algorithme de Milnor

Munissons Σ_g de son orientation, et de la cellulation suggérée par la figure 1.3. Alors un représentant de la classe fondamentale $c \in H_2(\pi_1 \Sigma_g, \mathbb{Z})$ est le 2-cycle constitué de l'unique 2-cellule, qui est le $4g$ -gone, munie de l'orientation du plan.

Etant donnée une représentation $\rho \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{Ord}(X, o))$, prenons $x_0 \in X$ et choisissons un relevé arbitraire $\widetilde{\rho(x)}$ pour tout $x \in \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$. Comme on l'a déjà dit, on notera encore $e(\rho) \in \mathbb{Z}$ l'évaluation de $e(\rho) \in H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ sur la classe fondamentale c . Alors, par construction de la classe d'Euler on a

$$[\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}] \cdots [\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}] = h^{e(\rho)}. \quad (1.1)$$

Vu que h est central dans $\text{Ord}(\widetilde{X}, o, x_0)$ et commute avec $F_{x_0 x_1}$ pour tout $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, ce calcul de commutateurs ne dépend effectivement pas de x_0 ni des choix des relevés $\widetilde{\rho(a_i)}$, $\widetilde{\rho(b_i)}$.

Ce moyen efficace de calculer la classe d'Euler d'une représentation permet aussi d'appréhender la notion de classe d'Euler de façon très élémentaire. Nous renvoyons à l'article [Ghy87a] de E. Ghys pour une approche un peu plus générale.

Représentations dans $PSL(2, \mathbb{R})$

Comme nous l'avons dit, le groupe de Lie $PSL(2, \mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore solide, et $\pi_1(PSL(2, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$. Pour tout $A \in PSL(2, \mathbb{R})$, prendre un relevé $\tilde{A} \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ revient à relever l'homéomorphisme $A \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ en un homéomorphisme du revêtement universel du cercle, $\tilde{\mathbb{S}}^1 = \mathbb{R}$ (nous utilisons ici l'injection naturelle $PSL(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$). En d'autres termes, nous avons la suite exacte courte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} & \rightarrow & PSL(2, \mathbb{R}) & \rightarrow & 1. \\ & & & & \cap & & \cap & & \\ & & & & \text{Homeo}^+(\mathbb{R}) & & \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1) & & \end{array}$$

Dans le diagramme ci-dessus, le signe du générateur de $\mathbb{Z}$ est déterminé par le choix de l'orientation de $\mathbb{S}^1$. Comme dans [Gol88], nous désignerons par $z \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ l'image de ce générateur $1 \in \mathbb{Z}$.

Bien entendu, tout ce qui précède s'applique ici et si $\widetilde{\rho(a_i)}$, $\widetilde{\rho(b_i)}$ sont des relevés arbitraires de $\rho(a_i)$, $\rho(b_i)$ à $PSL(2, \mathbb{R})$, alors $e(\rho)$ est donnée par la formule suivante :

$$[\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}] \cdots [\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}] = z^{e(\rho)}.$$

En particulier, remarquons que dans le revêtement intermédiaire $SL(2, \mathbb{R})$, l'image de z est $-\text{Id}$. Ainsi, une représentation $\rho \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$ se relève à $SL(2, \mathbb{R})$ si et seulement si $e(\rho)$ est pair.

Nous pouvons maintenant éclaircir le problème de signe dans la remarque 1.1.5. Les éléments hyperboliques ont un relevé canonique à $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$: en effet, si $A \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ possède des points fixes, alors il admet un unique relevé $\tilde{A} \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ qui possède des points fixes. Le relevé correspondant à $SL(2, \mathbb{R})$ est celui qui a une trace positive. Dans le cadre de la remarque 1.1.5, choisissons donc les relevés avec points fixes $\tilde{A}, \tilde{B} \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$. Dans le cas où $[A, B]$ est hyperbolique, on constate que $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ donne un tour à x , autrement dit, $[\tilde{A}, \tilde{B}] = z \cdot [A, B]$, où $[A, B]$ est le relevé de $[A, B]$ qui a des points fixes : la projection dans $SL(2, \mathbb{R})$ donne donc $\text{tr}([A, B]) < 0$.

Une autre définition

Donnons maintenant une définition un peu plus générale de la classe d'Euler. Pour cela, commençons par quelques rappels de cohomologie des groupes. Nous renvoyons ici à [Cal04] pour un tour d'horizon détaillé, et à [ML95, Ghy87a, Thu88] pour plus de précisions.

Soit Γ un groupe. On forme le *complexe homogène* de Γ de la façon suivante. On note $C_n(\Gamma)$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'équivalence des $(n+1)$ -uplets de Γ , sous l'action diagonale de Γ : pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(\gamma_0, \dots, \gamma_n) \sim (\gamma\gamma_0, \dots, \gamma\gamma_n)$. L'opérateur de bord est défini par

$$\partial(\gamma_0, \dots, \gamma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\gamma_0, \dots, \hat{\gamma}_i, \dots, \gamma_n),$$

où $(\gamma_0, \dots, \hat{\gamma}_i, \dots, \gamma_n)$ désigne le n -uplet formé en omettant le $(i+1)$ -ème terme γ_i . Si A est un anneau, l'homologie du complexe dual $\text{Hom}(C_*(\Gamma), A)$ est notée $H^*(\gamma; A)$; c'est la *cohomologie du groupe* Γ . Cette cohomologie de Γ s'identifie à celle de $K(\Gamma, 1)$.

Soit maintenant (X, o) un ensemble cycliquement ordonné et $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Ord}(X, o)$ une représentation. On définit alors un 2-cocycle c par $c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = o(\rho(\gamma_1), \rho(\gamma_2), \rho(\gamma_3))$.

Si $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$ est le groupe fondamental de la surface (compacte, connexe, orientable) de genre g , on a alors $[c] = 2e(\rho)$. La remarque suivante en découle :

Remarque 1.3.16 *Soit Γ un groupe tel que $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$, et soient $\rho_1: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \Gamma$, $\rho_2: \Gamma \rightarrow \text{Ord}(X, o)$. Alors $e(\rho_1 \circ \rho_2) = 0$.*

Les parties finies suffisent

Notons $\mathbb{F}_{2g}$ le groupe libre sur l'ensemble $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$, et $w = [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Les images, par la surjection canonique $\mathbb{F}_{2g} \rightarrow \pi_1 \Sigma_g$, des mots partiels de w forment une partie P , et dans toute la suite de ce texte nous noterons P_{ref} la partie $P \cup P^{-1}$. Un intérêt majeur de l'algorithme de Milnor est que nous n'avons besoin que d'une quantité finie d'informations, concernant l'action de la partie finie P_{ref} sur l'ensemble ordonné X , pour pouvoir calculer la classe d'Euler d'une représentation.

C'est ce qui va nous permettre ici de montrer un résultat qui servira dans le chapitre 5, sur la compactification de $\text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))/PSL(2, \mathbb{R})$.

En effet, la convergence au sens de Gromov utilise des parties finies de $\pi_1 \Sigma_g$; il faut donc montrer que si on ne connaît que l'action d'une partie finie, mais suffisamment grosse de $\pi_1 \Sigma_g$, sur un ensemble ordonné, alors on connaît quand même sa classe d'Euler. Plus précisément :

Proposition 1.3.17 Soient (X, o) et (X', o') deux ensembles cycliquement ordonnés, munis de “points bases” x_0, x'_0 . Soient $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X, o)$ et $\rho' : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X', o')$ deux représentations. On suppose que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in P_{\text{ref}}$,

$$o(g_1 x_0, g_2 x_0, g_3 x_0) = o'(g_1 x'_0, g_2 x'_0, g_3 x'_0).$$

Alors $e(\rho_1) = e(\rho_2)$.

Dans le chapitre 5, nous aurons besoin d'un énoncé un peu plus fin, permettant des dégénérescences de certains triplets :

Proposition 1.3.18 Soient (X, o) et (X', o') deux ensembles cycliquement ordonnés, munis de “points bases” x_0, x'_0 . Soient $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X, o)$ et $\rho' : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X', o')$ deux représentations. Soient $y_0 \in X$ et $y'_0 \in X'$. Supposons aussi que $x_0 \notin P_{\text{ref}} \cdot y_0$, que $\text{card}(P_{\text{ref}} \cdot y_0) \geq 2$, et que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in P_{\text{ref}}$,

$$o(g_1 x_0, g_2 x_0, g_3 y_0) = 1 \Rightarrow o'(g_1 x'_0, g_2 x'_0, g_3 y'_0) = 1$$

et

$$o(g_1 x_0, g_2 y_0, g_3 y_0) = 1 \Rightarrow o'(g_1 x'_0, g_2 y'_0, g_3 y'_0) = 1.$$

Alors $e(\rho_1) = e(\rho_2)$.

Tout repose sur les deux lemmes élémentaires suivants :

Lemme 1.3.19 Soient (X, o) un ensemble cycliquement ordonné, et $f \in \text{Ord}(X)$. On suppose donné un point base $x_0 \in X$ et un élément $y \in X \setminus \{x_0\}$ tel que $f(y) \neq x_0$. On note $\tilde{f}$ le relevé de f à $\mathbb{Z} \times X$ qui vérifie $\tilde{f}(0, x_0) = (0, f(x_0))$, et on note n l'entier tel que $\tilde{f}(0, y) = (n, f(y))$. Alors n ne dépend que de $o(x_0, f(x_0), f(y))$. Plus précisément, $n = \max(0, -o(x_0, f(x_0), f(y)))$.

Lemme 1.3.20 Soient (X, o) un ensemble cycliquement ordonné, $f \in \text{Ord}(X)$ et $x_0 \in X$. Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $o(x_0, x_1, x_2) = o(f(x_0), x_1, x_2) = 1$. Alors il existe un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{Z} \times X$ tel que $(-1, x_2) <_{x_0} \tilde{f}(0, x_0) <_{x_0} (0, x_1)$. De plus, si $y \in X$ est tel que $o(x_1, x_2, y) \leq 0$ et $o(x_1, x_2, f(y)) \leq 0$, alors ce relevé $\tilde{f}$ vérifie $\tilde{f}(0, y) = (0, f(y))$.

Preuve de 1.3.19.

On a $f(y) \neq f(x_0)$ donc $y \neq x_0$ et donc $(0, x_0) <_{x_0} (0, y) <_{x_0} (1, x_0)$. La fonction $\tilde{f}$ étant croissante, on a donc $(0, f(x_0)) <_{x_0} (n, f(y)) <_{x_0} (1, f(x_0))$.

Si $o(x_0, f(x_0), f(y)) = 0$ alors $x_0 = f(x_0)$ et on a donc $n = 0$.

Si $o(x_0, f(x_0), f(y)) = 1$ alors $(0, f(x_0)) <_{x_0} (0, f(y)) <_{x_0} (1, f(x_0))$ et alors $n = 0$.

Si $o(x_0, f(x_0), f(y)) = -1$ alors $(-1, f(x_0)) <_{x_0} (0, f(y)) <_{x_0} (0, f(x_0))$ et alors $n = 1$.

□

Preuve de 1.3.20. Trois cas sont à distinguer ici.

- Si $f(x_0) = x_0$, alors $(-1, x_2) <_{x_0} (0, f(x_0)) <_{x_0} (0, x_1)$, donc on prend $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}(0, x_0) = (0, f(x_0))$. Nous avons alors $(0, x_0) <_{x_0} (0, y) <_{x_0} (1, x_0)$, donc en appliquant $\tilde{f}$ (qui est strictement croissante) : $(0, x_0) <_{x_0} \tilde{f}(0, y) <_{x_0} (1, x_0)$, donc $\tilde{f}(0, y) = (0, f(y))$.

- Si $o(x_0, x_1, f(x_0)) = -1$ alors $(-1, x_2) <_{x_0} (0, x_0) <_{x_0} (0, f(x_0)) <_{x_0} (0, x_1)$ donc on prend encore $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}(0, x_0) = (0, f(x_0))$. D'après le lemme 1.3.19, il suffit de montrer que $o(x_0, f(x_0), f(y)) \geq 0$ pour avoir $n = 0$ et donc $\tilde{f}(0, y) = (0, f(y))$. Mais si $o(x_0, f(y), f(x_0)) = 1$, vu que $o(x_0, f(x_0), x_1) = 1$ on obtient $o(x_0, f(y), x_1) = 1$ donc $o(x_1, x_0, f(y)) = 1$ ce qui, avec $o(x_1, x_2, x_0) = 1$, donne $o(x_1, x_2, f(y)) = 1$, ce qui est une contradiction.
- Si $o(x_0, x_1, f(x_0)) = 1$ alors on a $o(x_0, x_2, f(x_0)) = 1$ (en effet, cela découle des égalités $o(f(x_0), x_0, x_1) = o(f(x_0), x_1, x_2) = 1$), donc

$$(-1, x_2) <_{x_0} (-1, f(x_0)) <_{x_0} (0, x_0) <_{x_0} (0, x_1)$$

donc on prend $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}(0, x_0) = (-1, f(x_0))$. En particulier, $\tilde{f} = \tilde{f}' \circ h^{-1}$, où $\tilde{f}'(0, x_0) = (0, f(x_0))$. Et on a $o(x_0, f(x_0), f(y)) = -1$ (en effet, si $f(y) = x_1$ ou x_2 nous avons déjà cette égalité, et sinon $o(x_2, x_1, f(y)) = 1$, ce qui, avec l'égalité $o(x_2, x_0, x_1) = 1$, donne $o(x_2, x_0, f(y)) = 1$ c'est-à-dire $o(x_0, f(y), x_2) = 1$, ce qui donne, avec $o(x_0, x_2, f(x_0)) = 1$, que $o(x_0, f(y), f(x_0)) = 1$) donc le lemme 1.3.19 appliqué à $\tilde{f}'$ implique que $\tilde{f}'(0, y) = (1, f(y))$, donc $\tilde{f}(0, y) = (0, f(y))$ cette fois encore.

□

On va maintenant prouver la proposition 1.3.18, dont on se servira dans le chapitre 5. On laisse la preuve, plus facile, de la proposition 1.3.17 en exercice.

Preuve de 1.3.18.

Notons $y_i = [\rho(a_{i+1}), \rho(b_{i+1})] \cdots [\rho(a_g), \rho(b_g)] \cdot y_0$. Alors en particulier $y_g = y_0$. Les entiers m_i tels que $[\rho(a_i), \rho(b_i)](0, y_i) = (m_i, y_{i-1})$ ne dépendent pas du choix des relevés $\widetilde{\rho(a_i)}$, $\widetilde{\rho(b_i)}$, et $e(\rho) = \sum_{i=1}^g m_i$, d'après l'algorithme de Milnor. On utilise aussi les mêmes notations dans X' .

L'ensemble fini $P_{ref} \cdot y_0 \subset X \setminus \{x_0\}$, muni de l'ordre $<_{x_0}$, contient un plus petit élément x_1 et un plus grand élément x_2 . De même on définit x'_1 et x'_2 dans X' . Soit alors γ_1 un élément de P_{ref} tel que $\gamma_1 y'_0 = x'_1$. Alors pour tout $\gamma \in P_{ref}$, $o'(x'_0, \gamma_1 y'_0, \gamma y') \leq 0$, donc $o(x_0, \gamma_1 y_0, \gamma y_0) \leq 0$, donc $\gamma_1 y_0$ est minimal parmi $P_{ref} \cdot y_0$ dans $X \setminus \{x_0\}$ pour l'ordre $<_{x_0}$, c'est-à-dire $\gamma_1 y_0 = x_1$. De même, x_2 et x'_2 correspondent à (au moins) un même élément $\gamma_2 \in P_{ref}$. De plus, vu que $Card(P_{ref} \cdot y_0) \geq 2$, on a $x_1 <_{x_0} x_2$, donc $o(x_0, x_1, x_2) = 1$.

Pour tout élément $\gamma \in \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ nous définissons $\widetilde{\rho(\gamma)}$ et $\widetilde{\rho'(\gamma)}$ de la manière suivante. Si $\rho(\gamma) \cdot x_0 \neq x_0$, on choisit $\widetilde{\rho(\gamma)}$ tel que $\widetilde{\rho(\gamma)}(0, x_0) = (0, \rho(\gamma) \cdot x_0)$; et on choisit $\widetilde{\rho'(\gamma)}$ tel que $\widetilde{\rho'(\gamma)}(0, x'_0) = (0, \rho'(\gamma) \cdot x'_0)$. Si, par contre, $\rho(\gamma) \cdot x_0 = x_0$ alors on a $o(x_0, x_1, x_2) = o(\rho(\gamma) \cdot x_0, x_1, x_2) = 1$ donc, d'après le lemme 1.3.20, $\rho(\gamma)$ admet un relevé $\widetilde{\rho(\gamma)}$ tel que $(-1, x_2) <_{x_0} \widetilde{\rho(\gamma)}(0, x_0) <_{x_0} (0, x_1)$, et dans ce cas nous avons aussi $o'(x'_0, x'_1, x'_2) = o'(\rho'(\gamma) \cdot x'_0, x'_1, x'_2) = 1$ (en effet, $o(x_0, x_1, x_2) = o(x_0, \gamma_1 y_0, \gamma_2 y_0) = 1$ donc $o'(x'_0, x'_1, x'_2) = 1$ et, de même, $o(\gamma x_0, x_1, x_2) = 1$ donc $o'(\rho'(\gamma) x'_0, x'_1, x'_2) = 1$, vu que $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in P_{ref}$) donc, toujours en appliquant le lemme 1.3.20, on peut définir $\widetilde{\rho'(\gamma)}$ de sorte que $(-1, x'_2) <_{x'_0} \widetilde{\rho'(\gamma)}(0, x'_0) <_{x'_0} (0, x'_1)$.

Notons alors $n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, n_{i_4}$ tels que

$$\widetilde{\rho(b_i)}^{-1}(0, y_i) = (n_{i_4}, \rho(b_i)^{-1} \cdot y_i),$$

$$\widetilde{\rho(a_i)}^{-1} \cdot (0, \rho(b_i)^{-1} \cdot y_i) = (n_{i_3}, \rho(a_i)^{-1} \rho(b_i)^{-1} \cdot y_i),$$

$$\dots,$$

et de même on définit des entiers $n'_{i_1}, \dots, n'_{i_4}$.

Vérifions d'abord que $n_{i_4} = n'_{i_4}$. Notons $\gamma = [a_{i+1}, b_{i+1}] \cdots [a_g, b_g]$ (c'est l'élément de $\pi_1 \Sigma_g$ défini par le mot partiel qui suit b_{i-1} dans w).

- Si $\rho(b_i) \cdot x_0 \neq x_0$, alors $o(x_0, \rho(b_i)^{-1} \cdot x_0, \rho(b_i^{-1} \gamma) \cdot y_0) \neq 0$ (en effet, ces trois points sont deux à deux distincts car γ et $b_i^{-1} \gamma$ sont dans P_{ref}), et donc

$$o'(x'_0, \rho'(b_i^{-1}) \cdot x'_0, \rho'(b_i^{-1}) \cdot y'_i) = o(x_0, \rho(b_i^{-1}) \cdot x_0, \rho(b_i^{-1}) \cdot y_i)$$

donc d'après le lemme 1.3.19 (appliqué à $f = \rho(b_i^{-1})$, $y = y_i$ puis à $f = \rho'(b_i^{-1})$ et $y = y'_i$) on a $n_{i_4} = n'_{i_4}$.

- Si $\rho(b_i) \cdot x_0 = x_0$, alors d'après le lemme 1.3.20, on a cette fois-ci $n_{i_4} = n'_{i_4} = 0$.

De la même manière on obtient $n_{i_3} - n_{i_4} = n'_{i_3} - n'_{i_4}$, $\dots$, $n_{i_1} - n_{i_2} = n'_{i_1} - n'_{i_2}$, de sorte que $m_i = m'_i$, d'où $e(\rho) = e(\rho')$. $\square$

1.3.3 Inégalité de Milnor-Wood

Les énoncés

Nous allons traduire dans le langage du 1.3.1, les techniques de [Mil58], [Woo71], [Ghy87a] et [Mat87], pour montrer que la classe d'Euler des représentations satisfait l'inégalité de Milnor-Wood. Nous montrons aussi qu'un résultat intermédiaire de [Mat87] est encore valable dans ce contexte. En particulier, ces résultats ne nécessitent pas de notion de topologie du cercle (donc pas de continuité), mais uniquement un ordre cyclique préservé par la représentation. Les résultats qui viennent sont en particulier valables pour un ensemble X de cardinalité quelconque, ou si c'est le bord d'un arbre réel épais, comme on le verra plus tard.

On va montrer les deux résultats suivants :

Théorème 1.3.21 (Inégalité de Milnor-Wood) *Soit (X, o) un ensemble muni d'un ordre cyclique total. Alors, pour toute représentation $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{Ord}(X))$, on a $|e(\rho)| \leq |\chi(\Sigma_g)|$.*

Définition 1.3.22 *On dit que $f \in \text{Ord}(X)$ est sauvage s'il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $o(x_1, f(x_1), x_2) = 1$ et $o(x_2, \widetilde{f(x_1)}, f(x_2)) = 1$. Dans le cas contraire on dit que f est non sauvage. On dira aussi que $f \in \text{Ord}(X)$ est sauvage s'il se projette sur un élément sauvage.*

Théorème 1.3.23 (S. Matsumoto) *Soit $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X)$ tel qu'il existe $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g)$ avec $\alpha \neq 1$, tel que $\rho(\alpha)$ soit non-sauvage. Alors $|e(\rho)| < |\chi(\Sigma_g)|$.*

Les preuves

Les preuves présentées ici ne sont pas vraiment originales et sont inspirées de [Woo71, Ghy87a, Mat87]. Dans ces articles, à tout homéomorphisme du cercle f on associe des réels $\underline{m}(f)$ et $\overline{m}(f)$, qui jouent un rôle central. Ces nombres ont été introduits par D. Eisenbud,

U. Hirsch et W. Neumann [EHN81]. Le fait de ne pas avoir d'autre structure que l'ordre cyclique mène à poser les entiers suivants, qui jouent le même rôle.

Pour tout $f \in \widetilde{Ord(X, o)}$, on pose

$$\overline{ns}(f) = \max \{n \mid \exists a \in \mathbb{Z} \times X, f(a) >_{x_0} h^n(a)\}$$

et

$$\underline{ns}(f) = \min \{n \mid \exists a \in \mathbb{Z} \times X, h^n(a) >_{x_0} f(a)\}.$$

La preuve de la proposition suivante est un exercice facile, qui ressemble à la preuve du point 4 de celle qui suit.

Proposition 1.3.24 *Pour tout $f \in \widetilde{Ord(X)}$, les entiers $\underline{ns}(f)$ et $\overline{ns}(f)$ sont bien définis.*

De plus, ils vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.25

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{ns}(h^k) = k - 1$; $\underline{ns}(h^k) = k + 1$.
2. Pour toute $f \in \widetilde{Ord(X)}$, $\overline{ns}(f) = -\underline{ns}(f^{-1})$.
3. Pour toutes $f, g \in \widetilde{Ord(X)}$, $\overline{ns}(g \circ f \circ g^{-1}) = \overline{ns}(f)$ et $\underline{ns}(g \circ f \circ g^{-1}) = \underline{ns}(f)$.
4. Pour toute $f \in \widetilde{Ord(X)}$ qui ne se projette pas sur id_X , on a $0 \leq \underline{ns}(f) - \overline{ns}(f) \leq 1$.
5. Une fonction f est sauvage si et seulement si $\underline{ns}(f) = \overline{ns}(f)$.
6. Pour toutes $f, g \in \widetilde{Ord(X)}$, on a les inégalités $\overline{ns}(f \circ g) \geq \overline{ns}(f) + \underline{ns}(g) - 1$ et $\overline{ns}(f \circ g) \leq \overline{ns}(f) + \overline{ns}(g) + 1$.
7. Pour toutes $f, g \in \widetilde{Ord(X)}$, $\overline{ns}([f, g]) \geq -1$ et $\underline{ns}([f, g]) \leq 1$.
8. Pour toutes $f, g \in \widetilde{Ord(X)}$, si $\overline{ns}([f, g]) = \underline{ns}([f, g])$ et $|\overline{ns}([f, g])| = 1$, alors f est sauvage.

Preuve

Les preuves des trois premiers points découlent immédiatement de la définition, et du fait que h soit central.

Preuve de 4 : Montrons que pour tout $a \in \mathbb{Z} \times X$, $f(a) \leq_{x_0} h^{\underline{ns}(f)+1}(a)$. Par définition, il existe $b \in \mathbb{Z} \times X$ tel que $h^{\underline{ns}(f)}(b) >_{x_0} f(b)$. Posons $a_0 = pr_1(a)$ et $b_0 = pr_1(b)$: il existe $i \in \{0, 1\}$ tel que $(0, b_0) <_{x_0} (i, a_0) <_{x_0} (1, b_0)$. Alors

$$(i + \underline{ns}(f) + 1, a_0) >_{x_0} (\underline{ns}(f) + 1, b_0) >_{x_0} f(1, b_0) >_{x_0} f(i, a_0),$$

i.e $h^{\underline{ns}(f)+1}(i, a_0) >_{x_0} f(i, a_0)$.

Ensuite, quitte à composer f par $h^{-\overline{ns}(f)}$, supposons que $\overline{ns}(f) = 0$. Supposons que f ne se projette pas sur id_X ; montrons qu'alors $\underline{ns}(f) \leq 1$. L'égalité $\overline{ns}(f) = 0$ signifie qu'il existe $a \in \mathbb{Z} \times X$ tel que $f(a) >_{x_0} a$, et que pour tout $b \in \mathbb{Z} \times X$, $f(b) \leq_{x_0} h(b)$. Vu que f ne se projette pas sur id , il existe $b \in \mathbb{Z} \times X$ tel que $f(b) \neq h(b)$, de sorte que $f(b) <_{x_0} h(b)$. Cela signifie précisément que $\underline{ns}(f) \leq 1$.

Preuve de 5 : Supposons que $\underline{ns}(f) = \overline{ns}(f)$. Notons φ la projection de f dans $Ord(X)$. Quitte à composer par h , nous pouvons supposer que $\underline{ns}(f) = 0$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z} \times X$

tels que $f(a) >_{x_0} a$ et $f(b) <_{x_0} b$. Notons $\alpha = pr_2(a)$ et $\beta = pr_2(b)$, et posons $f' = F_{x_0\alpha} \circ f$. Alors $f'(a) >_\alpha a$ et $f'(b) <_\alpha b$. Quitte à considérer $h^n(a)$ avec un certain $n \in \mathbb{N}$ au lieu de a , nous pouvons supposer que $a = (0, \alpha)$, et, de même, que $b = (0, \beta)$. Notons n_a et n_b les entiers tels que $f'(a) = (n_a, \varphi(\alpha))$ et $f'(b) = (n_b, \varphi(\beta))$. On a $(0, \alpha) <_\alpha (0, \beta)$ de sorte que $(n_a, \varphi(\alpha)) <_\alpha (n_b, \varphi(\beta))$, et vu que $f'(a) >_\alpha a$ et $f'(b) <_\alpha b$ nous avons encore $(n_b, \varphi(\beta)) <_\alpha (0, \beta)$ et $(n_a, \varphi(\alpha)) >_\alpha (0, \alpha)$ donc $0 \leq n_a \leq n_b \leq 0$, de sorte que $n_a = n_b = 0$, et donc $(0, \varphi(\alpha)) <_\alpha (0, \varphi(\beta)) <_\alpha (0, \beta)$, d'où les égalités $o(\alpha, \varphi(\alpha), \beta) = 1$ et $o(\beta, \varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = 1$, ce qui signifie que f est sauvage.

Réciproquement, supposons que f soit sauvage, c'est-à-dire qu'il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $o(x_1, f(x_1), x_2) = o(x_2, f(x_1), f(x_2)) = 1$. Notons encore par f un relevé de f dans $X \times \mathbb{Z}$, avec point base x_1 . Quitte à composer par une puissance de h , on peut supposer que $f(x_1, 0) = (f(x_1), 0)$, et puisque la fonction f est croissante, nous avons $f(x_2, 0) = (f(x_2), 0)$. En particulier, $f(x_1, 0) >_{x_1} (x_1, 0)$ et $f(x_2, 0) <_{x_1} (x_2, 0)$, ainsi $\underline{ns}(f) = \overline{ns}(f) = 0$.

Preuve de 6 : Par définition, il existe $b \in \mathbb{Z} \times X$ tel que $f(b) >_{x_0} h^{\overline{ns}(f)}(b)$. Et si $b = g(a)$, on a $fg(a) >_{x_0} h^{\overline{ns}(f)}(g(a))$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{Z} \times X$, $h^{\underline{ns}(g)-1}(x) \leq_{x_0} g(x)$, par minimalité de $\underline{ns}(g)$. Donc $fg(a) >_{x_0} h^{\overline{ns}(f)+\underline{ns}(g)-1}(a)$. Donc par définition de $\overline{ns}(fg)$, on a bien : $\overline{ns}(fg) \geq \overline{ns}(f) + \underline{ns}(g) - 1$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{Z} \times X$, on a $f(x) \leq h^{\overline{ns}(f)+1}(x)$, et $g(x) \leq h^{\overline{ns}(g)+1}(x)$, d'où $fg(x) \leq_{x_0} h^{\overline{ns}(f)+\overline{ns}(g)+2}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z} \times X$, i.e. $\overline{ns}(fg) \leq \overline{ns}(f) + \overline{ns}(g) + 1$.

Preuve de 7 : $\overline{ns}([f, g]) = \overline{ns}(f \circ (gf^{-1}g^{-1}))$, donc d'après les points précédents, on a $\overline{ns}([f, g]) \geq \overline{ns}(f) + \underline{ns}(f^{-1}) - 1 = -1$; de même, $\underline{ns}([f, g]) \leq 1$.

Preuve de 8 : Si $\overline{ns}([f, g]) = 1$ ou -1 , supposons par exemple que $\overline{ns}([f, g]) = 1$. D'après le point 6, on a donc $1 = \overline{ns}(f \circ (gf^{-1}g^{-1})) \leq 1 + \overline{ns}(f) + \overline{ns}(f^{-1})$, donc $\overline{ns}(f) - \underline{ns}(f) \geq 0$. D'après le point 5, cela nécessite que f soit sauvage. $\square$

Preuve de 1.3.21.

Soit $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \text{Ord}(X)$ une représentation. Alors en choisissant des relevés quelconques $\widetilde{\rho(a_i)}$ et $\widetilde{\rho(b_i)}$, on a $[\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}] \cdots [\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}] = h^{e(\rho)}$, donc

$$\begin{aligned} e(\rho) - 1 &= \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}] \cdots [\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}]) \\ &\geq \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}]) + \cdots + \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}]) - (g - 1) \\ &\geq -g - (g - 1), \end{aligned}$$

d'où $e(\rho) \geq -2g + 2$; de même on montre que $e(\rho) \leq 2g - 2$. $\square$

Preuve de 1.3.23.

D'après la proposition 1.2.3, il existe un revêtement $h : \Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$ tel que α soit dans l'image de h et tel que α soit représenté par une courbe simple fermée non séparante sur $\Sigma_{g'}$. D'après la proposition 1.2.1, on peut supposer $\alpha = a_1$ dans la présentation standard de $\pi_1 \Sigma_{g'}$. D'après la remarque 1.3.15, ρ est de classe d'Euler extrême si et seulement si $\rho \circ h$ est de classe d'Euler extrême (vu que la caractéristique d'Euler est aussi multiplicative). Ainsi, nous pouvons nous ramener au cas où $\alpha = a_1$. Deux cas sont possibles :

- si $[\rho(a_1), \rho(b_1)] = id_X$, alors ρ permet de définir une représentation de $\pi_1 \Sigma_{g-1}$ et d'après l'inégalité de Milnor-Wood, $|e(\rho)| \leq 2g - 4$.

– sinon, d'après le point 4 de la proposition 1.3.25, on a $\overline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}]) = 0$ ou $\underline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}]) = 0$: d'après le point 2 de cette proposition, on peut supposer $\overline{ns}([\rho(a_1), \rho(b_1)]) = 0$. Alors d'après le point 7 de cette proposition,

$$\begin{aligned} e(\rho) - 1 &\geq \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}]) + \cdots + \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}]) - (g - 1) \\ &\geq -(g - 1) - (g - 1), \end{aligned}$$

d'où $e(\rho) \geq -2g + 3$, et

$$\begin{aligned} e(\rho) + 1 &\leq \overline{ns}([\widetilde{\rho(a_1)}, \widetilde{\rho(b_1)}]) + \underline{ns}([\widetilde{\rho(a_2)}, \widetilde{\rho(b_2)}]) + \cdots + \underline{ns}([\widetilde{\rho(a_g)}, \widetilde{\rho(b_g)}]) + g - 1 \\ &\leq 2g - 2, \end{aligned}$$

d'où $e(\rho) \leq 2g - 3$.

□

Chapitre 2

Rappels sur la compactification de l'espace de Teichmüller

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, Γ est un groupe engendré par une partie finie S , que nous supposons symétrique. On note $R_\Gamma(n) = \text{Hom}(\Gamma, \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n))$ l'espace des représentations de Γ dans le groupe $SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^n$. On note encore $m'_\Gamma(n) = R_\Gamma(n)/\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ son quotient par l'action de conjugaison globale par les isométries préservant l'orientation, et $X_\Gamma(n)$ l'ensemble formé par les caractères des représentations. On munit $R_\Gamma(n) \subset SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)^{\text{Card}(S)}$ de la topologie usuelle et $m'_\Gamma(n)$ et $X_\Gamma(n)$ de la topologie quotient.

Lorsque Γ est le groupe fondamental d'une surface de genre $g \geq 2$, une composante connexe de $m'_\Gamma(n)$ s'identifie à l'espace de Teichmüller de la surface. W. Thurston a introduit ([Thu88], voir aussi [FLP91]) une compactification naturelle des espaces de Teichmüller. À l'aide de techniques de géométrie algébrique, M. Culler, J. Morgan et P. Shalen (voir [CM87, CS83, Mor86, MS84]), ont défini une compactification de $X_\Gamma(n)$, pour tout $n \geq 2$, qui généralise la compactification de Thurston des espaces de Teichmüller.

En 1988, M. Bestvina et F. Paulin, de façon indépendante [Bes88, Pau88], ont donné une interprétation plus géométrique de cette compactification. Plus précisément, F. Paulin a défini la topologie de Gromov équivariante, et à l'aide de cette topologie, il a donné une compactification du sous-espace $m'^{fd}_\Gamma(n)$ de $m'_\Gamma(n)$ formé par les représentations fidèles et d'image discrète.

Le but de ce chapitre est de rappeler ces travaux de F. Paulin, tout en les généralisant aux représentations qui ne sont pas nécessairement fidèles et discrètes. L'obstacle principal à cette généralisation est le fait que $m'_\Gamma(n)$, en général, n'est pas un espace *séparé*. Dans un premier temps, on va donc définir *géométriquement* le plus gros quotient séparé $m^o_\Gamma(n)$ de $m'_\Gamma(n)$, de sorte que nous pourrions le munir de la topologie de Gromov équivariante (de même on construit le plus gros quotient séparé $m^u_\Gamma(n)$ de $m'_\Gamma(n)/\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$; le o que nous écrivons ici insiste sur le fait que nous avons gardé une information liée à l'orientation de $\mathbb{H}^n$, en ne quotientant pas par toutes les isométries).

Je renvoie à [Pau04] pour un exposé efficace des travaux de F. Paulin sur cette compactification. Notons ici que A. Parreau, dans [Par00] (voir aussi [Par]) a adapté le travail

de F. Paulin à un cadre très nettement plus général, incluant des représentations dans des groupes de Lie de rang supérieur. Cependant, la démarche présentée ici, qui consiste à exhiber le plus gros quotient séparé de $m'_\Gamma(n)$, est un peu plus naturelle dans notre contexte, et présente l'avantage de définir la compactification via la topologie de Gromov équivariante, ce qui nous sera utile ultérieurement.

2.2 L'espace $m_\Gamma^o(n)$

La plupart des arguments qui vont être présentés dans cette section peuvent s'exprimer de manière plus algébrique, et peuvent se généraliser à tous les groupes de Lie semi-simples (voir [Par]). La construction proposée ici, elle, n'utilise que des arguments de géométrie hyperbolique.

Commençons par constater que l'espace $m'_\Gamma(n)$ n'est pas séparé en général. Dans $Isom^+(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, donc sa classe de conjugaison n'est pas séparée de celle de l'identité. À condition qu'il existe un morphisme non trivial de Γ dans $\mathbb{Z}$, nous pouvons donc construire des représentations abéliennes de Γ , qui ne sont pas séparées de la représentation triviale.

Définition 2.2.1 *Nous noterons $m_\Gamma^o(n)$ le sous-espace de $m'_\Gamma(n)$ formé par les classes de représentations qui ont soit 0, soit au moins 2 points fixes globaux dans $\partial\mathbb{H}^n$.*

Nous disposons donc d'une application $i: m_\Gamma^o(n) \hookrightarrow m'_\Gamma(n)$. On peut aussi définir une application $\pi: m'_\Gamma(n) \twoheadrightarrow m_\Gamma^o(n)$ comme suit. Si $c \in m_\Gamma^o(n)$, on pose $\pi(c) = c$ (en particulier, π est surjective). Si $c = [\rho] \in m'_\Gamma(n) \setminus m_\Gamma^o(n)$, alors ρ possède un unique point fixe $r_1 \in \partial\mathbb{H}^n$. Choisissons un autre point, arbitrairement, $r_2 \in \partial\mathbb{H}^n \setminus \{r_1\}$, et notons $g_k \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ l'isométrie hyperbolique d'axe (r_1, r_2) , de point attracteur r_1 , et de distance de translation k .

Lemme 2.2.2 *La suite $(g_k^{-1} \rho g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une représentation $\rho_\infty \in R_\Gamma(n)$ telle que $[\rho_\infty] \in m_\Gamma^o(n)$, et telle que $[\rho_\infty]$ ne dépend ni du choix de ρ dans la classe de conjugaison c , ni du choix de r_2 .*

Nous posons donc $\pi(c) = [\rho_\infty]$.

Preuve

Choisissons un représentant ρ de la classe de conjugaison c tel que ρ fixe $0 \in \partial\mathbb{H}^n$ (autrement dit, on conjugue ρ par une isométrie qui envoie r_1 sur 0 ; ce sont les notations de la fin de la section 1.1.2 que nous utilisons là). Prenons $r_2 = \infty$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho(\gamma)$ est sous la forme

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 & (0) \\ r(\gamma) & \frac{1}{\lambda(\gamma)} & Y(\gamma) \\ Z(\gamma) & (0) & A(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, g_k est sous la forme

$$g_k = \begin{pmatrix} t_k & & (0) \\ & \frac{1}{t_k} & \\ (0) & & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

où $t_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Alors $g_k^{-1}\rho g_k$ converge vers la représentation ρ_∞ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\rho_\infty(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & (0) \\ (0) & \frac{1}{\lambda(\gamma)} & A(\gamma) \end{pmatrix},$$

qui fixe bien les points du bord 0 et ∞ .

Si on avait choisi un autre représentant ρ' de c fixant 0, on aurait alors $\rho' = h^{-1}\rho h$ avec $h \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ sous la forme

$$h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ r & \frac{1}{\lambda} & Y \\ Z & (0) & A \end{pmatrix},$$

et la conjugaison par h ne touche pas aux éléments $\lambda(\gamma)$ et $A(\gamma)$, qui déterminent ρ_∞ . Enfin, le choix d'un autre r_2 revient à conjuguer ρ par une isométrie de $\mathbb{H}^n$ préservant l'orientation et fixant 0; nous venons de traiter ce cas. $\square$

Ainsi, on peut aussi munir l'espace $m_\Gamma^o(n)$ de la topologie quotient donnée par la surjection $\pi: m'_\Gamma(n) \twoheadrightarrow m_\Gamma^o(n)$. L'objectif de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 *La topologie induite et la topologie quotient coïncident sur $m_\Gamma^o(n)$ (en particulier, π est continue). De plus, l'espace $m_\Gamma^o(n)$ est séparé.*

En particulier, cette topologie est encore la topologie quotient correspondant à la surjection $R_\Gamma(n) \twoheadrightarrow m_\Gamma^o(n)$.

Il en découle que $m_\Gamma^o(n)$ est le plus gros quotient séparé de $m'_\Gamma(n)$, dans le sens suivant :

Définition 2.2.4 *Soit X un espace topologique. On dit qu'un quotient $\pi: X \rightarrow X_s$ est le plus gros quotient séparé de X si X_s est séparé et si pour toute application continue $f: X \rightarrow Y$ vers un espace séparé Y , il existe une unique fonction $\bar{f}: X_s \rightarrow Y$ telle que $f = \pi \circ \bar{f}$.*

En particulier, un tel quotient, s'il existe, est unique, à homéomorphisme *canonique* près. Clairement, tout espace séparé est lui-même son plus gros quotient séparé.

Les représentations qui n'ont aucun point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$ sont dites *non paraboliques*, et dans tous les raisonnements qui vont suivre, tout ce qui concerne exclusivement les représentations non paraboliques est traité, dans le cadre nettement plus général des actions sur les espaces $CAT(0)$, par Anne Parreau [Par].

Commençons par montrer que les représentations sans points fixes au bord forment un ouvert de $m'_\Gamma(n)$:

Lemme 2.2.5 (comparer à [Par], proposition 2.6) *Soit $\rho \in R_\Gamma(n)$ sans points fixes au bord. Alors $[\rho]$ possède, dans $m'_\Gamma(n)$, un voisinage dans lequel aucune représentation n'a de points fixes au bord.*

Preuve

L'espace $R_\Gamma(n) \subset (M_{n+1}(\mathbb{R}))^S$ est un espace métrique, et l'application $R_\Gamma(n) \rightarrow m'_\Gamma(n)$ est ouverte, donc tout point de $m'_\Gamma(n)$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages ; nous pouvons donc raisonner en termes de suites dans cet espace.

Considérons $(\rho_k)_k \in m'_\Gamma(n)^\mathbb{N}$ tel que pour tout k , ρ_k possède un point fixe $r_k \in \partial\mathbb{H}^n$; et supposons que $\rho_k \rightarrow \rho$: montrons que ρ possède un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$. Quitte à extraire, r_k converge vers un point $r \in \partial\mathbb{H}^n$. Nous pouvons alors trouver $h_k \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ tel que $h_k(r_k) = r$ et $h_k \rightarrow \text{Id}$. Alors $h_k \rho_k h_k^{-1}$ fixe r globalement, et converge vers ρ donc ρ fixe r globalement. Ainsi, l'ensemble des représentations qui ont au moins un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$ est un fermé de $m'_\Gamma(n)$. $\square$

Le premier pas vers la continuité de π est le résultat suivant.

Lemme 2.2.6 *Soit $(\rho_k)_k$ une suite de représentations, qui ont chacune un point fixe unique dans $\partial\mathbb{H}^n$, et qui convergent vers une représentation ρ qui possède au moins deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$. Alors $\pi([\rho_k])$ converge vers $[\rho]$, dans l'espace m'_Γ .*

Preuve

Commençons par montrer que quitte à extraire, la suite $\pi([\rho_k])$ converge vers $[\rho]$. Le point fixe r_k de ρ_k reste dans l'espace compact $\partial\mathbb{H}^n$, donc il existe une suite extraite $r_{\varphi(k)}$ de points fixes de $\rho_{\varphi(k)}$ qui converge vers un point $r \in \partial\mathbb{H}^n$, qui est alors un point fixe de ρ . Il existe alors une suite $h_{\varphi(k)}$ d'isométries de $\mathbb{H}^n$ préservant l'orientation, telles que $h_{\varphi(k)}(r_{\varphi(k)}) = r$ et $h_{\varphi(k)} \rightarrow \text{Id}$. Alors $h_{\varphi(k)}^{-1} \rho_{\varphi(k)} h_{\varphi(k)}$ converge vers ρ , et fixe r . Autrement dit, nous pouvons supposer que $\rho_{\varphi(k)}$ fixe r , et quitte à conjuguer on peut encore supposer que $r = 0$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho_{\varphi(k)}(\gamma)$ et $\rho(\gamma)$ sont sous la forme :

$$\rho_{\varphi(k)}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_{\varphi(k)}(\gamma) & 0 & (0) \\ r_{\varphi(k)}(\gamma) & \frac{1}{\lambda_{\varphi(k)}(\gamma)} & Y_{\varphi(k)}(\gamma) \\ Z_{\varphi(k)}(\gamma) & (0) & A_{\varphi(k)}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 & (0) \\ 0 & \frac{1}{\lambda(\gamma)} & (0) \\ (0) & (0) & A(\gamma) \end{pmatrix},$$

et par construction, un représentant (notons-le $\pi\rho_{\varphi(k)}$) de la classe de conjugaison $\pi([\rho_{\varphi(k)}])$ s'écrit :

$$\pi\rho_{\varphi(k)}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_{\varphi(k)}(\gamma) & 0 & (0) \\ 0 & \frac{1}{\lambda_{\varphi(k)}(\gamma)} & (0) \\ (0) & (0) & A_{\varphi(k)}(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Or, $\rho_{\varphi(k)}(\gamma) \rightarrow \rho(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc $\lambda_{\varphi(k)}(\gamma) \rightarrow \lambda(\gamma)$ et $A_{\varphi(k)}(\gamma) \rightarrow A(\gamma)$, de sorte que $\pi\rho_{\varphi(k)} \rightarrow \rho$.

L'argument que nous venons de donner est valable pour toutes les suites extraites de la suite $(\rho_k)_k$. Ainsi, toute suite extraite de la suite $(\pi([\rho_k]))_k$ possède une suite extraite qui converge vers $[\rho]$. Cela entraîne que $\pi([\rho_k])$ converge vers $[\rho]$. $\square$

Nous utilisons maintenant un argument de M. Besvina ([Bes88], proposition 1.2).

Lemme 2.2.7 (comparer à [Par], proposition 2.5) *Soit $[\rho] \in m_\Gamma^0(n)$. Alors le minimum*

$$\min_{x \in \mathbb{H}^n} \max_{s \in S} d(x, \rho(s) \cdot x)$$

est atteint.

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante pour ce nombre. Si x_k sort de tout compact de $\mathbb{H}^n$, alors quitte à extraire, x_n tend vers un point $r \in \partial\mathbb{H}^n$. Dans ce cas, r est un point fixe global de ρ , et vu que $[\rho] \in m_{\Gamma}^O(n)$ il y en a au moins un autre. Donc ρ fixe (globalement) une géodésique de $\mathbb{H}^n$, et agit par translations sur cette géodésique, et alors tout point de cette géodésique réalise ce minimum. Si, par contre, $(x_k)_k$ est bornée, alors quitte à extraire, elle tend vers un point $x_{\infty} \in \mathbb{H}^n$, qui réalise ce minimum. $\square$

Dans toute la suite, pour tout ρ tel que $[\rho] \in m_{\Gamma}^O(n)$, nous posons

$$d(\rho) = \min_{x \in \mathbb{H}^n} \max_{s \in S} d(x, \rho(s) \cdot x),$$

$$\min(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{H}^n \mid \max_{s \in S} d(x, \rho(s) \cdot x) = d(\rho) \right\}$$

et

$$\min_{\varepsilon}(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{H}^n \mid \max_{s \in S} d(x, \rho(s) \cdot x) < d(\rho) + \varepsilon \right\}.$$

Lemme 2.2.8 *Soit $\rho \in m_{\Gamma}^O(n)$. Si ρ fixe au moins un point au bord, alors $\min(\rho)$ est l'enveloppe convexe des points fixés au bord par ρ ; c'est un sous-espace totalement géodésique de $\mathbb{H}^n$. Sinon, $\min(\rho)$ est compact. Dans tous les cas, $\min_{\varepsilon}(\rho)$ est à distance bornée de $\min(\rho)$; autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in \min_{\varepsilon}(\rho)$, on ait $d(x, \min(\rho)) < k$.*

Preuve

Supposons que ρ n'ait pas de points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$. S'il existait $\varepsilon > 0$ tel que $\min_{\varepsilon}(\rho)$ ne soit pas bornée, alors il existerait une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\min_{\varepsilon}(\rho)$, convergeante vers un point $x_{\infty} \in \partial\mathbb{H}^n$, et alors x_{∞} serait un point fixe de ρ . Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\min_{\varepsilon}(\rho)$ est bornée ; de plus $\min(\rho)$ est fermé et borné dans $\mathbb{H}^n$, donc compact ; cela achève la preuve du lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que ρ ait au moins deux points fixes distincts x_1, x_2 dans $\partial\mathbb{H}^n$. Si $d(\rho) \neq 0$, c'est qu'il existe $s \in S$ tel que $\rho(s)$ soit loxodromique d'axe $]x_1, x_2[$, et alors $\min(\rho) = \min(\rho(s)) =]x_1, x_2[$; ρ ne fixe pas d'autres points de $\mathbb{H}^n$, et pour tout $\varepsilon > 0$, $\min_{\varepsilon}(\rho)$ est à distance bornée de $\min(\rho)$, d'après le lemme 1.1.19. Si $d(\rho) = 0$, alors ρ fixe au moins la géodésique $]x_1, x_2[$ point par point. Alors

$$\min(\rho) = \{ x \in \mathbb{H}^n \mid \forall s \in S, \rho(s) \cdot x = x \} = \bigcap_{s \in S} \min(\rho(s))$$

est une intersection de sous-espaces totalement géodésiques de $\mathbb{H}^n$, donc c'est un sous-espace totalement géodésique de $\mathbb{H}^n$; et c'est aussi l'enveloppe convexe des points fixes de ρ dans $\partial\mathbb{H}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors $\min_{\varepsilon}(\rho) = \bigcap_{s \in S} \min_{\varepsilon}(\rho(s))$. D'après le lemme

1.1.19, pour tout $s \in S$, l'ensemble $\min_{\varepsilon}(\rho(s))$ est à distance bornée du sous-espace $\min(\rho)$. On vérifie alors par récurrence sur $\text{Card}(S)$ que $\min_{\varepsilon}(\rho)$ est à distance bornée de $\min(\rho)$. $\square$

Cette fonction $d: m_{\Gamma}^O(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est très naturelle :

Proposition 2.2.9 *La fonction $d' : R_\Gamma(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d'(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x)$ est continue.*

Bien entendu, cette fonction d' est constante sur les classes de conjugaison, donc passe au quotient $m'_\Gamma(n)$; la restriction de cette fonction à l'espace $m_\Gamma^o(n)$ est la fonction d .

Preuve

Supposons que $\rho_k \rightarrow \rho$. Par construction,

$$\{\rho \mid d'(\rho) < a\} = \left\{ \rho \mid \inf_{x \in \partial \mathbb{H}^n} \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x) < a \right\} = \{\rho \mid \exists x \in \mathbb{H}^n, \forall s \in S, d(x, \rho(s)x) < a\}$$

est ouvert (la fonction d' est semi-continue supérieurement). Pour tout ε , nous avons donc $d'(\rho_k) < d'(\rho) + \varepsilon$, à partir d'un certain rang. En particulier d' est continue en tout ρ tel que $d'(\rho) = 0$.

Si ρ possède au moins un point fixe global $x \in \partial \mathbb{H}^n$, alors $d'(\rho)$ est le maximum des distances de translation des $\rho(s)$, $s \in S$, tels que $\rho(s)$ est loxodromique. Soit s_0 l'élément parmi S qui maximise cette distance de translation. Alors, si $\varepsilon > 0$, pour tout k assez grand, $\rho_k(s_0)$ est loxodromique, de distance de translation proche de celle de $\rho(s_0)$, de sorte que $d'(\rho_k) > d'(\rho) - \varepsilon$.

Supposons maintenant que ρ n'ait pas de points fixes dans $\partial \mathbb{H}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Vu que la topologie de $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ coïncide avec la topologie compacte-ouverte et vu que l'ensemble

$$F_{3\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{H}^n \mid \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x) \leq 3\varepsilon \right\}$$

est compact, pour tout k assez grand, pour tout $x \in F$ et tout $s \in S$, on a donc $|d(x, \rho_k(s)x) - d(x, \rho(s)x)| < \varepsilon$. Ainsi, la fonction convexe $x \mapsto \max_{s \in S} d(x, \rho_k(s)x)$ admet un minimum local dans l'ouvert $\min_{3\varepsilon}(\rho)$. Ce minimum est donc global, et ainsi $|d(\rho) - d(\rho_k)| \leq 4\varepsilon$ pour k assez grand. $\square$

Voici maintenant un deuxième pas vers la preuve du théorème 2.2.3.

Proposition 2.2.10 *L'espace $m_\Gamma^o(n)$, muni de la topologie induite, est séparé.*

Preuve

Encore une fois, tous les points de $m'_\Gamma(n)$ ayant un système dénombrable de voisinages, nous pouvons raisonner en termes de suites dans cet espace.

Soient $[\rho_1], [\rho_2] \in m_\Gamma^o(n)$. Supposons que $[\rho_1]$ et $[\rho_2]$ ne puissent pas être séparés par des ouverts. Cela signifie qu'il existe une suite $([\rho_k])_k \in (m'_\Gamma(n))^{\mathbb{N}}$ qui converge à la fois vers $[\rho_1]$ et $[\rho_2]$, autrement dit, il existe $g_k, h_k \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$ telles que $g_k \rho_k g_k^{-1} \rightarrow \rho_1$ et $h_k \rho_k h_k^{-1} \rightarrow \rho_2$. Quitte à conjuguer ρ_k par h_k , nous pouvons supposer que $h_k = 1$.

Supposons d'abord que ρ_2 n'ait pas de points fixes dans $\partial \mathbb{H}^n$. Soit $x \in \min(\rho_1)$; fixons $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $d(g_k \rho_k(\gamma) g_k^{-1} x, x) = d(\rho_k(\gamma) g_k^{-1} x, g_k^{-1} x)$, donc pour k assez grand, $g_k^{-1} x \in \min_\varepsilon(\rho_2)$, puisque $d(\rho_1) = d(\rho_2)$. Vu que $\min_\varepsilon(\rho_2)$ est borné, g_k reste dans un compact (d'après la proposition 1.1.2) donc admet une sous-suite convergente. Ainsi, quitte à extraire, $g_k \rightarrow g_\infty \in SO_{\mathbb{R}}^+(n, 1)$, et ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées. Bien entendu cet argument fonctionne encore en échangeant les rôles de ρ_1 et ρ_2 .

Supposons que ρ_2 possède au moins deux points fixes distincts dans $\partial\mathbb{H}^n$. Fixons $x \in \min(\rho_1)$. Alors, comme précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout k assez grand on a $g_k^{-1}(x) \in \min_\varepsilon(\rho_2)$. Si $d(x, g_k^{-1}x)$ est bornée alors on conclut comme dans le cas précédent. Supposons donc, quitte à l'extraire, que la suite $(g_k^{-1}x)_k$ tende vers un point $r_1 \in \partial\mathbb{H}^n$. Alors r_1 est un point fixe de ρ_2 . Choisissons un autre point fixe $r_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ de ρ_2 . Notons r_k le deuxième bout de l'axe $(r_2, g_k^{-1}x)$. Alors la suite $(r_k)_k$ de $\partial\mathbb{H}^n$ converge vers r_1 . Il existe donc une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $Isom^+(\mathbb{H}^n)$, convergeant vers $id_{\mathbb{H}^n}$ et telle que u_k fixe r_2 , et envoie r_k sur r_1 . Vu que r_k tend vers r_1 , qui est distinct de r_2 , la distance de x à l'axe (r_2, r_k) est bornée : il existe $B > 0$ tel que pour tout k , $d(x, (r_2, r_k)) < B$. Notons p_k le projeté de x sur l'axe (r_2, r_k) , et notons φ_k l'élément hyperbolique d'axe (r_1, r_2) qui envoie $u_k g_k^{-1}x$ sur $u_k p_k$. Alors $u_k^{-1} \varphi_k u_k$ envoie $g_k^{-1}x$ sur p_k , de sorte que $d(x, g_k \cdot (u_k^{-1} \varphi_k u_k)^{-1} x) < B$. D'après la proposition 1.1.2, quitte à l'extraire, la suite $g_k(u_k^{-1} \varphi_k u_k)^{-1}$ converge donc vers un élément $\varphi \in Isom^+(\mathbb{H}^n)$. Nous avons $g_k \rho_k g_k^{-1} \rightarrow \rho_1$ donc $(u_k^{-1} \varphi_k u_k) \rho_k (u_k^{-1} \varphi_k u_k)^{-1} \rightarrow \varphi^{-1} \rho_1 \varphi$. Notons $\rho'_k = u_k \rho_k u_k^{-1}$. Vu que ρ_k converge vers ρ_2 et que u_k tend vers $id_{\mathbb{H}^n}$, nous avons encore $\rho'_k \rightarrow \rho_2$. De même, nous avons encore $\varphi_k \rho'_k \varphi_k^{-1} \rightarrow \varphi^{-1} \rho_1 \varphi$. Quitte à tout conjuguer, nous pouvons supposer que l'axe (r_1, r_2) est confondu avec l'axe $(0, \infty)$. Vu que ρ_2 et φ_k préservent cet axe, pour tout $\gamma \in \Gamma$ nous pouvons écrire les éléments $\rho_2(\gamma)$, $\rho'_k(\gamma)$ et φ_k sous la forme

$$\rho_2(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 & (0) \\ 0 & \frac{1}{\lambda(\gamma)} & (0) \\ (0) & (0) & A(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \rho'_k(\gamma) = \begin{pmatrix} a_k(\gamma) & b_k(\gamma) & X_k(\gamma) \\ c_k(\gamma) & d_k(\gamma) & Y_k(\gamma) \\ Z_k(\gamma) & W_k(\gamma) & A_k(\gamma) \end{pmatrix}$$

et $\varphi_k = \begin{pmatrix} t_k & (0) \\ & \frac{1}{t_k} \\ (0) & I_{n-1} \end{pmatrix}$, où $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$, quitte à conjuguer pour échanger 0 et ∞ dans $\partial\mathbb{H}^n$. Alors

$$\varphi_k \rho'_k(\gamma) \varphi_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k(\gamma) & \frac{1}{t_k^2} b_k(\gamma) & \frac{1}{t_k} X_k(\gamma) \\ t_k^2 c_k(\gamma) & d_k(\gamma) & t_k Y_k(\gamma) \\ t_k Z_k(\gamma) & \frac{1}{t_k} W_k(\gamma) & A_k(\gamma) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\varphi \rho_1(\gamma) \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 & (0) \\ r(\gamma) & \frac{1}{\lambda(\gamma)} & Y(\gamma) \\ Z(\gamma) & (0) & A(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Vu que $[\rho_1] \in m_\Gamma$, la représentation $\varphi \rho_1 \varphi^{-1}$ fixe un autre point de $\partial\mathbb{H}^n$ que 0 ; notons r_3 ce point. Il y a une isométrie $\phi \in Isom^+(\mathbb{H}^n)$ qui fixe 0 et qui envoie r_3 sur ∞ , et alors $\phi \varphi \rho_1 \varphi^{-1} \phi^{-1}$ et ρ_2 sont conjuguées. $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 2.2.3.

Preuve du théorème 2.2.3.

Par définition de π , et d'après la proposition 2.2.10, pour tout $x \in m'_\Gamma(n)$, $\pi(x)$ est l'unique élément de $m_\Gamma^O(n)$ tel que tout voisinage de $\pi(x)$ contienne x . Soit U un ouvert de $m_\Gamma^O(n)$ pour la topologie quotient. Alors $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans $m'_\Gamma(n)$, donc l'ensemble $m_\Gamma^O(n) \cap \pi^{-1}(U)$ est ouvert pour la topologie induite. Mais $m_\Gamma^O(n) \cap \pi^{-1}(U) = U$, puisque

π est l'identité sur $m_\Gamma^o(n)$. Par conséquent pour prouver le théorème 2.2.3, il suffit de montrer que π est continue.

Rappelons que tout point de $m'_\Gamma(n)$ possède un système dénombrable de voisinages : pour montrer que $\pi: m'_\Gamma(n) \rightarrow m_\Gamma^o(n)$ est continue, nous pouvons utiliser le critère séquentiel.

Supposons que $\rho_k, \rho_\infty \in R_\Gamma(n)$ et $\rho_k \rightarrow \rho_\infty$. Nous voulons montrer que $\pi([\rho(k)])$ converge vers $\pi([\rho_\infty])$. Les éléments ρ_k ont soit zéro, soit au moins un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$. Quitte à considérer séparément deux suites extraites, nous allons supposer que cette situation ne dépend pas de k . Si ρ_k n'a pas de points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$, pour tout k , alors $\pi([\rho_k]) = [\rho_k] \rightarrow [\rho_\infty]$, mais tout voisinage de $\pi([\rho_\infty])$ contient $[\rho_\infty]$, donc par définition la suite $\pi([\rho_k])$ converge aussi vers $\pi([\rho_\infty])$. Supposons finalement que ρ_k possède au moins un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 2.2.5, la représentation ρ_∞ possède au moins un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$, et comme précédemment, $[\rho_k]$ converge aussi vers $\pi([\rho_\infty])$. Il découle alors du lemme 2.2.6 que $\pi([\rho_k])$ converge vers $\pi([\rho_\infty])$. $\square$

Le théorème 2.2.3 étant maintenant prouvé, nous équiperons, dans toute la suite, l'ensemble $m_\Gamma^o(n)$ de cette topologie, sans devoir préciser comment elle est définie.

Corollaire 2.2.11 *La fonction $d: m_\Gamma^o(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et propre. En particulier, l'espace $m_\Gamma^o(n)$ est localement compact.*

Preuve

L'application $R_\Gamma(n) \rightarrow m'_\Gamma(n)$ est ouverte, et la fonction continue $d': R_\Gamma(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est constante sur les classes de conjugaison, donc elle définit une fonction continue de $m'_\Gamma(n)$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, d est continue, en utilisant la topologie induite sur $m_\Gamma^o(n)$.

Ensuite, soit $A > 0$; montrons que $d^{-1}([0, A])$ est compact. Fixons $x_0 \in \mathbb{H}^2$, et notons $R_\Gamma^A \subset R_\Gamma(n)$ l'ensemble des représentations ρ qui satisfont

$$\max_{s \in S} d(x_0, \rho(s)x_0) \leq A.$$

D'après la proposition 1.1.2, cette partie R_Γ^A est compacte. Notons ici p l'application $p: R_\Gamma(n) \rightarrow m_\Gamma^o(n)$: elle est continue, et à valeurs dans un espace séparé, donc $p(R_\Gamma^A)$ est compact ; il suffit donc de vérifier que $p(R_\Gamma^A) = d^{-1}([0, A])$.

Soit $[\rho] \in d^{-1}([0, A])$. Alors, d'après le lemme 2.2.7, il existe un point $x \in \mathbb{H}^n$ tel que $\max_{s \in S} d(x, \rho(s)x) = d(\rho)$, et quitte à conjuguer ρ on a $x = x_0$. On a alors $\rho \in R_\Gamma^A$, de sorte que $[\rho] \in p(R_\Gamma^A)$. Soit maintenant $\rho \in R_\Gamma^A$. Alors par définition, de $d(\rho)$ on a $d(\rho) \leq A$. Et l'application d passe au quotient $p: R_\Gamma(n) \rightarrow m_\Gamma^o(n)$, donc $d([\rho]) = d(\rho) \leq A$, et $p(\rho) \in d^{-1}([0, A])$. Ceci montre que $d: m_\Gamma^o(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est propre.

L'espace $\mathbb{R}_+$ est localement compact donc $m_\Gamma^o(n)$ l'est aussi. $\square$

Le groupe $Isom(\mathbb{H}^n)$ des isométries de $\mathbb{H}^n$ qui ne préservent pas nécessairement l'orientation, agit sur $m_\Gamma^o(n)$ par conjugaison. Nous noterons $m_\Gamma^u(n)$ le quotient de $m_\Gamma^o(n)$ par cette action (u pour "non-orienté").

Dans le cas où $n = 2$, ce quotient s'identifie à $X_\Gamma(2)$. En effet, si $\rho \in Hom(\Gamma, PSL(2, \mathbb{R}))$, notons $\chi(\rho): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ son caractère. Alors :

Proposition 2.2.12 *Soient $[\rho_1], [\rho_2] \in m_\Gamma^O(2)$. Alors $\chi(\rho_1) = \chi(\rho_2)$ si et seulement s'il existe une isométrie u de $\mathbb{H}^2$ telle que $\rho_1 = u\rho_2u^{-1}$.*

Preuve

Bien entendu, le caractère est invariant par conjugaison dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$; il n'y a donc qu'une implication à vérifier.

Nous nous inspirons ici de la preuve de la proposition 1.5.2 de M. Culler et P. Shalen [CS83].

D'après la proposition 1.1.16, le fait d'être une représentation élémentaire, dans $m_\Gamma^O(2)$, est caractérisé par le caractère.

Supposons d'abord que ρ_1 et ρ_2 soient non élémentaires, et que ρ_1 ne soit pas "diédrale" (suivant [Pau89] par exemple, nous dirons qu'une représentation est *diédrale* si, sans être élémentaire, elle fixe globalement une paire $\{x, y\} \subset \partial\mathbb{H}^2$). Alors il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\rho_1(\gamma_0)$ est hyperbolique; $\rho_2(\gamma_0)$ l'est donc aussi, et quitte à conjuguer ρ_1 et ρ_2 par un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ on a $\rho_1(\gamma_0) = \rho_2(\gamma_0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, avec $\lambda > 1$. Soit maintenant $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\rho_1(\gamma_1)$ n'a pas de points fixes communs avec $\rho_1(\gamma_0)$, et qui n'est pas un élément elliptique dont le point fixe est sur l'axe de $\rho_1(\gamma_0)$ (c'est toujours possible, lorsque ρ_1 n'est pas diédrale), et notons $\rho_1(\gamma_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\rho_2(\gamma_1) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|a\lambda^n + \frac{d}{\lambda^n}| = |a'\lambda^n + \frac{d'}{\lambda^n}|$, donc, quitte à changer les signes de a', b', c' et d' on a $a = a'$ et $d = d'$. Quitte à conjuguer par des matrices diagonales on peut aussi supposer que $|b| = |b'| = 1$, puisque γ_0 et γ_1 ne partagent pas de points fixes. Quitte à conjuguer par la réflexion d'axe $(0, \infty)$, on peut encore supposer que $b = b' = 1$, et alors $c = c'$.

Considérons $\gamma \in \Gamma$ quelconque, et notons $\rho_1(\gamma) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $\rho_2(\gamma) = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}$. Alors, comme pour γ_1 , quitte à changer les signes de x', y', z' et t' on a $x = x'$ et $t = t'$. Ensuite, l'égalité $\text{Tr}(\rho_1(\gamma_0^n \gamma_1 \gamma)) = \text{Tr}(\rho_2(\gamma_0^n \gamma_1 \gamma))$ s'écrit

$$\left| \lambda^n(ax + bz) + \frac{1}{\lambda^n}(cy + dt) \right| = \left| \lambda^n(ax + bz') + \frac{1}{\lambda^n}(cy' + dt) \right|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $z = z'$ et $y = y'$ ou $z = -z' + \frac{2ax}{b}$ et $y = -y' + \frac{2dt}{c}$. On vérifie que ce dernier cas impose que $\rho_1(\gamma_1)$ est un élément elliptique dont le point fixe est sur l'axe de $\rho_1(\gamma_0)$, et nous avons supposé le contraire. Ceci termine la preuve, dans le cas "générique". Bien entendu ρ_1 et ρ_2 jouent des rôles symétriques, donc ce que nous venons de faire couvre aussi le cas où ρ_2 est non diédrale.

Si ρ_1 et ρ_2 sont diédrales, alors de même que précédemment, on trouve $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ tels que $\rho_1(\gamma_0) = \rho_2(\gamma_0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 1$, et $\rho_1(\gamma_1) = \rho_2(\gamma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho_i(\gamma)$ est alors entièrement déterminé par les traces de $\rho_i(\gamma_0^n \gamma)$ et $\rho_i(\gamma_0^n \gamma_1 \gamma)$.

Reste le cas où ρ_1 et ρ_2 sont élémentaires. Deux situations distinctes peuvent alors se produire. Si ρ_1 possède au moins un point fixe global dans $\partial\mathbb{H}^2$, alors il en possède au moins deux, donc tous les éléments $\rho_1(\gamma)$ sont hyperboliques et ont le même axe; ρ_1 s'identifie alors à une action de Γ sur un axe $\mathbb{R}$ par translations, qui est déterminée par son caractère. Si ρ_1 possède un point fixe global (unique) dans $\mathbb{H}^2$, alors ρ_2 aussi. Les représentations ρ_1 et ρ_2 factorisent alors par des morphismes $\varphi_i: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, tels que $|\cos \varphi_1| = |\cos \varphi_2|$. On

vérifie encore dans ce cas que ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées par une isométrie. $\square$

Les deux quotients $m_\Gamma^u(2)$ et $X_\Gamma(2)$ de l'espace $R_\Gamma(2)$ sont donc identiques. Ainsi, $m_\Gamma^o(2)$ n'est autre qu'une version orientée de l'espace des caractères ; c'est cette orientation que nous essaierons de prolonger au bord pour raffiner, dans le chapitre 5, les compactifications présentées ici.

2.3 Topologie de Gromov équivariante

Rappelons maintenant la définition de la topologie de Gromov équivariante. Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, et $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X, d)$, $\rho': \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X', d')$ sont des actions de Γ par isométries sur ces espaces, on note $(\rho, X, d) \simeq (\rho', X', d')$ s'il existe une isométrie $\varphi: (X, d) \rightarrow (X', d')$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho'(\gamma)\varphi(x) = \varphi(\rho(\gamma)x)$ (une telle isométrie est dite *équivariante*). Considérons un ensemble $\mathcal{E}$ de classes d'isométrie équivariante d'actions par isométries sur des espaces métriques. Si $(\rho, X, d) \in \mathcal{E}$ (pour ne pas surcharger les notations, nous notons encore (ρ, X, d) sa classe d'isométrie équivariante), si $\varepsilon > 0$, si $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une famille finie de X (notons-la K) et si P est une partie finie de Γ , on définit $U_{K, \varepsilon, P}(\rho, X, d)$ comme la partie de $\mathcal{E}$ qui consiste en les (ρ', X', d') tels qu'il existe $\{x'_1, \dots, x'_p\} \in X'$, tels que pour tous $g, h \in P$, et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$, on ait

$$|d(\rho(g) \cdot x_i, \rho(h) \cdot x_j) - d'(\rho'(g) \cdot x'_i, \rho'(h) \cdot x'_j)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on dira aussi que $\{x'_1, \dots, x'_p\}$ réalise une ε -*approximation*, P -équivariante, de la famille K . Les ensembles $U_{K, \varepsilon, P}(\rho, X, d)$ forment une base d'ouverts d'une topologie, qui est appelée *topologie de Gromov équivariante* (voir [Pau88, Gui98]). Nous ne rappelons pas la preuve de ce fait ici, car nous donnerons la preuve d'un résultat plus général un peu plus loin (proposition 5.3.1).

Par définition, toute représentation $\rho \in R_\Gamma(n)$ définit une action de Γ par isométries sur $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ (où $d_{\mathbb{H}^n}$ désigne la distance usuelle, associée à la métrique riemannienne de courbure -1), et la conjugaison par une isométrie de $\mathbb{H}^n$ définit une isométrie équivariante. Tout élément $[\rho] \in m_\Gamma^u(n)$ définit donc une unique classe d'isométrie équivariante $(\rho, \mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$; et nous pouvons ainsi considérer l'ensemble $m_\Gamma^u(n)$ comme un ensemble de classes d'isométrie équivariante d'actions par isométries sur $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ et nous pouvons munir cet ensemble de la topologie de Gromov équivariante. Alors :

Proposition 2.3.1 (F. Paulin [Pau88], proposition 6.2) *Sur l'ensemble $m_\Gamma^u(n)$, la topologie usuelle coïncide avec la topologie de Gromov équivariante.*

Preuve

Nous ne présentons ici que la preuve dans le cas $n = 2$. C'est le cas qui va le plus nous intéresser par la suite. Le cas général se prouve de manière tout à fait similaire. Cette preuve est extraite de [Pau88].

La topologie usuelle est évidemment plus fine que la topologie de Gromov équivariante, vu que les distances mises en jeu sont continues pour la topologie usuelle sur $m_\Gamma^u(n)$.

Réciproquement, fixons $\varepsilon > 0$, et soit $[\rho_k]$ une suite convergente vers $[\rho_\infty]$ pour la topologie de Gromov équivariante. Montrons que quitte à conjuguer ces représentations,

$\rho_k \rightarrow \rho_\infty$ (en effet, puisque $\mathbb{H}^2$ est séparable, tout point de l'espace $m_\Gamma^u(n)$, muni de la topologie de Gromov équivariante, admet un système dénombrable de voisinages ; on peut donc utiliser des suites dans cet espace). Fixons trois points $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{H}^2$, formant un triangle non dégénéré. Alors, pour tout $\varepsilon' > 0$, et pour k suffisamment grand, il existe une famille $\{x_1^k, x_2^k, x_3^k\} \in \mathbb{H}^2$ telle que pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$, pour tous $s_1, s_2 \in S$,

$$|d(\rho_\infty(s_1)x_i, \rho_\infty(s_2)x_j) - d(\rho_k(s_1)x_i^k, \rho_k(s_2)x_j^k)| < \varepsilon.$$

Notons maintenant $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $y_1 = \rho_\infty(s_1)x_1, y_2 = \rho_\infty(s_1)x_2, \dots, y_{3n} = \rho_\infty(s_n)x_3$, et de même définissons $y_1^k, \dots, y_{3n}^k \in \mathbb{H}^2$. D'après la proposition 1.1.8, quitte à conjuguer ρ_k par une isométrie de $\mathbb{H}^2$, nous avons donc $d(y_i, y_i^k) < \varepsilon$, et pour tout $s \in S$, nous avons donc $d(x_i, \rho_k(s) \cdot \rho_\infty^{-1}(s)x_i) < \varepsilon$, pour trois points x_1, x_2, x_3 fixés et non alignés, de sorte que $\rho_k \rightarrow \rho_\infty$ pour la topologie usuelle. $\square$

Les compactifications de M. Bestvina et F. Paulin sont définies en considérant les espaces hyperboliques, ainsi que les arbres réels, au changement d'échelle près, puis en appliquant un critère de compacité dû à Gromov (ou, de façon un peu plus récente et concise, en utilisant les ultralimites), qui implique que l'espace des actions sur les espaces hyperboliques est relativement compact dans ce gros espace. Pour tout $\rho \in m_\Gamma^u(n)$, nous notons

$$\ell(\rho) = \max(1, d(\rho))$$

et nous munissons l'espace $\mathbb{H}^n$ de la distance $\frac{d_{\mathbb{H}^n}}{\ell(\rho)}$. À partir de maintenant, tout élément $[\rho] \in m_\Gamma^u(n)$ sera associé à $(\rho, \mathbb{H}^n, \frac{d_{\mathbb{H}^n}}{\ell(\rho)})$ au lieu de $(\rho, \mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ (c'est une autre réalisation de $m_\Gamma^u(n)$ en tant qu'ensemble de classes d'actions de Γ sur $\mathbb{H}^n$, et la topologie de Gromov équivariante définie ainsi est encore la même, d'après la proposition 2.3.1 et le corollaire 2.2.11).

Le gros inconvénient de la topologie de Gromov équivariante sur $m_\Gamma^u(n)$ est que, si on considère $m_\Gamma^u(n)$ et aussi des actions sur des droites, cet espace ne sera plus séparé. En effet, les actions qui préservent une droite de $\mathbb{H}^n$ seront indiscernables de l'action correspondante sur une droite, en tant qu'action sur un arbre réel. Une solution à ce problème est de modifier légèrement la définition de la topologie de Gromov équivariante, en demandant, pour que deux actions sur des espaces soient proches, que les constantes d'hyperbolicité de ces espaces soient proches. Plus précisément, si $\mathcal{E}$ est un ensemble de classes d'isométrie équivariante d'actions de Γ par isométries sur des espaces *hyperboliques au sens de Gromov*, posons $U'_{K, \varepsilon, P}(\rho, X, d)$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée des (ρ', X', d') tels qu'il existe $\{x'_1, \dots, x'_p\} \in X'$, tel que pour tous $g, h \in P$, et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$, on ait

$$|d(\rho(g) \cdot x_i, \rho(h) \cdot x_j) - d'(\rho'(g) \cdot x'_i, \rho'(h) \cdot x'_j)| < \varepsilon \text{ et } |\delta(X) - \delta(X')| < \varepsilon.$$

Le fait d'imposer $|\delta(X) - \delta(X')| < \varepsilon$ va garantir la séparation de l'espace $\mathcal{E}$ que nous allons considérer par la suite. Nous verrons un peu plus loin (proposition 2.4.1) que cette condition supplémentaire ne change la topologie de Gromov équivariante qu'au voisinage des représentations élémentaires. Cet artifice est comparable au fait d'ajouter 2 aux caractères, comme le font J. Morgan et P. Shalen dans [MS84], pour ne pas avoir à se soucier de ce qui se passe au voisinage de la représentation triviale.

2.4 L'espace $\overline{m_\Gamma^u(n)}$

Commençons cette section par quelques rappels. Si X est un espace topologique, on appelle *compactification de X* tout couple $(\overline{X}, i)$ tel que $\overline{X}$ soit un espace compact, et $i: X \hookrightarrow \overline{X}$ soit un homéomorphisme sur son image, tel que $i(X)$ soit un ouvert dense dans $\overline{X}$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que nous utilisons la définition *française* de la compacité, c'est-à-dire que tous nos compacts sont séparés. En particulier, pour qu'un espace X admette une compactification, il est nécessaire qu'il soit localement compact.

Soit X un espace localement compact et $(\overline{X}, i)$ une compactification de X . Le compact $\overline{X} \setminus X$ est appelé le *bord* de X , et noté $\partial\overline{X}$, ou ∂X s'il n'y a pas de confusion possible entre plusieurs compactifications de X . Les points du bord sont appelés *points idéaux* de la compactification.

Remarquons encore que si X est localement compact et si $(\overline{X}, i)$ est une compactification de X , alors les ouverts contenant $\partial\overline{X}$, dans $\overline{X}$, sont précisément les complémentaires, dans $\overline{X}$, des compacts de X (en effet, si $K \subset X$ est compact alors $i(K)$ est compact, donc $\overline{X} \setminus i(K)$ est ouvert et contient $\partial\overline{X}$, et si U est un ouvert de $\overline{X}$ contenant $\partial\overline{X}$ alors $\overline{X} \setminus U$ est un compact, contenu dans $i(X)$, donc c'est l'image d'un compact, vu que i est un homéomorphisme sur son image).

Enfin, si X est un espace localement compact, si Y est séparé et $f: X \rightarrow Y$ est continue et d'image relativement compacte, alors on définit une compactification de X de la manière suivante (voir [MS84], p. 415). Notons $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de X , on définit $i: X \rightarrow \widehat{X} \times Y$ par $i(x) = (x, f(x))$. Notons $\overline{X}$ l'adhérence de $i(X)$ dans $\widehat{X} \times Y$. Alors $(\overline{X}, i)$ est une compactification de X ; on dit que c'est la *compactification déterminée par f* .

Nous dirons qu'une action d'un groupe Γ par isométries sur un arbre réel T est *minimale* si T ne possède pas de sous-arbre invariant par Γ , en dehors de $\emptyset$ et T . Les classes d'équivalence d'arbres réels munis d'une action minimale de Γ par isométries, à isométrie équivariante près, forment un ensemble, et nous noterons $\mathcal{T}'(\Gamma)$ la partie de cet ensemble, formée des arbres non réduits à un point. On peut prouver ce fait à l'aide d'un argument de cardinalité, ou en remarquant qu'étant donné n'importe quel point $p \in T$, l'arbre réel T et l'action de Γ sont entièrement déterminés par l'ensemble $\{d(p, \gamma \cdot p) | \gamma \in \Gamma\}$ (voir [AM85, MS84]). Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 5.

Encore une fois, nous cherchons à nous intéresser à des espaces *séparés*. Pourtant, on constate facilement que si (ρ, T) admet un bout fixe globalement $x \in \partial_\infty T$ (on dit alors que l'action est *réductible*, voir [Pau89] par exemple), alors (ρ, T, d) est indiscernable, pour la topologie de Gromov équivariante, d'une action sur une droite réelle avec les mêmes distances de translation. Par conséquent, nous allons nous restreindre au sous-ensemble $\mathcal{T}(\Gamma) \subset \mathcal{T}'(\Gamma)$ qui consiste en des actions sur des droites et des actions sans bout fixé globalement, et telles que $\min_{x_0 \in T} \max_{\gamma \in S} d(x_0, \gamma \cdot x_0) = 1$.

Dans la suite, nous munissons $m_\Gamma^u(n) \cup \mathcal{T}(\Gamma)$ de la topologie de Gromov équivariante légèrement modifiée, et on notera par $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ l'adhérence de l'ensemble $m_\Gamma^u(n)$ dans l'espace $m_\Gamma^u(n) \cup \mathcal{T}(\Gamma)$.

La proposition suivante est juste une version plus détaillée de l'argument de F. Paulin, dans [Pau88], lorsqu'il dit que les arbres réels et les structures hyperboliques ne sont pas

indiscernables.

Nous dirons qu'une famille finie K est *grande* si elle contient quatre points A, B_1, B_2, B_3 tels que $d(A, B_i) = 1$, $d(B_1, B_3) = 2$ et $d(B_1, B_2) = d(B_2, B_3)$. Dans un arbre réel, cela signifie que leur enveloppe convexe est un tripode de centre A , et cela entraîne que $d(B_1, B_2) = 2$. Dans $\mathbb{H}^n$, cela signifie que les segments $[B_1, B_3]$ et $[B_2, A]$ se rencontrent perpendiculairement en A .

Proposition 2.4.1 *Soit $(\rho, X, d) \in m_\Gamma^u(n) \cup \mathcal{T}(\Gamma)$ et soit $K \subset X$ une grande famille finie. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $\varepsilon' > 0$ assez petit, pour tout $(\rho', X', d') \in U_{K, \varepsilon', \{1\}}(\rho, X, d)$, on a $|\delta(X') - \delta(X)| < \varepsilon$.*

Ici, par ε' assez petit, on entend : $\varepsilon' < v(\delta(X), \varepsilon)$, où $v: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction (universelle).

Preuve

Soit $\varepsilon' > 0$, et soit $K' = \{A', B'_1, B'_2, B'_3\} \subset X'$ une ε' -approximation de K . Posons alors $B''_1 = B'_1$. On a $|d(B''_1, B'_3) - 2| < \varepsilon'$ donc on peut choisir un $B''_3 \in X'$ tel que $d(B'_3, B''_3) < \varepsilon'$ et $d(B''_1, B''_3) = 2$. Notons $r(t)$ le segment géodésique dans X' tel que $r(0) = B''_1$ et $r(2) = B''_3$, et posons $A'' = r(1)$. Alors la propriété CAT(0) de X' entraîne que $d(A', A'') < \sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon'^2}$. Finalement, nous avons $|d(A', B'_2) - 1| < \varepsilon'$ donc il existe $B''_2 \in X$ tel que $d(B'_2, B''_2) < \varepsilon' + \sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon'^2}$ et $d(A'', B''_2) = 1$. Nous avons aussi les inégalités $|d(B''_1, B''_2) - 1| < 2\varepsilon' + \sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon'^2}$, et $|d(B''_3, B''_2) - d(B''_1, B''_2)| < 5\varepsilon' + 2\sqrt{2\varepsilon' + \varepsilon'^2}$.

Supposons d'abord que $\delta(X) \neq 0$, et posons $x = \frac{\delta_{\mathbb{H}^2}}{\delta(X)}$. La règle du cosinus I, dans $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$, entraîne $\cosh(xd(B_1, B_2)) = \cosh^2(x)$. Pour tout ε' suffisamment petit, on a $d(A'', B''_i) = 1$, $d(B''_1, B''_3) = 2$, $d(B''_1, B''_2) < 2$ et $d(B''_3, B''_2) < 2$, de sorte que X' ne peut pas être un arbre réel. Posons aussi $x' = \frac{\delta_{\mathbb{H}^2}}{\delta(X')}$. Alors la règle du cosinus I dans X' implique que $\cosh(x'd(B''_1, B''_2)) + \cosh(x'd(B''_2, B''_3)) = 2\cosh^2(x')$. Il découle de l'étude de la fonction $F: [0, 2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(b, x) = \cosh^2(x) - \cosh(bx)$, qu'en prenant ε' assez petit nous pouvons forcer x et x' à être arbitrairement proches.

Supposons maintenant que $\delta(X) = 0$. Si $\delta(X') = 0$ alors il n'y a rien à faire. Sinon, nous avons encore $\cosh(x'd(B''_1, B''_2)) + \cosh(x'd(B''_2, B''_3)) = 2\cosh^2(x')$, où, pour ε' assez petit, les distances $d(B''_1, B''_2)$ et $d(B''_2, B''_3)$ peuvent être prises arbitrairement proches de 2, ce qui entraîne que x' peut être forcé d'être arbitrairement grand. $\square$

En particulier, la topologie induite sur $m_\Gamma^u(n)$ par cette version modifiée de la topologie de Gromov équivariante dans $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ coïncide avec la topologie de Gromov équivariante sur $m_\Gamma^u(n)$.

Maintenant, tous les arguments de M. Bestvina et de F. Paulin (voir [Bes88, Pau88, Pau04]) fonctionnent, et nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 (M. Bestvina, F. Paulin) *L'espace $\overline{m_\Gamma^u(n)}$, muni de la fonction $m_\Gamma^u(n) \hookrightarrow \overline{m_\Gamma^u(n)}$, est une compactification naturelle de $m_\Gamma^u(n)$.*

Par "naturelle", on entend que l'action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $m_\Gamma^u(n)$ s'étend continûment en une action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $\overline{m_\Gamma^u(n)}$.

Nous n'allons pas donner une preuve complète de ce résultat ; cela reviendrait à recopier les articles [Pau04, Pau89] et [KL95]. Nous nous contentons de rappeler ici la preuve donnée dans [Pau04], pour donner une idée de la démarche.

Schéma de la preuve. Vu que $m_\Gamma^u(n)$ est un ouvert dense de $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ et que, par construction de la topologie de Gromov équivariante, l'action de $Out(\Gamma)$ sur $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est continue, il suffit de montrer que l'espace $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est compact.

Etant donnée une suite X_k d'éléments de $\overline{m_\Gamma^u(n)}$, on peut lui associer une *ultralimite* (voir Kapovich-Leeb [KL95]), qui est encore un élément de $\overline{m_\Gamma^u(n)}$, et vers laquelle une suite extraite de X_k converge au sens de la topologie équivariante de Gromov. Ainsi, $\overline{m_\Gamma^u(n)}$, de même que $\mathcal{T}(\Gamma)$, est séquentiellement compact.

Ensuite, F. Paulin a montré [Pau89] que l'application $\mathcal{T}(\Gamma) \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{\Gamma} \setminus \{0\}$, qui à un arbre réel T (muni d'une action minimale irréductible de Γ) associe la fonction ℓ_T (qui à $\gamma \in \Gamma$ associe la distance de translation de γ) est un homéomorphisme sur son image. Cette image est donc métrisable et séquentiellement compacte. En particulier, l'espace $\mathcal{T}(\Gamma)$ est séparable. De plus, il est séparé ; ainsi, grâce à la propriété 2.4.1, $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est la réunion des espaces $\mathcal{T}(\Gamma)$ et $m_\Gamma^u(n)$, qui sont séparés tous les deux ; il en découle que $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est séparé, puisque, par définition de la topologie équivariante de Gromov légèrement modifiée, les éléments de $\mathcal{T}(\Gamma)$ et ceux de $m_\Gamma^u(n)$ sont séparés par des ouverts.

Enfin, tous les éléments de $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ étant séparables, d'après la définition de la topologie de Gromov équivariante, l'espace $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est localement à base dénombrable d'ouverts. Et il est lui-même séparable, puisque $\mathcal{T}(\Gamma)$ et $m_\Gamma^u(n)$ le sont. L'espace $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est donc à base dénombrable d'ouverts.

Ainsi, $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est séparé, séquentiellement compact et à base dénombrable d'ouverts, donc il est normal (c'est un exercice classique de topologie générale). Maintenant, $\overline{m_\Gamma^u(n)}$ est normal, et à base dénombrable donc il est métrisable, d'après le théorème d'Urysohn. Enfin, il est métrisable et séquentiellement compact, donc il est compact.

2.5 Autres compactifications

Donnons maintenant un (très) bref aperçu de la compactification de $X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}$ par J. Morgan et P. Shalen. La famille dénombrable $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $f_\gamma : \chi \mapsto \chi(\gamma)$ engendre l'anneau des coordonnées de $X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}$. Notons $P\mathbb{R}^\Gamma$ le quotient de $[0, +\infty[^\Gamma \setminus \{0\}$ par multiplication positive, et soit $\theta : X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})} \rightarrow P\mathbb{R}^\Gamma$ défini par $\theta(x) = [\log(|f_\gamma(x)| + 2)]_{\gamma \in \Gamma}$. J. Morgan et P. Shalen ont prouvé (voir [MS84], proposition I.3.1) que l'image de $X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}$ par θ est relativement compacte, de sorte que θ définit une compactification de $X_{\Gamma, SL(2, \mathbb{R})}$.

On se restreint maintenant au groupe $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$ avec $g \geq 2$, et on note m_g^u l'espace $m_\Gamma^u(2)$. Alors la valeur absolue de la classe d'Euler est définie sur m_g^u , et on note $m_{g, \text{pair}}^u$ le sous-espace de m_g^u constitué des représentations de classe d'Euler paire (rappelons, en effet, qu'une représentation $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ se relève à $SL(2, \mathbb{R})$ si et seulement si sa classe d'Euler est paire). Alors l'application θ factorise par $\theta' : m_{g, \text{pair}}^u \rightarrow P\mathbb{R}^\Gamma$, qui définit une compactification $\overline{m_{g, \text{pair}}^u}^{MS}$ de $m_{g, \text{pair}}^u$. De même, les fonctions $m_{g, \text{pair}}^u \hookrightarrow m_g^u \hookrightarrow \overline{m_g^u}$ définissent une compactification $\overline{m_{g, \text{pair}}^u}$ de cet espace. Les points idéaux des compactifications $\overline{m_{g, \text{pair}}^u}$ et $\overline{m_{g, \text{pair}}^u}^{MS}$ sont des actions de $\pi_1 \Sigma_g$ sur des arbres réels. Ces actions sur des arbres réels sont irréductibles, c'est-à-dire sans bout fixé globalement, ou bien sont

des actions sur une droite. La topologie sur $\overline{\partial m_{g,\text{pair}}^u}^{MS}$ est la *topologie des axes*; c'est la topologie la moins fine qui rend continues les fonctions $\ell_T(\gamma) = \inf_{x \in T} d(x, \gamma x)$. D'après le théorème principal de [Pau89], les espaces $\overline{\partial m_{g,\text{pair}}^u}$ et $\overline{\partial m_{g,\text{pair}}^u}^{MS}$ sont homéomorphes, et ainsi, comme l'explique F. Paulin dans [Pau88], les espaces $\overline{m_{g,\text{pair}}^u}$ et $\overline{m_{g,\text{pair}}^u}^{MS}$ sont homéomorphes (je renvoie à [MS84], [Pau88] et [Pau89] pour plus de détails). Ainsi, l'énoncé du corollaire 0.2.3 concerne simplement l'espace $\overline{m_{g,\text{pair}}}$ et c'est sous cette forme que nous le prouverons dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Twists dans les anses des surfaces et action du groupe modulaire

Une approche très naturelle, lorsqu'on étudie un espace de représentations d'un groupe dénombrable Γ dans un groupe de Lie, est de considérer l'action du groupe des automorphismes de Γ sur cet espace de représentations. Cette action préserve les propriétés essentielles des représentations, comme la fidélité, ou le caractère discret, cocompact, etc., de l'image. Si on étudie le quotient d'un espace de représentations par les conjugaisons globales, alors c'est le groupe des automorphismes *extérieurs* qui agit.

Si Σ est une surface hyperbolique (connexe, orientée, de caractéristique d'Euler strictement négative), le groupe modulaire de Teichmüller $\pi_0 \text{Diff}^+ \Sigma \simeq \text{Out}^+(\pi_1 \Sigma)$, que nous avons déjà brièvement évoqué dans la section 1.2.1, est engendré par les twists de Dehn. Il est généralement très difficile de bien comprendre l'orbite d'une représentation par le groupe modulaire de Teichmüller. Une technique très élémentaire, par contre, consiste à ne regarder que des twists de Dehn dans les anses de la surface. Ce point de vue nous permet d'obtenir des preuves, élémentaires et explicites, de plusieurs résultats ainsi que de lemmes techniques qui concernent les deux chapitres suivants, et que nous avons réuni dans ce chapitre indépendant.

Dans chacune des deux preuves suivantes, c'est en fait une version continue des twists de Dehn que nous allons utiliser.

3.1 Densité des représentations non-injectives

Pour tout groupe Γ , dans le chapitre précédent, nous avons noté $R_\Gamma(n)$ l'espace des représentations $\text{Hom}(\Gamma, \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(n, 1))$. Nous nous intéressons ici au cas où $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$ est un groupe fondamental d'une surface (connexe, compacte, sans bord, orientée) de genre g , et où $n = 2$. Nous noterons donc $R_g = R_{\pi_1 \Sigma_g}(2) = \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Et comme dans la section 1.3, nous noterons $e: R_g \rightarrow \mathbb{Z}$ la classe d'Euler. Rappelons que d'après [Gol88], l'espace R_g possède $4g - 3$ composantes connexes, qui sont les préimages $e^{-1}(k)$, avec $2 - 2g \leq k \leq 2g - 2$. Les représentations fidèles et d'image discrète sont toutes de classe d'Euler $2 - 2g$ ou $2g - 2$.

Au cours du chapitre 4, nous prouverons le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Pour tout k tel que $|k| \leq 2g - 3$, l'ensemble des représentations non-injectives est dense dans $e^{-1}(k)$.*

L'objet de cette section est de prouver un cas particulier de ce théorème, d'une façon très élémentaire.

Posons $E_k = \{\rho \in R_g \mid \rho(a_1) \in \text{Ell}, \rho(b_1) \in \text{Ell}\} \cap e^{-1}(k)$. Alors :

Proposition 3.1.2 *Pour tout k tel que $|k| \leq 2g - 3$, l'ensemble E_k est un ouvert non vide, dans lequel les représentations non-injectives sont denses.*

Pour cela, nous devons d'abord prouver quelques résultats préliminaires.

3.1.1 Relevés

Rappelons que d'après le lemme 1.1.6, tout élément hyperbolique de $PSL(2, \mathbb{R})$ est le commutateur de deux éléments elliptiques.

Remarque 3.1.3 *Si $M \in \text{Hyp} \cup \text{Par}$, ou, de façon plus générale, si $M \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ a un point fixe dans $\mathbb{S}^1$, alors il existe un unique relevé $\widetilde{M}^{\text{can}}$ de M , dans $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$, qui a des points fixes dans $\mathbb{R}$ (nous l'appellerons ici “relevé canonique de M ”). Notons que dans ce cas, $(\widetilde{M}^{\text{can}})^{-1}$ possède aussi des points fixes dans $\mathbb{R}$, de sorte que $\widetilde{M}^{-1}{}^{\text{can}} = (\widetilde{M}^{\text{can}})^{-1}$.*

Remarque 3.1.4 *Si $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$, alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont définis seulement à une puissance de la translation élémentaire $z \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ près ; par contre leur commutateur $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \in PSL(2, \mathbb{R})$, lui, est bien défini et indépendant de ce choix des relevés, puisque z est central dans $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Proposition 3.1.5 *Pour tout $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ et tout $M \in \text{Hyp}$, il existe $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ tels que $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{M}^{\text{can}} \cdot z^\varepsilon$. De plus, si $[A, B] = M$ alors les seules valeurs possibles de $[\widetilde{A}, \widetilde{B}]^{-1} \widetilde{M}^{\text{can}}$ sont z^{-1} , 1 et z .*

Je renvoie à J. Wood [Woo71], théorème 7.2, pour une preuve de ce résultat important.

Voici un autre fait bien connu :

Proposition 3.1.6 *Si $M \in \text{Hyp}$, $A, B \in \text{Ell}$ et $[A, B] = M$ alors $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{M}^{\text{can}}$.*

Preuve

Il s'agit d'un corollaire du résultat principal de l'article [Gol88] de Goldman. En effet, supposons que $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \neq \widetilde{M}^{\text{can}}$. Alors $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{M}^{\text{can}} \cdot z^\delta$, avec $\delta \in \{-1, 1\}$. Maintenant, $M^{-1} \in \text{Hyp}$, donc, d'après la proposition 3.1.5, il existe $C, D \in PSL(2, \mathbb{R})$ tels que $[\widetilde{C}, \widetilde{D}] = \widetilde{M}^{-1}{}^{\text{can}} \cdot z^\delta$. Alors $[\widetilde{A}, \widetilde{B}][\widetilde{C}, \widetilde{D}] = z^{2\delta}$, donc les formules

$$\rho(a_1) = A, \rho(b_1) = B, \rho(a_2) = C, \rho(b_2) = D$$

définissent bien une représentation ρ du groupe fondamental

$$\pi_1 \Sigma_2 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle$$

de la surface Σ_2 de genre deux, de classe d'Euler 2δ . Par conséquent, d'après le corollaire C de [Gol88], cette représentation est fidèle et discrète, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $A \in Ell$. $\square$

3.1.2 Preuve de la proposition 3.1.2

Cette preuve dépend des deux lemmes suivants :

Lemme 3.1.7 *Pour tout $\rho \in E_k$, il existe un chemin $\rho_t \in R_g$ tel que $\rho_0 = \rho$ et tel que la fonction $t \mapsto \text{Tr}(\rho_t(a_1))$ soit non constante au voisinage de 0.*

Lemme 3.1.8 *La partie E_k est non vide.*

Tout élément $A \in Ell$ est conjugué à une unique matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Si $\text{Tr}(\rho_t(a_1))$ est non constant, alors l'angle θ correspondant à $\rho_t(a_1)$ est rationnel pour une partie dense de l'ensemble des valeurs que peut prendre t , et alors la représentation ρ_t vérifie une relation du type $\rho_t(a_1)^n = 1$, donc dans ce cas ρ_t n'est pas injective. Il suit que ces deux lemmes entraînent la proposition 3.1.2.

Nous allons maintenant prouver les deux lemmes 3.1.7 et 3.1.8.

Preuve du lemme 3.1.7.

Soient $A = \rho(a_1)$ et $B = \rho(b_1)$. Vu que nous avons besoin de faire des calculs de trace, nous choisissons en fait $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ (en imposant arbitrairement le signe de relevés de A et B à $SL(2, \mathbb{R})$). Soit $B(t)$ un sous-groupe à un paramètre de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que $B(0) = \text{Id}$, $B(1) = B$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ commute avec B . Posons alors $A_t = AB(t)$. Alors $[A_t, B] = AB(t)BB(-t)A^{-1}B^{-1} = [A, B]$. Par conséquent, les formules

$$\rho_t(a_1) = \pm A_t, \quad \rho_t(a_i) = \rho(a_i), \quad \text{pour } i \geq 2, \quad \rho_t(b_j) = \rho(b_j), \quad \text{pour } j \geq 1$$

définissent bien une représentation $\rho_t \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$. De plus, $\rho_0 = \rho$.

Nous affirmons que $\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{tr}(A_t) \neq 0$ (d'où le lemme). À conjugaison près — ce qui ne change pas les valeurs des traces — nous pouvons écrire A dans une base adaptée, sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Dans la même base, $B(t)$ s'écrit $\begin{pmatrix} c_1(t) & c_2(t) \\ c_3(t) & c_4(t) \end{pmatrix}$, où $c_j(t)$, $1 \leq j \leq 4$, sont des fonctions réelles. Posons $d_i = c'_i(0)$. Le calcul donne

$$\text{tr}(AB(t)) = (c_1(t) + c_4(t)) \cos \theta + (c_2(t) - c_3(t)) \sin \theta$$

et donc

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{tr}(AB(t)) = (d_1 + d_4) \cos \theta + (d_2 - d_3) \sin \theta.$$

Il suffit de montrer que cette dérivée est non nulle. Vu que $B(t) \in SL(2, \mathbb{R})$, son déterminant est constant et donc $d_1 + d_4 = 0$. Puis $A \in Ell$ (qui ne contient pas Id) donc $\sin \theta \neq 0$.

Par conséquent, notre affirmation sera prouvée si nous montrons que $d_2 \neq d_3$. Supposons le contraire, autrement dit, que $d_2 = d_3$. Nous développons $B(t)$ au deuxième ordre :

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 + d_1 t + \alpha t^2 + \mathcal{O}(t^3) & d_2 t + \mathcal{O}(t^2) \\ d_2 t + \mathcal{O}(t^2) & 1 - d_1 t + \beta t^2 + \mathcal{O}(t^3) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\det B(t) = 1 + (\alpha + \beta - d_1^2 - d_2^2)t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1$, ce qui implique que $\alpha + \beta > 0$. Ainsi, pour $t > 0$ assez petit (et donc, aussi, pour tout t), $B(t)$ est hyperbolique, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $B \in Ell$. $\square$

Preuve du lemme 3.1.8.

Si $|k| \leq 2g - 4$, fixons une représentation $\rho' \in R_{g-1}$ de classe d'Euler k . Pour éviter toute confusion, nous allons noter $a'_1, b'_1, \dots, a'_{g-1}, b'_{g-1}$ les générateurs, dans la présentation donnée (rappelons que nous considérons ici des surfaces *marquées*) du groupe $\pi_1 \Sigma_{g-1}$, et nous notons $a_1, a_2, \dots, a_g, b_g$ ceux de $\pi_1 \Sigma_g$. Choisissons un élément quelconque $A \in Ell$. Notons ρ le morphisme défini par les formules suivantes :

$$\rho(a_1) = \rho(b_1) = A, \quad \rho(a_i) = \rho'(a'_{i-1}), \quad \rho(b_i) = \rho'(b'_{i-1}), \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Alors $\rho \in E_k$.

Si $|k| = 2g - 3$, il suffit de considérer le cas $k = 2g - 3$ (en effet, la conjugaison par une isométrie inversant l'orientation de $\mathbb{H}^2$ ne change pas le fait que $\rho(a_1), \rho(b_1) \in Ell$, mais oppose la classe d'Euler). Prenons alors une représentation $\rho' \in R_g$ de classe d'Euler $2g - 2$. Alors $\rho'([a_1, b_1])$ est hyperbolique (voir par exemple [Gol88]). Choisissons des relevés $\widetilde{\rho'(a_i)}, \widetilde{\rho'(b_i)}$ des images des générateurs à $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors

$$[\widetilde{\rho'(a_1)}, \widetilde{\rho'(b_1)}] \cdots [\widetilde{\rho'(a_g)}, \widetilde{\rho'(b_g)}] = z^{2g-2}.$$

D'après la proposition 3.1.5, pour tout $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, il existe $U, V \in PSL(2, \mathbb{R})$ et des relevés $\tilde{U}, \tilde{V}$ tels que $[\tilde{U}, \tilde{V}] = \rho'(\widetilde{[a_1, b_1]})^{\text{can}} \cdot z^\varepsilon$. Ainsi, $[\widetilde{\rho'(a_1)}, \widetilde{\rho'(b_1)}] = \rho'(\widetilde{[a_1, b_1]})^{\text{can}} \cdot z$ (autrement, on pourrait remplacer $\rho'(a_1)$ et $\rho'(b_1)$ pour former une représentation de classe d'Euler $2g - 1$, ce qui est contraire à l'inégalité de Milnor-Wood). D'après le lemme 1.1.6, il existe $A, B \in Ell$ tels que $[A, B] = \rho'(\widetilde{[a_1, b_1]})$, et d'après la proposition 3.1.6, si $\tilde{A}, \tilde{B}$ sont des relevés de A et B , alors $[\tilde{A}, \tilde{B}] = \rho'(\widetilde{[a_1, b_1]})^{\text{can}}$. Les formules

$$\rho(a_1) = A, \quad \rho(b_1) = B \quad \text{et} \quad \rho(a_i) = \rho'(a_i), \quad \rho(b_i) = \rho'(b_i), \quad \text{pour } 2 \leq i \leq g$$

définissent une représentation $\rho \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$, et on a $e(\rho) = e(\rho') - 1 = k$. $\square$

3.2 Les composantes connexes $e^{-1}(k)$ ont exactement un bout

Commençons par rappeler quelques généralités.

Définition 3.2.1 Soit X un espace connexe localement compact. Le supremum du nombre de composantes non bornées (i.e., dont la fermeture n'est pas compacte) de $X \setminus K$, lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X , est appelé le nombre de bouts de X .

Nous allons, ici encore, nous intéresser au cas où $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$ et $n = 2$; nous noterons donc $m_g^o = m_{\pi_1 \Sigma_g}^o(2)$, avec les notations du chapitre 2. On fixe la partie génératrice

$$S = \{a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1}, \dots, b_g, b_g^{-1}\}.$$

Rappelons (corollaire 2.2.11) que la fonction $d: m_g^o \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(\rho) = \min_{x \in \mathbb{H}^2} \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x)$$

est bien définie, continue et propre. En particulier m_g^o est localement compact.

Dans [Hit87], N. Hitchin a montré que pour tout $k \neq 0$ tel que $|k| \leq 2g - 2$, la composante connexe $e^{-1}(k)$ de m_g^o est homéomorphe à un fibré vectoriel complexe de dimension $g - 1 + |k|$ sur le $(2g - 2 - |k|)$ -ème produit symétrique de la surface. Il en découle, en particulier, que la composante connexe $e^{-1}(k)$ a exactement un bout, pour tout $k \neq 0$. Nous allons maintenant donner une preuve très élémentaire de ce fait (notons, au passage, que la preuve de [Hit87] n'est pas du tout élémentaire), tout en le généralisant au cas où $k = 0$.

Proposition 3.2.2 *Pour tout k tel que $|k| \leq 2g - 2$, l'espace $e^{-1}(k)$ a exactement un bout.*

Commençons par fixer quelques notations. Si $S' \subset S$, on note

$$d_{S'}(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} \max_{s \in S'} d(x, \rho(s)x).$$

Si $r > 0$ et $S' \subset S$, on note

$$K_{S'}^r = \{[\rho] \subset m_g^o \mid d_{S'}(\rho) \leq r\},$$

$K^r = K_S^r$, $U_{S'}^r = m_g^o \setminus K_{S'}^r$. Si $s \in S$, $U_{\{s\}}^r$ est donc l'ensemble des classes de conjugaison des représentations ρ telles que $\rho(s)$ soit un élément hyperbolique dont la longueur de translation est strictement supérieure à r , ce qui équivaut à $\text{Tr}(\rho(s)) > 2 \cosh r$. On note $V^r = U_{\{a_1\}}^r \cap U_{\{a_2\}}^r$ et $W^r = U_{\{a_1\}}^r \cup U_{\{a_2\}}^r$. Bien entendu, $V^r \subset W^r \subset m_g^o \setminus K^r$. Enfin, pour tout $A \in PSL(2, \mathbb{R})$, nous voulons choisir un sous-groupe à un paramètre passant par A . Si $A = \text{Id}$, on pose $A_t = \text{Id}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $A \in \text{Par} \cup \text{Hyp}$, on choisit A_t tel que $A_0 = \text{Id}$ et $A_1 = A$. Si $A \in \text{Ell}$, on demande aussi que $A_t \neq \text{Id}$ pour tout $t \in]0, 1]$, et que A_t soit une rotation d'angle positif lorsque t est petit. Notons qu'alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $A_n = A^n$.

Nous allons en fait établir le résultat suivant :

Proposition 3.2.3 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| \leq 2g - 2$, et tout $r > 0$, deux représentations $\rho_1, \rho_2 \in e^{-1}(k) \setminus K^{r+8g\delta_{\mathbb{H}^2}}$ peuvent être jointes par un chemin dans $e^{-1}(k) \setminus K^r$.*

Lemme 3.2.4 *Soient $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ tels que $\text{Tr}(B) > 2$. Alors pour tout $r > 0$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Tr}(A \cdot (BA_x)^n) > 2 \cosh r$.*

Preuve

On a $B \in Hyp$, donc on peut écrire $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 1$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans une base adaptée. Alors $\text{Tr}(A \cdot B^n) = |a\lambda^n + \frac{d}{\lambda^n}|$. Cette trace peut être rendue arbitrairement grande, quitte à prendre $|n|$ assez grand, sauf dans le cas où $a = d = 0$, ou, de façon équivalente, où A est un élément elliptique qui échange les points fixes de B dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Dans ce cas, si x est assez petit, alors $B \cdot A_x$ est encore un élément hyperbolique, avec des points fixes distincts de ceux de B dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ (en effet, quitte à conjuguer ρ par une matrice diagonale, nous avons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{\pi} & -\sin \frac{x}{\pi} \\ \sin \frac{x}{\pi} & \cos \frac{x}{\pi} \end{pmatrix}$ et alors $B \cdot A_x = \begin{pmatrix} \lambda \cos \frac{x}{\pi} & -\lambda \sin \frac{x}{\pi} \\ \frac{1}{\lambda} \sin \frac{x}{\pi} & \frac{1}{\lambda} \cos \frac{x}{\pi} \end{pmatrix}$ ne fixe ni 0 ni ∞ lorsque $\sin \frac{x}{\pi} \neq 0$). $\square$

Lemme 3.2.5 *Soient $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ tels que $[A, B] \neq 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{Tr}(B \cdot (AB_x)^n) > 2$.*

Preuve

Si $B \in Hyp$, on prend $n = 0$. Si $A \in Hyp$, alors on renverse les rôles de A et B , et on applique le lemme 3.2.4. Si A ou B est parabolique, et $A, B \notin Hyp$, alors $\text{Tr}(B \cdot (AB_x)^n) > 2$ pour x ou n assez grand, de même que dans le lemme 3.2.4 (il suffit d'écrire les matrices). Vu que $A, B \neq \text{Id}$, le seul cas restant est celui où $A, B \in Ell$. Pour un certain x petit, la matrice $A \cdot B_x$ est elliptique, d'ordre infini (en effet, AB_x est encore elliptique par continuité de la trace, et le lemme 3.1.8 assure que cette trace est non constante, de sorte que l'élément elliptique AB_x est d'angle irrationnel pour une infinité de x), et ne commute pas avec B . Dans une base adaptée, $B = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$, et $AB_x = U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \cdot U$, où U envoie le point fixe de B sur celui de AB_x . En particulier, on peut demander à U d'être hyperbolique. Vu que θ_2 est irrationnel, $(AB_x)^n$ peut être pris arbitrairement proche de $U^{-1}B^{-1}U$, et $\text{Tr}(BU^{-1}B^{-1}U)$ est la trace du commutateur d'un élément hyperbolique avec un élément elliptique de $PSL(2, \mathbb{R})$, et donc est strictement supérieure à 2, d'après la proposition 1.1.4. Ainsi, $\text{Tr}(B \cdot (AB_x)^n) > 2$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Lemme 3.2.6 *Soit $\rho \in m_g^o \setminus K^{r+8g\delta_{\mathbb{H}^2}}$. Alors il existe $s_1, s_2 \in \{a_1, \dots, b_g\}$ tels que $d_{\{s_1, s_2\}}(\rho) > r$.*

Preuve

Si $\rho \in R_g$, $S' \subset S$ et $\alpha > 0$ notons $F_{S'}^\alpha(\rho) = \{x \in \mathbb{H}^2 \mid \forall s \in S', d(x, \rho(s)x) \leq \alpha\}$.

Soit $\alpha > 0$, et supposons que $F_{\{s_1, s_2\}}^\alpha(\rho) \neq \emptyset$ pour tout couple $\{s_1, s_2\} \subset \{a_1, \dots, b_g\}$. Alors pour tout triplet $\{s_1, s_2, s_3\}$, les ensembles convexes $F_{\{s_1\}}^\alpha(\rho)$, $F_{\{s_2\}}^\alpha(\rho)$, $F_{\{s_3\}}^\alpha(\rho)$ s'intersectent deux à deux, donc, vu que $\mathbb{H}^2$ est $\delta_{\mathbb{H}^2}$ -hyperbolique, il existe un point x à distance au plus $2\delta_{\mathbb{H}^2}$ de chacun des trois. Cela implique que $x \in F_{\{s_1, s_2, s_3\}}^{\alpha+4\delta_{\mathbb{H}^2}}(\rho)$. Plus généralement, si $x > 0$ est tel que pour tout k -uplet S' de $\{a_1, \dots, b_g\}$, $F_{S'}^x \neq \emptyset$, alors, si $\{s_1, \dots, s_{k+1}\} \subset \{a_1, \dots, b_g\}$, les convexes $F_{\{s_1, \dots, s_{k-1}\}}^x(\rho)$, $F_{\{s_1, \dots, s_{k-2}, s_k\}}^x(\rho)$ et $F_{\{s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k+1}\}}^x(\rho)$ s'intersectent deux à deux, et il en découle que $F_{\{s_1, \dots, s_{k+1}\}}^{x+4\delta_{\mathbb{H}^2}}(\rho) \neq \emptyset$.

Ainsi, par récurrence sur $\text{Card}(\{a_1, \dots, b_g\})$ on trouve que $d(\rho) \leq \alpha + 8g\delta_{\mathbb{H}^2}$, dès que $F_{\{s_1, s_2\}}^\alpha(\rho) \neq \emptyset$ pour toute paire $\{s_1, s_2\} \subset \{a_1, \dots, b_g\}$.

L'inégalité $d(\rho) > r + 8g\delta_{\mathbb{H}^2}$ étant stricte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(\rho) > r + 8g\delta_{\mathbb{H}^2} + \varepsilon$, ce qui nécessite qu'il existe une paire $\{s_1, s_2\} \subset \{a_1, \dots, b_g\}$ telle que $F_{\{s_1, s_2\}}^{r+\varepsilon}(\rho) = \emptyset$; ceci implique que $d_{\{s_1, s_2\}}(\rho) \geq r + \varepsilon$ donc $d_{\{s_1, s_2\}}(\rho) > r$. $\square$

Preuve de la proposition 3.2.3.

Etape 1 : Soient $\rho_0, \rho_1 \in V^r \cap e^{-1}(k)$. Alors il existe un chemin $\rho_t \in W^r$, reliant ρ_0 et ρ_1 .

D'après le lemme 10.1 de W. Goldman [Gol88], pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| \leq 2g - 2$, l'ensemble des représentations ρ telles que $[\rho(a_i), \rho(b_i)] \neq \text{Id}$ est dense et connexe par arcs dans $e^{-1}(k)$. Nous pouvons donc perturber ρ_0 et ρ_1 , et trouver un chemin $\rho_t \in e^{-1}(k)$ reliant ρ_0 à ρ_1 et tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $[\rho_t(a_i), \rho_t(b_i)] \neq \text{Id}$.

Soient $t \in [0, 1]$ et $i \in \{1, 2\}$. Notons $A(t) = \rho_t(a_i)$ et $B(t) = \rho_t(b_i)$. Alors d'après le lemme 3.2.5, il existe $n_i(t) \in \mathbb{Z}$ et $x_i(t) \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Tr} \left(B(t) (A(t)B(t)_{x_i(t)})^{n_i(t)} \right) > 2$, et, bien entendu, on a

$$\left[A(t)B(t)_{x_i(t)}, B(t) (A(t)B(t)_{x_i(t)})^{n_i(t)} \right] = [A(t), B(t)].$$

D'après le lemme 3.2.4, il existe donc $n'_i(t) \in \mathbb{Z}$ et $x'_i(t) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\text{Tr} \left(A(t)B(t)_{x_i(t)} \left(B(t)(A(t)B(t)_{x_i(t)})^{n_i(t)} (A(t)B(t)_{x_i(t)})_{x'_i(t)} \right)^{n'_i(t)} \right) > 2 \cosh r, \quad (3.1)$$

et on a encore

$$\left[AB_{x_i(t)} \cdot \left(B(AB_{x_i(t)})^{n_i(t)} \cdot (AB_{x_i(t)})_{x'_i(t)} \right)^{n'_i(t)}, B(AB_{x_i(t)})^{n_i(t)} \right] = [A, B]. \quad (3.2)$$

L'inégalité 3.1 étant stricte, pour tout $\tau \in [0, 1]$ il existe un intervalle $] \tau - \delta, \tau + \delta[$ tel que pour tout $t \in] \tau - \delta, \tau + \delta[\cap [0, 1]$ on ait

$$\text{Tr} \left(A(t)B(t)_{x_i(\tau)} \left(B(t)(A(t)B(t)_{x_i(\tau)})^{n_i(\tau)} (A(t)B(t)_{x_i(\tau)})_{x'_i(\tau)} \right)^{n'_i(\tau)} \right) > 2 \cosh r.$$

Le compact $[0, 1]$ est recouvert par un nombre fini de tels intervalles; nous avons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, et des éléments $n_i^j, n_i^{j'} \in \mathbb{Z}$, $x_i^j, x_i^{j'} \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{0, \dots, k-1\}$ tels que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ on ait

$$\text{Tr} \left(A(t)B(t)_{x_i^j} \left(B(t)(A(t)B(t)_{x_i^j})^{n_i^j} (A(t)B(t)_{x_i^j})_{x_i^{j'}} \right)^{n_i^{j'}} \right) > 2 \cosh r, \quad (3.3)$$

avec $x_i^0 = x_i^{0'} = n_i^0 = n_i^{0'} = 0$. On pose encore $x_i^k = x_i^{k'} = n_i^k = n_i^{k'} = 0$. Fixons $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ et $i \in \{1, 2\}$, on pose

$$f_t^j(a_i) = A_i(t)B_i(t)_{x_i^j} \cdot \left(B_i(t)(A_i(t)B_i(t)_{x_i^j})^{n_i^j} \cdot (A_i(t)B_i(t)_{x_i^j})_{x_i^{j'}} \right)^{n_i^{j'}}$$

et

$$f_t^j(b_i) = B_i(t)(A_i(t)B_i(t)_{x_i^j})^{n_i^j},$$

avec $A_i(t) = \rho_t(a_i)$ et $B_i(t) = \rho_t(b_i)$, et on pose $f_t^j(a_i) = \rho_t(a_i)$, $f_t^j(b_i) = \rho_t(b_i)$ pour $i \leq 3$. L'identité 3.2 assure que nous définissons bien une représentation $f_t^j \in R_g$, pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$ et $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Remarquons que nous avons $f_0^0 = \rho_0$. Notons encore $f_1^k = \rho_1$.

Nous pouvons maintenant construire un chemin joignant ρ_0 à ρ_1 dans W^r , de la façon suivante :

- Le chemin f_t^j permet de passer de $f_{t_j}^j$ à $f_{t_{j+1}}^j$ sans quitter W^r , d'après 3.3.
- Pour passer de $f_{t_{j+1}}^j$ à $f_{t_{j+1}}^{j+1}$, on commence par s'occuper des twists dans la première anse, et ensuite on fait ceux de la deuxième anse. Plus précisément, pour tout j entre 0 et $k-1$, notons $y_i(t) = tx_i^j + (1-t)x_i^{j+1}$, $y_i'(t) = tx_i^{j'} + (1-t)x_i^{j+1'}$, $m_i(t) = tn_i^j + (1-t)n_i^{j+1}$, $m_i'(t) = tn_i^{j'} + (1-t)n_i^{j+1'}$, et $A_i = A_i(t_{j+1})$, $B_i = B_i(t_{j+1})$. Nous posons alors

$$g_t^j(a_1) = A_1 B_{1y_1(t)} \cdot \left(B_1(A_1 B_{1y_1(t)})_{m_1(t)} \cdot (A_1 B_{1y_1(t)})_{y_1'(t)} \right)_{m_1'(t)},$$

$$g_t^j(b_1) = B_1(A_1 B_{1y_1(t)})_{m_1(t)}$$

et $g_t^j(x) = f_{t_{j+1}}^j(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \{a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\}$, et on pose

$$h_t^j(a_2) = A_2 B_{2y_2(t)} \cdot \left(B_2(A_2 B_{2y_2(t)})_{m_2(t)} \cdot (A_2 B_{2y_2(t)})_{y_2'(t)} \right)_{m_2'(t)},$$

$$h_t^j(b_2) = B_2(A_2 B_{2y_2(t)})_{m_2(t)}$$

et $h_t^j(x) = f_{t_{j+1}}^{j+1}(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \{a_1, b_1, a_3, b_3, \dots, a_g, b_g\}$.

On a alors $g_0^j = f_{t_{j+1}}^j$, $g_1^j = h_0^j$ et $h_1^j = f_{t_{j+1}}^{j+1}$, et l'inégalité 3.3 assure encore que ces chemins ne sortent pas de W^r .

Etape 2 : Soit $\rho \in e^{-1}(k) \setminus K^{r+8g\delta_{\mathbb{H}^2}}$. Alors il existe un chemin ρ_t à valeurs dans $e^{-1}(k) \setminus K^r$, tel que $\rho_0 = \rho$ et $\rho_1 \in V^r$.

D'après le lemme 3.2.6, il existe $s_1, s_2 \in \{a_1, \dots, b_g\}$ tels que $F_{\{s_1, s_2\}}^r(\rho) \neq \emptyset$. Si $g \geq 3$, alors il existe $i \in \{1, \dots, g\}$ tel que $\{a_i, b_i\} \cap \{s_1, s_2\} = \emptyset$. On peut alors, comme dans l'étape 1, faire des twists dans l'anse i , sans entrer dans K^r vu qu'on ne touche pas à $\rho(s_1), \rho(s_2)$. Ceci termine la preuve, dans le cas où $g \geq 3$.

Dans le cas $g = 2$ et $\{s_1, s_2\} = \{a_1, b_1\}$ ou $\{s_1, s_2\} = \{a_2, b_2\}$, on raisonne de la même manière. Supposons par exemple que $s_1 = a_1$ et $s_2 = a_2$ (les autres cas se traiteront de la même manière). Si $\rho(a_1)$ ou $\rho(a_2)$ est hyperbolique (disons par exemple $\rho(a_1)$), alors comme dans le lemme 3.2.4, des twists permettent d'obtenir $\text{Tr}(\rho_t(b_1)) > 2 \cosh r$ sans toucher (ou presque pas) à $\rho(a_1)$ et $\rho(a_2)$. Si $\rho(a_1)$ ou $\rho(a_2)$ est parabolique (disons $\rho(a_1)$), alors de même que dans le lemme 3.1.7, $\text{Tr}(\rho(a_1)\rho(b_1)_t)$ est non constant en $t = 0$, et on se ramène ainsi au cas où $\rho(a_1)$ est hyperbolique.

Reste le cas où $\rho(a_1), \rho(a_2) \in \text{Ell}$; ce cas va encore nous demander quelques efforts.

Quitte à conjuguer ρ , nous avons $\rho(a_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, et $\rho(b_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il

existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a+d \\ b-c \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ soient colinéaires. Et $(a+d)^2 + (b-c)^2 = 4 + (a-d)^2 + (b+c)^2 > 4$, vu que $\rho(b_1)$ ne commute pas avec $\rho(a_1)$ (en effet, si $a = d$ et $b = -c$ alors $a^2 + b^2 = 1$ donc $\rho(b_1)$ est sous la forme $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$).

On a alors $\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \right) > 2$, de sorte que, pour un certain $t \in \mathbb{R}$, $\rho(b_1)\rho(a_1)_t \in \text{Hyp}$. Notons aussi que l'axe de cet élément hyperbolique passe par le point fixe de $\rho(a_1)$ (en effet, $\rho(b_1)\rho(a_1)_t$ est sous la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$). La conjugaison de cet élément par la rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne $(\rho(b_1)\rho(a_1)_t)^{-1}$, donc l'élément $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ échange les points fixes de $\rho(b_1)\rho(a_1)_t$, ce qui nécessite que l'axe de $\rho(b_1)\rho(a_1)_t$ passe par le point fixe de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ce fait n'a pas de grande importance pour cette preuve, mais clarifie la figure 3.1.

Notons $M = [\rho(a_1), \rho(b_1)]$. D'après la proposition 1.1.4, on a $M \in \text{Hyp}$. Le nombre $d_{\{a_1, a_2\}}(\rho)$ ne dépend que des angles des rotations $\rho(a_1)$ et $\rho(a_2)$, et de la distance entre leurs centres respectifs $x_1, x_2 \in \mathbb{H}^2$. Quelle que soit la répartition de ces points fixes et de l'axe de M , il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que pour tout $t > 0$, $d(x_1, M_{\varepsilon t} \cdot x_2) > d(x_1, x_2)$. Notons $p \in \partial \mathbb{H}^2$ le point attracteur de M_ε . En conjuguant $\rho(a_2)$ et $\rho(b_2)$ par $M_{\varepsilon t}$ (autrement dit, en faisant un twist le long de la courbe simple séparante représentant $[a_1, b_1]$), nous obtenons donc une représentation ρ_t telle que $d_{\{a_1, a_2\}}(\rho_t)$ soit arbitrairement grand ; le point fixe de $\rho_t(a_2)$ étant envoyé vers p .

Supposons maintenant que $\rho(b_1)$ est hyperbolique, d'axe passant par le point fixe de $\rho(a_1)$. Alors pour tout t tel que $|t|$ est assez petit, l'élément $\rho(a_1)\rho(b_1)_t$ est elliptique ; son point fixe peut être repéré comme le suggère la figure suivante :

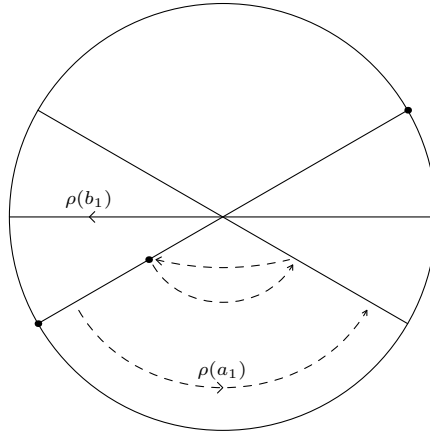


FIG. 3.1 – L'élément $\rho(a_1) \cdot \rho(b_1)_t$.

Il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $\rho(a_1)\rho(b_1)_{t_i}$ soient des éléments paraboliques, dont l'unique point fixe est l'un des points indiqués sur la figure ci-dessus. Au moins un de ces deux points est différent de p ; notons $T = t_i$ un élément correspondant. Alors pour tout

$t \in [0, T]$, p n'est pas un point fixe de $\rho(a_1)\rho(b_1)_t$. Donc si on a envoyé le point fixe de $\rho(a_2)$ suffisamment loin, ceci définit un chemin ρ'_t tel que $d_{\{a_1, a_2\}}(\rho'_t)$ reste grand, et pour t assez grand, $\rho'_t(a_1) \in \text{Par}$, ce qui nous ramène à un cas précédent. $\square$

De la même manière, on montre que tout lacet peut être poussé hors de tout compact. Autrement dit, le groupe fondamental de l'espace $e^{-1}(k)$ est entièrement porté par ce seul bout.

Ce résultat va nous intéresser pour la raison suivante (nous renvoyons à la section 2.4 pour des rappels sur la notion de compactification) :

Corollaire 3.2.7 *Fixons $k \in \{2 - 2g, \dots, 2g - 2\}$ et notons $X = e^{-1}(k)$. Soit $(\overline{X}, i)$ une compactification de X . Alors $\partial\overline{X}$ est connexe.*

Preuve

L'espace X possède un bout, donc n'est pas compact : donc $\partial\overline{X}$ n'est pas vide. Supposons que $\partial\overline{X} = A \cup B$, où A et B sont des ouverts, fermés et disjoints dans $\partial\overline{X}$. Le bord $\partial\overline{X}$ étant fermé, A et B sont des fermés de $\overline{X}$. Vu que $\overline{X}$ est compact (et donc séparé), il est normal. Donc il existe des ouverts U et V de $\overline{X}$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$, et $U \cap V = \emptyset$. L'ouvert $U \cup V$ contient $\partial\overline{X}$ donc c'est le complémentaire d'un compact K de X . Ce compact K est contenu dans K^r , pour r assez grand. Et $X \setminus K^r$ possède une unique composante connexe non bornée, notons-la W . D'après la proposition 3.2.3, $X \setminus W$ est inclus dans $K^{r+8g\delta_{\mathbb{H}^2}}$, donc $K' = X \setminus W$ est compact dans X . Et W est dense dans $W' = \overline{X} \setminus K'$, qui est donc connexe. Notons $U' = W' \cap U$ et $V' = W' \cap V$. Alors U' contient A , V' contient B , U' et V' sont ouverts, $U' \cap V' = \emptyset$, et $W' = U' \cup V'$ est connexe. Cela implique que $U' = \emptyset$ ou $V' = \emptyset$, donc $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. $\square$

Dans la dernière section, on n'utilise pas de twists de Dehn explicites, mais on se sert, comme ici, de l'action du groupe modulaire pour rendre des applications “de plus en plus injectives”, en faisant quitter tout compact à leur noyau.

3.3 Applications presque injectives

Dans le chapitre 5, nous établirons que dans la compactification $\overline{m}_g^o$, la composante de Teichmüller de m_g^o n'est pas isolée, et nous montrerons que cette compactification est connexe, pour g assez grand (théorème 5.8.1). Ces propriétés sont liées au fait que les groupes de surfaces sont des “groupes limites” (voir [Sel01, Gui04, CG05]).

Commençons par quelques notations. Fixons une présentation standard du groupe fondamental

$$\pi_1\Sigma_g = \langle a_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

de la surface Σ_g . La partie $S = \{a_1, \dots, b_g\}$ engendre $\pi_1\Sigma_g$, et nous noterons $\mathbb{F}$ le groupe libre sur cette partie génératrice ; et $\pi : \mathbb{F} \rightarrow \pi_1\Sigma_g$ la surjection canonique. Notons ici $B_n \subset \pi_1\Sigma_g$ la boule de centre 1 et de rayon n pour la métrique associée à la partie génératrice S . Enfin, on note $\mathbb{F}_k$ un groupe libre à k générateurs.

On dit qu'un groupe Γ est *résiduellement libre* si pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que $\varphi(\gamma) \neq 1$. On dit que Γ est *multi-résiduellement libre* si

pour toute partie finie $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \Gamma \setminus \{1\}$, il existe un morphisme $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(\gamma_i) \neq 1$. Au cours du chapitre 5, nous ferons appel au résultat suivant :

Théorème 3.3.1 (G. Baumslag [Bau62]) *Pour tout $g \geq 2$, le groupe $\pi_1 \Sigma_g$ est multi-résiduellement libre. De façon équivalente, pour tout $n \geq 0$, il existe un morphisme $\varphi_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que $\ker(\varphi_n) \cap B_n = \{1\}$.*

Heuristiquement, les morphismes φ_n sont “de plus en plus injectifs”. Dans le langage de [Sel01, CG05], $\pi_1 \Sigma_g$ est un “groupe limite” du groupe $\mathbb{F}_2$.

Dans le chapitre 5, nous aurons besoin de rendre “de plus en plus injectifs” des morphismes donnés, notés p_g et e_g , en les composant par des automorphismes de $\pi_1 \Sigma_g$. Pour tout $g \geq 3$, on note $e_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \pi_1 \Sigma_{g-1}$ le morphisme d’écrasement de la dernière anse. Plus précisément, étant donnée la présentation standard de chacun des deux groupes

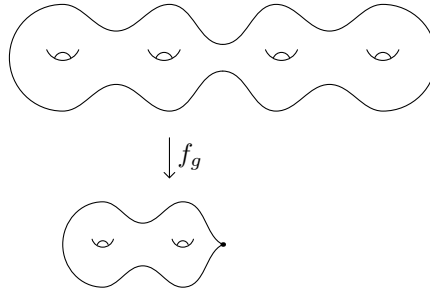
$$\pi_1 \Sigma_g = \left\langle a_1, \dots, b_g \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right. \right\rangle$$

et

$$\pi_1 \Sigma_{g-1} = \left\langle a_1, \dots, b_{g-1} \left| \prod_{i=1}^{g-1} [a_i, b_i] = 1 \right. \right\rangle,$$

l’application e_g est définie par $e_g(\gamma) = \gamma$ pour $\gamma = a_1, b_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}$ et $e_g(\gamma) = 1$ pour $\gamma = a_g, b_g$. Soit maintenant $g \geq 2$; nous allons définir un groupe fuchsien G_g et un morphisme $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$, qui nous serviront à plusieurs reprises dans la suite. Deux situations sont à considérer, suivant la parité de g .

Si g est pair, $g = 2g'$, on fixe un groupe fuchsien $G_{g'}$ de signature $(g'; 2)$. C’est le groupe fondamental de l’orbifold hyperbolique de genre g' , et à une singularité conique d’angle π ($= \frac{2\pi}{2}$). Celui-ci admet un revêtement f_g de degré 2, ramifié au-dessus de la singularité conique,



et on pose $p_g = f_{g*}: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$. Rappelons que le groupe fuchsien G_g , de signature $(g'; 2)$, admet la présentation suivante :

$$G_g = \left\langle \alpha_1, \dots, \beta_{g'} \left| ([\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = 1 \right. \right\rangle.$$

Nous définissons alors l’application $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ en posant $p_g(a_i) = p_g(a_{g'+i}) = \alpha_i$ et $p_g(b_i) = p_g(b_{g'+i}) = \beta_i$ pour tout i entre 1 et g' .

Dans le cas où g est impair, $g = 2g' + 1$, nous fixons un groupe fuchsien G_g de signature $(g'; 2, 2, 2)$. Rappelons que le groupe fuchsien G_g admet la présentation suivante :

$$G_g = \left\langle q_1, q_2, \alpha_1, \dots, \beta_{g'} \mid q_1^2 = q_2^2 = 1, (q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = 1 \right\rangle.$$

Nous noterons $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ l'application définie par $p_g(a_1) = q_1^{-1}$, $p_g(b_1) = q_2^{-1}$, puis $p_g(a_i) = (q_1 q_2)^{-1} \alpha_{i-1} (q_1 q_2)$, $p_g(b_i) = (q_1 q_2)^{-1} \beta_{i-1} (q_1 q_2)$, pour tout i entre 2 et $g' + 1$, et $p_g(a_i) = \alpha_{i-g'-1}$ et $p_g(b_{i-g'-1}) = \beta_i$ lorsque $g' + 2 \leq i \leq g$. Il est un peu plus délicat, dans ce cas où g est impair, de représenter l'application p_g par un revêtement.

Dans les deux cas de parité de g , nous établirons dans le chapitre 4 que l'application p_g que nous définissons ici est une représentation discrète de $\pi_1 \Sigma_g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$, de classe d'Euler $2g - 3$; c'est ce qui les rend intéressantes dans ce travail. Le reste de ce chapitre est consacré à la preuve des résultats suivants :

Lemme 3.3.2 *Soit $g \geq 4$. Alors pour tout $n \geq 0$, il existe un élément $\gamma_n \in \text{Aut}(\pi_1 \Sigma_g)$ tel que le noyau de l'application $p_g \circ \gamma_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ contienne pas d'éléments de longueur inférieure à n .*

En d'autres termes, on peut "mêler" les courbes représentant a_i et b_i par des twists de Dehn, de sorte que l'application p_g ne tue aucun mot de longueur donnée, autrement dit, on peut envoyer son noyau arbitrairement loin, donc rendre cette application "arbitrairement injective".

De même :

Lemme 3.3.3 *Soit $g \geq 3$. Alors pour tout $n \geq 0$, il existe un élément $\gamma_n \in \text{Aut}(\pi_1 \Sigma_g)$ tel que le noyau de l'application $e_g \circ \gamma_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ contienne pas d'éléments de longueur inférieure à n .*

L'argument que je vais présenter ici est dû à Z. Sela, et m'a été indiqué par V. Guirardel.

Proposition 3.3.4 *Soit Σ une surface, éventuellement avec bord, de caractéristique d'Euler inférieure ou égale à -1 . Soit $\varphi: \pi_1 \Sigma \rightarrow \mathbb{F}$ un morphisme d'image non abélienne dans un groupe libre $\mathbb{F}$, et dont les restrictions aux groupes fondamentaux des composantes de bord sont injectifs. Alors pour toute partie finie $P \subset \pi_1 \Sigma \setminus \{1\}$, il existe un difféomorphisme γ_P de Σ , préservant point par point les composantes de bord, tel que $\text{Ker}(\varphi \circ \gamma_{P*}) \cap P = \emptyset$.*

Corollaire 3.3.5 *Soit $g \geq 2$, et soit $\varphi: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{F}$ un morphisme d'image non abélienne. Alors pour tout n , il existe $\gamma_n \in \text{Aut}(\pi_1 \Sigma_g)$ tel que $\text{Ker}(\varphi \circ \gamma_n) \cap B_n = \{1\}$.*

Les lemmes 3.3.2 et 3.3.3 en découlent :

Preuve du lemme 3.3.2.

L'application $\varphi_g: G_g \rightarrow \mathbb{F}_2$ définie par $\varphi_g(a_1) = x$, $\varphi_g(a_2) = y$ et $\varphi_g(u) = 1$ pour tous les autres générateurs u de G_g , avec $\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$, est un morphisme d'image non abélienne, et $\varphi_g \circ p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{F}_2$ est donc un morphisme vérifiant les hypothèses du corollaire 3.3.5. On peut donc le conjuguer par des automorphismes de $\pi_1 \Sigma_g$ pour le rendre "arbitrairement injectif". $\square$

Preuve du lemme 3.3.3 Si $g \geq 3$, l'application $\varphi_g: \pi_1 \Sigma_{g-1} \rightarrow \mathbb{F}_2$ définie par $\varphi_g(a_1) = x$, $\varphi_g(a_2) = y$ et $\varphi_g(u) = 1$ pour tous les autres générateurs $\pi_1 \Sigma_{g-1}$ est encore un morphisme d'image non abélienne. $\square$

La preuve de la proposition repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.6 (Z. Sela [Sel01], lemme 5.13) *Soit Σ une surface, éventuellement avec bord, de caractéristique d'Euler inférieure ou égale à -1 . Soit $\varphi: \pi_1 \Sigma \rightarrow \mathbb{F}$ un morphisme d'image non abélienne dans un groupe libre $\mathbb{F}$, et dont les restrictions aux groupes fondamentaux des composantes de bord sont injectifs. Alors il existe une famille de courbes fermées simples disjointes $c_1, \dots, c_p$ de Σ , qui découpent Σ en pantalons, et telles que la restriction de φ au groupe fondamental de chaque pantalon soit injective.*

Lemme 3.3.7 (G. Baumslag [Bau62], proposition 1) *Soit $\mathbb{F}$ un groupe libre et soient $a_1, \dots, a_n, c \in \mathbb{F}$ tels que c ne commute avec aucun des a_i . Alors pour tous $k_0, \dots, k_n$ assez grands, l'élément $c^{k_0} a_1 c^{k_1} a_2 \dots c^{k_{n-1}} a_n c^{k_n}$ est non trivial dans $\mathbb{F}$.*

Preuve de la proposition 3.3.4.

Notons $\chi(\Sigma)$ et $g(\Sigma)$ la caractéristique et le genre de Σ . Nous allons procéder par récurrence sur $(-\chi(\Sigma), g(\Sigma))$, en suivant l'ordre lexicographique. Le nombre $g(\Sigma)$ étant compris entre 0 et $1 - \frac{\chi(\Sigma)}{2}$, l'élément $(-\chi(\Sigma), g(\Sigma))$ parcourt bien un ensemble en bijection préservant l'ordre avec $\mathbb{N}$.

Si $\chi(\Sigma) = -1$, alors φ est injective (voir par exemple [CG05], proposition 3.1). Supposons donc la proposition vraie pour tout Σ' tel que $(-\chi(\Sigma'), g(\Sigma')) < (-\chi(\Sigma), g(\Sigma))$ (pour l'ordre lexicographique) et prenons des courbes $c_1, \dots, c_p$ comme dans le lemme de Z. Sela.

Supposons d'abord que c_1 soit une courbe séparante : notons $\Sigma = \Sigma_1 \cup_{c_1} \Sigma_2$. Plaçons le point base au voisinage de c_1 , du côté de Σ_1 . On a $\pi_1 \Sigma = \pi_1 \Sigma_1 *_{\alpha} \pi_1 \Sigma_2$, où α est représentée par la courbe c_1 , déformée de sorte qu'elle passe par le point base. Fixons une partie finie $P \subset \pi_1 \Sigma$. Pour tout $m \in P$, choisissons une écriture $m = a_1 \alpha^{k_1} b_1 \alpha^{l_1} \dots a_n \alpha^{k_n} b_n \alpha^{l_n}$, avec $a_i \in \pi_1 \Sigma_1$ et $b_i \in \pi_1 \Sigma_2$, et tels que a_i, b_i ne commutent pas avec α (sauf peut-être a_1 ou b_n , auquel cas on les omet de l'écriture de m). Notons P_1 la partie de $\pi_1 \Sigma_1$ définie par les éléments $\alpha a_i \alpha^{-1} a_i^{-1}$ et notons P_2 la partie de $\pi_1 \Sigma_2$ définie par les éléments $\alpha b_i \alpha^{-1} b_i^{-1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un difféomorphisme γ_1 de Σ_1 fixant le bord de Σ_1 (ainsi que le voisinage de la courbe c_1), et un difféomorphisme γ_2 de Σ_2 fixant le bord de Σ_2 tels que pour tout $u \in P_1$ on ait $\varphi \circ \gamma_{1*}(u) \neq 1$ et que pour tout $u \in P_2$ on ait $\varphi \circ \gamma_{2*}(u) \neq 1$. Considérons alors un difféomorphisme $\gamma_k: \Sigma \rightarrow \Sigma$ défini par γ_1 sur Σ_1 , γ_2 sur Σ_2 et par k twists de Dehn le long de c_1 . Alors $\gamma_{k*}: \pi_1 \Sigma \rightarrow \pi_1 \Sigma$ est défini de la façon suivante : si $a_1, \dots, a_n \in \pi_1 \Sigma_1$ et $b_1, \dots, b_n \in \pi_1 \Sigma_2$, on a

$$\gamma_{k*} \left(a_1 \alpha^{k_1} b_1 \alpha^{l_1} \dots a_n \alpha^{k_n} b_n \alpha^{l_n} \right) = \gamma_{1*}(a_1) \alpha^{k_1+k} \gamma_{2*}(b_1) \alpha^{l_1-k} \dots \gamma_{1*}(a_n) \alpha^{k_n+k} \gamma_{2*}(b_n) \alpha^{l_n-k}.$$

Soit $m \in P$, et considérons l'écriture $m = a_1 \alpha^{k_1} b_1 \alpha^{l_1} \dots a_n \alpha^{k_n} b_n \alpha^{l_n}$ choisie plus haut. On a donc

$$\varphi \circ \gamma_{k*}(m) = \varphi \circ \gamma_{1*}(a_1) \varphi(\alpha)^{k_1+k} \varphi \circ \gamma_{2*}(b_1) \varphi(\alpha)^{l_1-k} \dots \varphi \circ \gamma_{1*}(a_n) \varphi(\alpha)^{k_n+k} \varphi \circ \gamma_{2*}(b_n) \varphi(\alpha)^{l_n-k}.$$

Vu que $\alpha a_i \alpha^{-1} a_i^{-1} \in P_1$, on a $\varphi \circ \gamma_{1*}(\alpha a_i \alpha^{-1} a_i^{-1}) \neq 1$, or $\gamma_{1*}(\alpha) = \alpha$: donc $\varphi \circ \gamma_{1*}(a_i)$ ne commute pas avec $\varphi(\alpha_1)$. Toutes les hypothèses du lemme de G. Baumslag sont donc satisfaites, et donc pour tout k assez grand, $\varphi \circ \gamma_{k*}$ envoie tout élément non trivial de P sur un élément non trivial de $\mathbb{F}$.

Supposons enfin que c_1 soit une courbe non séparante. Alors Σ , cette fois-ci, est obtenue en recollant deux composantes de bord d'une surface Σ_1 , et on a $-\chi(\Sigma) = -\chi(\Sigma_1)$ mais $g(\Sigma_1) < g(\Sigma)$. On a $\pi_1 \Sigma = \langle \pi_1 \Sigma_1, t | t^{-1} \alpha t = \beta \rangle$, où $\alpha, \beta \in \pi_1 \Sigma_1$ sont représentées par les composantes de bord de Σ_1 concernées par le recollement, et où t est représenté, dans Σ , par une courbe simple intersectant la courbe c_1 en un seul point. Les éléments $m \in \pi_1 \Sigma$ possèdent une écriture (non unique) $m = t^{k_0} a_1 t^{k_1} \dots a_n t^{k_n}$ avec $a_i \in \pi_1 \Sigma_1$; si γ est un difféomorphisme de Σ_1 fixant son bord (ainsi qu'un voisinage de c_1 contenant le point base) alors $\gamma_*(m) = t^{k_0} \gamma_*(a_1) t^{k_1} \dots \gamma_*(a_n) t^{k_n}$, et l'image de m par k twists de Dehn le long de c_1 vaut $(\alpha^k t)^{k_0} a_1 (\alpha^k t)^{k_1} \dots a_n (\alpha^k t)^{k_n}$. Le même argument que dans le cas précédent se transpose donc ici, ce qui termine la récurrence. $\square$

Chapitre 4

Représentations non-injectives et représentations discrètes

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la structure de deux sous-ensembles des composantes exotiques de R_g : l'ensemble des représentations injectives d'une part, et d'autre part l'ensemble des représentations d'image discrète.

Nous avons prouvé au chapitre 3 que l'ensemble des représentations non-injectives est dense dans un ouvert non vide de chaque composante exotique de R_g , et nous allons prouver ici que ces représentations non-injectives sont denses dans les composantes exotiques de R_g tout entières. La preuve utilise le théorème 0.1.5, que nous allons aussi prouver dans ce chapitre. Nous montrerons aussi que les représentations discrètes forment une partie fermée et d'intérieur vide dans chaque composante exotique de classe d'Euler non nulle.

Nous allons aussi montrer que les seuls sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$ à pouvoir être “déformés” sont les groupes fuchsien.

Ce chapitre consiste en grande partie en la traduction de [FW07].

4.1 Représentations d'image discrète

4.1.1 Présentation de relevés de groupes fuchsien dans $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$

Commençons par prouver le résultat technique suivant, que nous utiliserons beaucoup dans la suite :

Lemme 4.1.1 *Soit Γ un groupe fuchsien de signature $(g; k_1, \dots, k_l, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{r-l})$. Alors le*

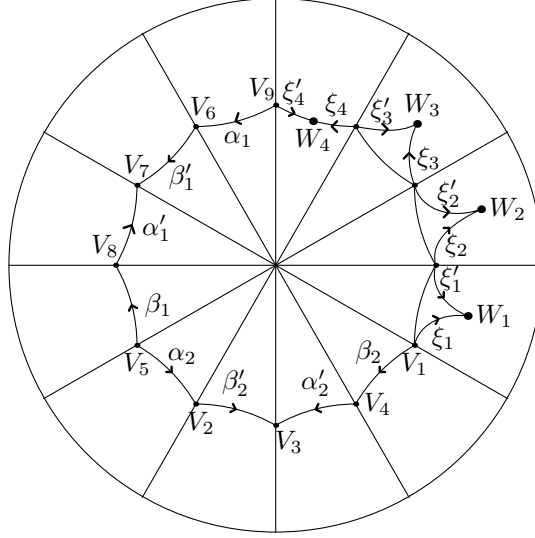
relevé $\tilde{\Gamma}$ de Γ dans $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ admet la présentation suivante :

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g, z \left| \begin{array}{l} zq_1z^{-1}q_1^{-1}, \dots, zb_gz^{-1}b_g^{-1}, \\ q_1^{k_1}z, \dots, q_l^{k_l}z, q_1 \cdots q_r[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]z^{2g-2+r} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Preuve

Considérons un domaine fondamental de Poincaré de Γ dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Répétons ici le rappel, fait au chapitre 1, concernant les groupes fuchsien. En utilisant

les mêmes notations que S. Katok ([Kat92]), nous avons l'image suivante, dans le cas où $g = 2$, $r = 4$, $k_i > 2$ avec $i = 1, 2, 3$ et $k_4 = 2$:



Nous allons utiliser l'identification de $PSL(2, \mathbb{R})$ avec le fibré tangent unitaire $S\mathbb{H}^2$ évoquée au chapitre 1 (proposition 1.1.1). Fixons, une fois pour toutes, le modèle du disque de Poincaré pour $\mathbb{H}^2$. Alors le fibré tangent unitaire $S\mathbb{H}^2$ est trivialisé, dans le plan où l'on dessine ce disque, et dans l'extension centrale

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow 1,$$

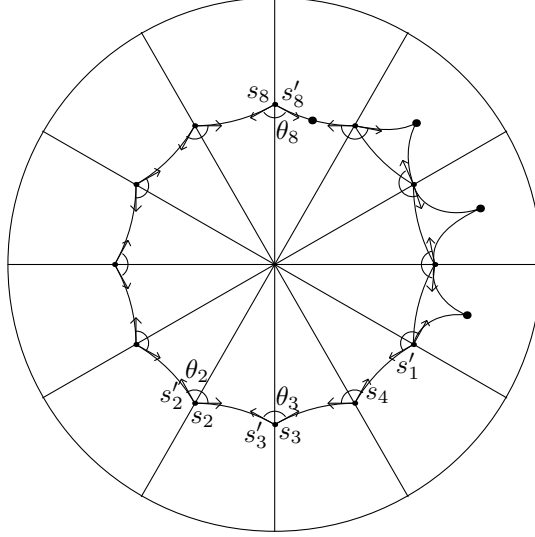
le générateur z de $\mathbb{Z}$ (que nous notons encore $z \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$) consiste à donner un tour complet aux vecteurs sur $\mathbb{H}^2$. Cela correspond à considérer un indice de rotation, et dans ce contexte le fait de relever des éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$ à $SL(2, \mathbb{R})$ revient à considérer cet indice modulo 2. Partons de la présentation "canonique" de $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\Gamma = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g \mid q_1^{k_1}, \dots, q_l^{k_l}, q_1 q_2 \dots q_r [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \right\rangle.$$

Pour savoir comment cette présentation se relève dans $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$, il nous faut savoir comment les relations se relèvent. Dans $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$, prenons comme relevés de q_i (que nous noterons encore q_i), pour $1 \leq i \leq l$, la rotation de centre W_i et d'angle positif $\frac{2\pi}{k_i}$.

Alors $q_i^{k_i}$ est un tour (positif) autour de W_i , autrement dit la relation $q_i^{k_i}$ se relève en $q_i^{k_i} \cdot z^{-1}$ dans $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$. Les autres générateurs de Γ , $q_{k+1}, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g$, sont des éléments paraboliques ou hyperboliques de $PSL(2, \mathbb{R})$. Ils ont donc un relevé canonique à $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ (au sens de la remarque 3.1.3), et c'est celui que nous allons choisir. L'élément $z \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ est central, d'où les relations $z q_1 z^{-1} q_1^{-1}, \dots, z b_g z^{-1} b_g^{-1}$. Il nous reste à déterminer comment se relève la longue relation $q_1 \dots q_r [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ dans $\widetilde{\Gamma}$ pour connaître une présentation de $\widetilde{\Gamma}$. Notons donc $q_1 \dots q_r [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = z^n$, et cherchons n .

Nous pouvons supposer que $k = r$, c'est-à-dire que Γ est cocompact, car dans le cas contraire il suffit de choisir un autre relevé pour q^r . Le groupe Γ admet donc un domaine fondamental qui a l'allure suivante :



Considérons les deux vecteurs s_i et s'_i basés en chaque point V_i ou W_i . Notre élément a_i envoie $s_{4g-4i+3}$ sur $s'_{4g-4i+2}$ et $s'_{4g-4i+4}$ sur $s_{4g-4i+5}$. De même b_i envoie $s'_{4g-4i+3}$ sur $s_{4g-4i+4}$ et $s_{4g-4i+2}$ sur $s'_{4g-4i+1}$. Notons $\Theta_i : S\mathbb{H}^2 \rightarrow S\mathbb{H}^2$ l'application définie par $\Theta_i(p, v) = (p, v + \theta_i)$. Alors $\Theta_i(s_i) = s'_i$, et Θ_i commute avec tous les éléments de $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$. De plus, $\Theta_{4g+r} \circ \dots \circ \Theta_1 = z$ (ou, de façon équivalente, $\sum_{i=1}^{4g+r} \theta_i = 2\pi$),

d'après la formule de Gauss-Bonnet (voir [Kat92], théorème 4.3.2). On a $b_g^{-1}(s'_1) = s_2$, $\Theta_2(s_2) = s'_2$, $a_g^{-1}(s'_2) = s_3$, $\Theta_3(s_3) = s'_3$, $\dots$, $q_1(s'_{4g+r}) = s_1$, $\Theta_1(s_1) = s'_1$. Trouver le relevé de $z \cdot q_1 \dots q_r[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ (c'est-à-dire, déterminer z^{n+1}) revient donc à compter le nombre de tours effectués par le vecteur s_1 au cours de ce périple. Complétons les vecteurs s_i, s'_i en un champ de vecteurs sur un voisinage du bord de notre domaine fondamental. Ce champ de vecteurs s'étend en un champ de vecteurs sur la surface, dont les deux singularités sont en O (un point central du domaine) et le point W (provenant des V_i et W_i). L'indice de ce champ de vecteurs en O est $-(n+1)$; c'est le nombre de tours réalisés par s_1 (comptés négativement, puisque les vecteurs pointent vers O). Et vu que

$\sum_{i=1}^{4g+r} \theta_i = 2\pi$, l'indice en W est 1. D'après le théorème de l'indice de Poincaré-Hopf, on a donc $-(n+1) + 1 = \chi(\Sigma_g^r) = 2g - 2 + r$, c'est-à-dire $n = 2g - 2 + r$. Cela donne la présentation suivante pour $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g, z \left| \begin{array}{l} zq_1z^{-1}q_1^{-1}, \dots, zb_gz^{-1}b_g^{-1}, \\ q_1^{k_1}z^{-1}, \dots, q_l^{k_l}z^{-1}, q_1 \dots q_r[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]z^{2-2g-r} \end{array} \right. \right\rangle,$$

qui est évidemment équivalente à celle de notre énoncé, en remplaçant z^{-1} par z . $\square$

Remarque 4.1.2 *Nous aurions pu compter directement cet indice. Supposons d'abord que $g = 0$. Alors, le long du bord du domaine, notre champ de vecteurs pointe vers O exactement une fois pour chaque rotation, et le long de ce bord on fait un tour autour de O , d'où $-(n+1) = r-1$. Dans le cas général ($g \geq 1$), il suffit de remarquer que chacun des commutateurs $[a_i, b_i]$ donne deux tours positifs à notre vecteur.*

Remarque 4.1.3 *Dans le cas particulier où $k = r = 0$, nous retrouvons bien que la classe d'Euler d'un élément de l'espace de Teichmüller vaut $2 - 2g$.*

4.1.2 La classe d'Euler des représentations discrètes est déterminée par leur image

Nous donnons maintenant une preuve du théorème 0.1.2. Considérons un groupe fuchsien Γ de signature $(g; k_1, \dots, k_l, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{r-l})$. Si $r \neq l$, posons $e(\Gamma) = 0$. Sinon, soit d le plus petit commun multiple de $k_1, \dots, k_r$ (avec par convention $d = 1$ si $r = 0$), et posons

$$e(\Gamma) = d \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right).$$

Proposition 4.1.4 *Soit ρ une représentation d'un groupe $\pi_1 \Sigma_{g'}$ (pour un certain g' quelconque) dont l'image est contenue dans Γ . Alors $e(\rho)$ est un multiple de $e(\Gamma)$. De plus, tout multiple de $e(\Gamma)$ est la classe d'Euler d'une représentation dont l'image est précisément Γ .*

Il est sans doute possible de définir la classe d'Euler d'une représentation du groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique dans $PSL(2, \mathbb{R})$, de la même manière que ce que nous avons rappelé ici pour les groupes de surfaces (section 1.3); la proposition 4.1.4 découlerait alors d'un argument de multiplicité de la classe d'Euler, similaire à la remarque 1.3.15. Cependant, nous pouvons raisonner de manière plus rapide, dans l'esprit du lemme 4.1.1.

Preuve

Il découle du lemme 4.1.1 que $H_1(\tilde{\Gamma})$, l'abélianisé de $\tilde{\Gamma}$, admet la présentation abélienne suivante :

$$H_1(\tilde{\Gamma}) = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g, z \mid q_1^{k_1} z, \dots, q_l^{k_l} z, q_1 \cdots q_r z^{2g-2+r} \right\rangle^{\text{ab}}$$

où tous les générateurs sont supposés commuter entre eux; c'est le sens de l'exposant "ab" dans l'écriture de la présentation.

Commençons par montrer que le sous-groupe $\langle z \rangle$ engendré par z dans $H_1(\tilde{\Gamma})$ est exactement $\mathbb{Z}/e(\Gamma)\mathbb{Z}$, où $e(\Gamma) = d \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right)$. Nous avons $z^N = 1$ dans $H_1(\tilde{\Gamma})$ si et seulement si z^N est un produit de relations $q_1^{k_1} z, \dots, q_l^{k_l} z$ et $q_1 \cdots q_r z^{2g-2+r}$ dans le groupe abélien $H_1(\tilde{\Gamma})$. Ecrivons ces relations comme des vecteurs colonne en termes des

générateurs $q_1, \dots, q_r$ et z (dans le cas $l = r$) :

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & k_r & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2g - 2 + r \end{pmatrix}.$$

Maintenant, supposons que $z^N = 1$, c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_r \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 2g - 2 + r \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$ entiers. Alors, $k_1\alpha_1 + \beta = 0, \dots, k_r\alpha_r + \beta = 0$. Ainsi, β est un multiple de chacun des k_i , donc $\beta = nd$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $\alpha_i = \frac{-nd}{k_i}$, et alors

$$N = \alpha_1 + \dots + \alpha_r + \beta(2g - 2 + r) = nd \left(2g - 2 + r - \sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i} \right) = nd \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right).$$

Dans le cas $l < r$, la $r^{\text{ème}}$ ligne donne simplement $\beta = 0$, de sorte que $N = 0$, ce qui achève de montrer que l'ordre de z dans $H_1(\tilde{\Gamma})$ est $e(\Gamma)$.

Soit alors $\rho \in R_{g'}$, d'image contenue dans Γ . Notons $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g'}, \beta_{g'}$ les générateurs de $\pi_1 \Sigma_{g'}$. La formule 1.1 de calcul de la classe d'Euler donne

$$z^{e(\rho)} = [\widetilde{\rho(\alpha_1)}, \widetilde{\rho(\beta_1)}] \cdots [\widetilde{\rho(\alpha_{g'})}, \widetilde{\rho(\beta_{g'})}],$$

où les $\widetilde{\rho(\alpha_i)}, \widetilde{\rho(\beta_i)}$ sont des relevés de $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)$ dans $\tilde{\Gamma}$. En particulier, $z^{e(\rho)}$ est un produit de commutateurs dans $\tilde{\Gamma}$, ce qui nécessite que $e(\rho)$ soit divisible par l'ordre de z dans $H_1(\tilde{\Gamma})$, c'est-à-dire $e(\Gamma)$. Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^{ne(\Gamma)}$ est un produit de commutateurs dans $\tilde{\Gamma}$ (en suivant les calculs précédents, on peut même écrire $z^{ne(\Gamma)}$ *explicitement* comme produit de commutateurs) :

$$z^{ne(\Gamma)} = [\widetilde{u_1}, \widetilde{v_1}] \cdots [\widetilde{u_{g'}}, \widetilde{v_{g'}}],$$

avec $u_i, v_j \in \Gamma$, et $g' \geq 2$, quitte à multiplier cette formule par $[1, 1]$. Alors les formules $\rho(\alpha_i) = u_i, \rho(\beta_i) = v_i$ définissent une représentation $\rho \in R_{g'}$, qui, toujours d'après la formule 1.1, est de classe d'Euler $ne(\Gamma)$. □

Remarque 4.1.5 *Etant donné un groupe fuchsien Γ , soit $G(\Gamma, n)$ le genre minimal tel qu'il existe une représentation $\rho \in R_{G(\Gamma)}$ d'image (contenue dans) Γ et de classe d'Euler*

$ne(\Gamma)$. L'inégalité de Milnor-Wood, combinée avec des formules explicites donnent les inégalités grossières

$$n \frac{e(\Gamma)}{2} + 1 \leq G(\Gamma, n) \leq ndg + r^{nd}.$$

En effet, écrivons $z^{ne(\Gamma)}$ comme un produit de $G(\Gamma, n)$ commutateurs dans $\tilde{\Gamma}$: alors $ne(\Gamma) \leq 2G(\Gamma, n) - 2$, i.e. $G(\Gamma, n) \geq n \frac{e(\Gamma)}{2} + 1$. En ce qui concerne la borne supérieure, on vérifie par récurrence sur d que le produit $(q_1 \cdots q_r) q_1^{-d} \cdots q_r^{-d}$ peut s'écrire comme un produit de r^d commutateurs. Maintenant dans $\tilde{\Gamma}$, $(q_1 \cdots q_r c_g z^{2g-2+r})^{nd} = 1$ donc $(q_1 \cdots q_r c_g)^{nd} q_1^{-nd} \cdots q_r^{-nd} = z^{-ne(\Gamma)}$ et $(q_1 \cdots q_r c_g)^{nd} q_1^{-nd} \cdots q_r^{-nd}$ s'écrit comme un produit de $ndg + r^{nd}$ commutateurs.

Il est assez facile de raffiner ces inégalités ; cependant nous ne connaissons pas d'estimations précises de $G(\Gamma, n)$.

Remarque 4.1.6 Le terme $\mathcal{A}(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$ est, à un facteur 2π près, le volume de l'orbifold hyperbolique $\mathbb{H}^2/\Gamma$. En particulier, il est strictement positif ; et donc $e(\Gamma)$ est un entier strictement positif dès que Γ est un groupe fuchsien cocompact.

Remarque 4.1.7 Bien entendu, $l \neq r$ si et seulement si Γ est non-cocompact. Dans ce cas, il y a une autre raison pour laquelle toute représentation à valeurs dans Γ est de classe d'Euler nulle. Si Γ est non-cocompact, alors $H^2(\Gamma) = 0$ (vu que la surface $\mathbb{H}^2/\Gamma$ n'est pas compacte). La prochaine proposition permet donc de conclure.

4.1.3 Il y a très peu d'images discrètes en classe d'Euler non nulle

La proposition suivante est une simple redite de la remarque 1.3.16, mais c'est dans ce contexte-ci que nous allons toujours nous en servir :

Proposition 4.1.8 Soit Γ un groupe qui s'injecte dans $PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $H^2(\Gamma) = 0$, et soit ρ une représentation d'image contenue dans Γ . Alors $e(\rho) = 0$.

Remarque 4.1.9 Par contre, il existe des groupes Γ , inclus dans $PSL(2, \mathbb{R})$, tels que $H^2(\Gamma) \neq 0$ et tels que toute représentation à valeurs dans Γ est de classe d'Euler nulle. Par exemple, toute réalisation de $\mathbb{Z}^2$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$ est dans un sous-groupe à un paramètre de $PSL(2, \mathbb{R})$, et donc toute représentation à valeurs dans $\mathbb{Z}^2 \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est élémentaire et est donc de classe d'Euler nulle.

D'un autre côté, beaucoup de groupes sont l'image d'une représentation de classe d'Euler nulle :

Remarque 4.1.10 Si G est un sous-groupe de type fini de $PSL(2, \mathbb{R})$, et si $\{x_1, \dots, x_g\}$ en est une partie génératrice, alors la relation $[x_1, x_1] \cdots [x_g, x_g] = 1$ permet de définir une représentation $\rho : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ dont l'image est G , de la façon suivante :

$$\rho(a_i) = x_i, \rho(b_i) = x_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq g.$$

Ainsi, tout sous-groupe de type fini de $PSL(2, \mathbb{R})$ est l'image d'une représentation de classe d'Euler nulle.

Remarque 4.1.11 *Etant données deux représentations $\rho \in R_g$, $\rho' \in R_{g'}$, nous avons $[\rho(a_1), \rho(b_1)] \cdots [\rho(a_g), \rho(b_g)] = 1$ et $[\rho(a'_1), \rho(b'_1)] \cdots [\rho(a'_{g'}), \rho(b'_{g'})] = 1$, et par conséquent $[\rho(a_1), \rho(b_1)] \cdots [\rho(a'_{g'}), \rho(b'_{g'})] = 1$. Cela définit naturellement une représentation dans $R_{g+g'}$. Cette construction, avec la remarque précédente, permet de montrer qu'il y a aussi beaucoup de sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui apparaissent comme l'image de représentations de classe d'Euler non nulle, même en classe d'Euler non nulle fixée : plus précisément, tout sous-groupe de type fini de $PSL(2, \mathbb{R})$ est contenu dans l'image d'une représentation de classe d'Euler non nulle.*

Maintenant nous prouvons la proposition 0.1.3 :

Proposition 4.1.12 *Soit k un entier non nul fixé. Alors il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes fuchsien Γ tels qu'il existe une représentation de $\pi_1 \Sigma_g$, pour un certain $g \geq 2$, dont l'image est contenue dans Γ , et de classe d'Euler k .*

Preuve

D'après la proposition 4.1.4, il suffit de montrer que l'inégalité $e(\Gamma) \leq k$ a lieu seulement pour un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes fuchsien cocompacts Γ . Nous devons prouver que l'inégalité

$$0 < d \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right) \leq k$$

implique que g , r et d sont tous bornés en terme de k . Vu que $d \geq k_i$ pour tout $i \leq r$, chaque entier intervenant dans la signature de Γ ne pourra prendre qu'un nombre fini de valeurs.

D'abord, $k_i \geq 2$ pour tout i donc $\sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \geq \frac{r}{2}$, et $d \geq 1$ donc $k \geq 2g - 2 + \frac{r}{2}$. Ainsi

r et g sont bornés. Enfin, d'après la proposition 1.1.11 on a $2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \geq \frac{1}{42}$ donc $\frac{d}{42} \leq k$, et donc d est borné aussi. $\square$

Corollaire 4.1.13 *Aucun groupe fuchsien cocompact ne peut s'envoyer par des morphismes de groupes injectifs dans une infinité de groupes fuchsien deux à deux non isomorphes. De plus, si Γ s'injecte dans un groupe fuchsien Γ' , alors $e(\Gamma')$ divise $e(\Gamma)$.*

Remarque 4.1.14 *Cependant, nous pouvons produire des chaînes d'inclusions arbitrairement longues de groupe fuchsien deux à deux non isomorphes. Par exemple, on vérifie aisément que $(2^k; -) \hookrightarrow (2^{k-1}; 2) \hookrightarrow (2^{k-2}; 4) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow (1; 2^k)$.*

4.1.4 Rareté des représentations discrètes

Notons ici $D_g \subset R_g$ l'ensemble des représentations d'image discrète, et E_g l'ensemble des représentations élémentaires. On a vu (corollaire 1.1.17) que E_g est une partie fermée d'intérieur vide dans R_g .

Proposition 4.1.15 *Soit $g \geq 2$. Alors pour tout k tel que $|k| \leq 2g-3$, $(D_g \cup E_g) \cap e^{-1}(k)$ est un fermé d'intérieur vide dans $e^{-1}(k)$.*

Preuve

Montrons d'abord que cet ensemble est fermé dans $e^{-1}(k)$. On a déjà vu que E_g est fermé. Considérons donc une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de représentations discrètes de classe d'Euler k , qui converge vers une représentation ρ non élémentaire ; il faut montrer que ρ est discrète. Supposons donc que ρ ne soit pas discrète. Vu que ρ n'est pas élémentaire, d'après la proposition 1.1.16, il existe $T_1, T_2 \in \rho(\pi_1 \Sigma_g)$ tels que $\text{tr}([T_1, T_2]) \neq 2$ (rappelons ici que $\text{tr}([T_1, T_2]) = 2$ si et seulement si T_1 et T_2 partagent au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial \mathbb{H}^2$, d'après la proposition 1.1.4). Et vu que ρ n'est pas discrète, il existe une suite $S_n \in \rho(\pi_1 \Sigma_g)$, $S_n \neq \text{Id}$, qui tend vers Id dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Par conséquent, il existe $N \geq 0$ tel que $J(S_N, T_1) < 1$ et $J(S_N, T_2) < 1$ (nous utilisons ici les notations du lemme de Jørgensen 1.1.12, rappelé dans le chapitre 1). Maintenant, ρ_n converge simplement vers ρ , donc il existe $n_0 \geq 0$ et $s, t_1, t_2 \in \rho_{n_0}(\pi_1 \Sigma_g)$ tels que $J(s, t_1) < 1$, $J(s, t_2) < 1$ et $\text{tr}([t_1, t_2]) \neq 2$ (vu que ces trois conditions sont des conditions ouvertes). Mais ceci contredit l'hypothèse que ρ_{n_0} est d'image discrète.

Ensuite, aucun élément de $(D_g \cup E_g) \cap e^{-1}(k)$ n'est une représentation injective, et, d'après le théorème de J. DeBlois et R. Kent ([DK06]), l'ensemble des représentations injectives est dense. L'ensemble $(D_g \cup E_g) \cap e^{-1}(k)$ est donc d'intérieur vide. $\square$

Remarque 4.1.16 *L'espace D_g , à lui seul, est donc d'intérieur vide dans $e^{-1}(k)$ mais il n'est pas fermé. En effet, soit $h : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{Z}^2$ une surjection et soit $q \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel. Le nombre q peut être approché par des rationnels $\frac{\varphi_n}{\psi_n}$, avec $\text{pgcd}(\varphi_n, \psi_n) = 1$. Soit $R(t)$ un sous-groupe à un paramètre, hyperbolique, de $PSL(2, \mathbb{R})$. Définissons alors $\phi_n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ par $\phi_n(1, 0) = R(1)$ et $\phi_n(0, 1) = R(\frac{\varphi_n}{\psi_n})$. Alors les représentations $\phi_n \circ h : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ sont d'image discrète, mais convergent vers une représentation non discrète. Celle-ci, cependant, est élémentaire.*

4.1.5 Existence de représentations discrètes de classe d'Euler donnée

Maintenant, nous donnons une preuve du théorème 0.1.5. Plus précisément, rappelons quelques notations introduites au chapitre précédent. Si g est pair $g = 2g'$, on note G_g le groupe fuchsien de signature $(g'; 2)$. On a alors

$$G_g = \left\langle \alpha_1, \dots, \beta_{g'} \mid ([\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = 1 \right\rangle.$$

et on note $p_g : \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ l'application définie en posant $p_g(a_i) = p_g(a_{g'+i}) = \alpha_i$ et $p_g(b_i) = p_g(b_{g'+i}) = \beta_i$ pour tout i entre 1 et g' .

Dans le cas où g est impair, $g = 2g' + 1$, rappelons que le groupe fuchsien G_g , de signature $(g'; 2, 2, 2)$ admet la présentation suivante :

$$G_g = \left\langle q_1, q_2, \alpha_1, \dots, \beta_{g'} \mid q_1^2 = q_2^2 = 1, (q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = 1 \right\rangle,$$

et nous notons $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g$ l'application définie par $p_g(a_1) = q_1^{-1}$, $p_g(b_1) = q_2^{-1}$, puis $p_g(a_i) = (q_1 q_2)^{-1} \alpha_{i-1} (q_1 q_2)$, $p_g(b_i) = (q_1 q_2)^{-1} \beta_{i-1} (q_1 q_2)$, pour tout i entre 2 et $g' + 1$, et $p_g(a_i) = \alpha_{i-g'-1}$ et $p_g(b_{i-g'-1}) = \beta_i$ lorsque $g' + 2 \leq i \leq g$.

Théorème 4.1.17

- Pour tout $g \geq 2$, la représentation $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G_g \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est de classe d'Euler $2g - 3$.
- Pour tous $g \geq 2$ et $2 - 2g \leq k \leq 2g - 2$, il existe une représentation $\rho \in R_g$ d'image discrète et de classe d'Euler k .

Preuve

Commençons par montrer que la représentation p_g est bien discrète et de classe d'Euler $2g - 3$.

1. Supposons que g soit pair ; $g = 2g'$. D'après le lemme 4.1.1,

$$\widetilde{G}_g = \left\langle q, \alpha_1, \dots, \beta_{g'}, z \mid z \text{ est central, } q^2 = z, q[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] = z^{2g'-2+1} \right\rangle$$

donc dans ce groupe on a $(q[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = z^{2g-2}$. On constate aisément, dans $\widetilde{G}_g$, que q commute avec le produit $[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}]$, de sorte que

$$([\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = z^{2g-3}.$$

On reconnaît la formule 1.1, appliquée à la représentation p_g , et cela établit que cette représentation est de classe d'Euler $2g - 3$.

2. Supposons que g soit impair ; $g = 2g' + 1$. Toujours d'après le lemme 4.1.1, on a

$$\widetilde{G}_g = \left\langle q_1, q_2, q_3, \alpha_1, \dots, \beta_{g'}, z \mid z \text{ est central, } q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = z, q_3 q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] = z^{2g'-2+3} \right\rangle.$$

Dans ce groupe, q_3 commute encore avec le mot $q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}]$, de sorte que $(q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}])^2 = z^{4g'+1}$, c'est-à-dire

$$q_1^{-1} q_2^{-1} [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] q_1 q_2 [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] = z^{4g'-1} = z^{2g-3},$$

et par conséquent

$$q_1^{-1} q_2^{-1} q_1 q_2 \cdot (q_1 q_2)^{-1} [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] q_1 q_2 \cdot [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_{g'}, \beta_{g'}] = z^{2g-3}.$$

Encore une fois on reconnaît la formule 1.1 appliquée à la représentation p_g , et cela établit que $e(p_g) = 2g - 3$ encore dans ce cas.

Nous allons maintenant vérifier que pour tout $k \in \{2 - 2g, \dots, 2g - 2\}$, il existe une représentation de $\pi_1 \Sigma_g$ de classe d'Euler k . Demarquons d'abord que si ρ est une représentation de $\pi_1 \Sigma_g$ de classe d'Euler k , alors on définit une représentation ρ' de $\pi_1 \Sigma_g$ en posant $\rho'(a_i) = \rho(b_{g-i})$, $\rho'(b_i) = \rho(a_{g-i})$; cette représentation est de classe d'Euler $-k$, d'après l'algorithme de Milnor (formule 1.1). Ainsi, il suffit de considérer le cas $k \geq 0$. Si k est pair, posons $k = 2l$. Notons que $l + 1 \leq g$, d'après l'inégalité de Milnor-Wood. Choisissons une représentation $r \in R_{l+1}$ dans la composante Teichmüller de la surface de genre $l + 1$. Sa classe d'Euler est $2(l + 1) - 2 = k$. Maintenant, définissons une représentation $\rho \in R_g$ en posant $\rho(a_i) = r(a_i)$, $\rho(b_i) = r(b_i)$ pour $i \leq l + 1$, et $\rho(a_i) = \text{Id}$, $\rho(b_i) = \text{Id}$ sinon. Toujours d'après la formule (1.1), on a $e(\rho) = k$, et ρ est encore d'image discrète.

De même, si k est impair, posons $k = 2l + 1$. L'inégalité de Milnor-Wood donne $g \geq l + 2$. Comme on vient de le voir, il existe une représentation $p_{l+2} \in R_{l+2}$ discrète et de classe d'Euler $2(l + 2) - 3 = k$. La représentation $\rho \in R_g$ définie par $\rho(a_i) = p_{l+2}(a_i)$, $\rho(b_i) = p_{l+2}(b_i)$ pour $i \leq l + 2$, et $\rho(a_i) = \text{Id}$, $\rho(b_i) = \text{Id}$ sinon. Alors ρ est une représentation discrète et de classe d'Euler k . $\square$

4.1.6 Les représentations non-injectives sont denses dans toutes les composantes non-Teichmüller

Nous allons maintenant donner une preuve du théorème 3.1.1, que nous commençons par rappeler :

Théorème 4.1.18 *Pour tous $g \geq 2$ et k tels que $|k| < 2g - 2$, les représentations non-injectives forment une partie dense de la composante connexe $e^{-1}(k)$.*

Preuve

Supposons le contraire. Alors il existe un ouvert $V \subset R_g$ qui consiste uniquement en des représentations injectives, de classe d'Euler k ($|k| < 2g - 2$). Soit $\rho_0 \in V$. La représentation ρ_0 n'est pas discrète vu que $|k| < 2g - 2$, et n'est pas élémentaire (sinon $\pi_1 \Sigma_g$ serait métabélien) donc il existe $x \in \pi_1 \Sigma_g$ tel que $\rho_0(x) \in \text{Ell}$, d'après la proposition 1.1.14. Et ρ_0 est injective, donc $\text{Tr}(\rho_0(x)) = 2 \cos \theta_0$, où θ_0 est irrationnel (autrement, $\rho_0(x)$ serait d'ordre fini, ce qui est impossible vu que $\pi_1 \Sigma_g$ est sans torsion). Maintenant $\rho \mapsto \text{Tr}(\rho(x))$ est continue, donc l'angle θ doit être constant sur V pour pouvoir rester irrationnel. Par conséquent, la fonction algébrique $\text{Tr}(\rho(x))$ est constante sur l'ouvert V dans l'ensemble algébrique R_g . Elle est donc constante sur toute la composante connexe $e^{-1}(k)$, vu que cette composante connexe est contenue dans une composante irréductible de l'ensemble algébrique R_g (voir [DK06]).

Nous en déduisons que pour tout $\rho \in e^{-1}(k)$, ρ envoie x sur un élément elliptique d'angle irrationnel. En particulier, ρ ne peut pas être d'image discrète. Mais cela contredit le théorème 4.1.17. $\square$

Remarque 4.1.19 *Comme cela a été prouvé dans [DK06, BGSS06], les représentations injectives forment une partie dense de R_g . Par conséquent, l'ensemble des représentations injectives est un G_δ dense et de complémentaire dense dans $e^{-1}(k)$, dès que $|k| \leq 2g - 3$. Un résultat comparable a été prouvé récemment par A. Glutsyuk [Glu04], pour l'ensemble*

des représentations des groupes libres dans des groupes de Lie généraux, répondant à une question de E. Ghys.

4.2 Représentations de classe d'Euler impaire

Le cas de la classe d'Euler impaire est un peu plus simple que le cas général. Même si certains des résultats suivants se déduisent des résultats déjà obtenus, dans ce texte, notre approche ici est souvent nettement plus élémentaire.

4.2.1 Un critère cohomologique

La fonction commutateur

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) & \rightarrow & SL(2, \mathbb{R}) \\ A, B & \mapsto & [A, B] \end{array}$$

définit une application

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) & \rightarrow & SL(2, \mathbb{R}) \\ A, B & \mapsto & [A, B]. \end{array}$$

Par conséquent, il existe une unique fonction continue $\varepsilon : R_g \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que pour tout $\rho \in R_g$,

$$[\rho(a_1), \rho(b_1)] \cdots [\rho(a_g), \rho(b_g)] = \varepsilon(\rho) \text{Id}.$$

Proposition 4.2.1 *Pour tout $\rho \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$, $\varepsilon(\rho) = (-1)^{e(\rho)}$.*

Preuve

Cela découle directement de l'algorithme de Milnor (formule 1.1). En effet, l'image de l'élément $z \in \widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ dans $SL(2, \mathbb{R})$ est $-\text{Id}$. $\square$

En particulier, cela donne une décomposition de R_g en deux sous-variétés algébriques de $(SL(2, \mathbb{R}))^{2g}$. L'une d'entre elles est définie par l'équation $[x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] = \text{Id}$ et l'autre est définie par $[x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] = -\text{Id}$. Ces deux variétés algébriques sont irréductibles. En fait, à toute représentation $\rho \in \text{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1))$ on peut associer un fibré en cercles au-dessus de la surface Σ_g en considérant $\widetilde{\Sigma}_g \times \mathbb{S}^1 / \simeq$, avec $(s, x) \simeq (\gamma \cdot s, \rho(\gamma) \cdot x)$ pour tout $\gamma \in \pi_1 \Sigma_g$. Alors $e(\rho)$ est précisément la classe d'Euler de ce fibré, et l'invariant $\varepsilon(\rho)$ est exactement la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(\rho)$ (voir [Gol84, Gol88, DK06]).

Corollaire 4.2.2 *Soit Γ un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ de type fini et soit $\widetilde{\Gamma}$ son relevé à $SL(2, \mathbb{R})$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe $g \geq 2$ et $\rho \in R_g$ une représentation de classe d'Euler impaire et dont l'image est Γ ;*
- *$-\text{Id}$ est un produit de commutateurs dans $\widetilde{\Gamma}$, i.e. $-\text{Id}$ est envoyé sur l'élément neutre dans $H_1(\widetilde{\Gamma})$.*

Preuve

S'il existe une représentation $\rho \in R_g$ de classe d'Euler impaire dont l'image est Γ alors, d'après la proposition 4.2.1, $[\rho(a_1), \rho(b_1)] \cdots [\rho(a_g), \rho(b_g)] = -\text{Id}$ donc $-\text{Id}$ est en effet un produit de commutateurs dans $\tilde{\Gamma}$.

Réciproquement, supposons que $-\text{Id}$ soit un produit de commutateurs dans le groupe $\tilde{\Gamma}$, plus précisément, supposons que $[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n] = -\text{Id}$. Soit $\{z_1, \dots, z_m\}$ une partie génératrice de Γ . Alors en utilisant l'égalité $[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n][z_1, z_1] \cdots [z_m, z_m] = \text{Id}$, on définit une représentation ρ de $\pi_1(\Sigma_{n+m})$, dont l'image est exactement Γ . $\square$

Corollaire 4.2.3 *Il n'existe pas de représentation de classe d'Euler impaire et dont l'image soit contenue dans $PSL(2, \mathbb{Z})$.*

Preuve

L'élément $-\text{Id} \in SL(2, \mathbb{Z})$ s'envoie sur l'élément 6, non nul, dans le groupe abélien $H_1(SL(2, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. $\square$

4.2.2 Un exemple explicite

Nous pouvons mettre à profit cette caractérisation pour donner un exemple explicite de représentation discrète de classe d'Euler impaire, de la façon suivante. Soit Γ un groupe fuchsien triangulaire de signature $(0; 2, 3, 7)$. Alors Γ admet la présentation suivante :

$$\Gamma = \langle q_1, q_2, q_3 \mid q_1^2 = 1, q_2^3 = 1, q_3^7 = 1, q_1 q_2 q_3 = 1 \rangle.$$

Son relevé $\tilde{\Gamma}$ admet alors la présentation suivante :

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle q_1, q_2, q_3, h \mid \begin{array}{l} h^2 = 1, hq_1 = q_1 h, hq_2 = q_2 h, hq_3 = q_3 h, \\ q_1^2 = h^{\beta_1}, q_2^3 = h^{\beta_2}, q_3^7 = h^{\beta_3}, q_1 q_2 q_3 = h^\beta \end{array} \right\rangle.$$

On peut remplacer q_2 et q_3 , respectivement, par $q_2 h$ et $q_3 h$, pour obtenir que $\beta_2 = \beta_3 = 0$, et alors on remplace q_1 par $q_1 h$ pour obtenir que $\beta = 1$ dans cette présentation. Maintenant, si on avait $\beta_1 = 0$, cela signifierait que q_1 est d'ordre 2 dans $SL(2, \mathbb{R})$ et donc qu'il est égal à Id ou $-\text{Id}$, et donc vaut Id dans $PSL(2, \mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $\beta_1 = 1$ (modulo 2). Finalement, nous obtenons la présentation suivante de $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle q_1, q_2, q_3, h \mid \begin{array}{l} h^2 = 1, hq_1 = q_1 h, hq_2 = q_2 h, hq_3 = q_3 h, \\ q_1^2 = h, q_2^3 = 1, q_3^7 = 1, q_1 q_2 q_3 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Considérons maintenant $H_1(\tilde{\Gamma})$. Dans ce groupe, $q_1 q_2 q_3 = 1$ donc

$$(q_1 q_2 q_3)^{42} = 1 = q_1^{42} q_2^{42} q_3^{42} = h^{21} q_2^{3 \times 14} q_3^{7 \times 6} = h \cdot h^{2 \times 10} = h$$

et donc $h = 1$ dans $H_1(\tilde{\Gamma})$. De façon équivalente, $-\text{Id}$ est un produit de commutateurs dans $\tilde{\Gamma}$. Comme précédemment, nous pouvons écrire explicitement $-\text{Id}$ comme produit de commutateurs, définissant ainsi une représentation d'un certain $\pi_1 \Sigma_g$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

4.2.3 Représentations discrètes de classe d'Euler impaire

Si Γ est un groupe fuchsien cocompact de signature $(g; k_1, k_2, \dots, k_r)$, soit $m(\Gamma)$ l'exposant de la puissance de 2, maximale, qui divise un des k_i . Si $m(\Gamma) = 0$, posons $n(\Gamma) = 0$. Sinon, soit $n(\Gamma)$ le nombre des k_i qui sont divisibles par $2^{m(\Gamma)}$. Nous avons alors la caractérisation suivante :

Proposition 4.2.4 *Un groupe fuchsien $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est l'image d'une représentation de $\pi_1 \Sigma_g$, pour un certain g , de classe d'Euler impaire, si et seulement si Γ est un groupe fuchsien cocompact tel que $n(\Gamma)$ est impair.*

Preuve

Ceci peut être déduit directement de la proposition 4.1.4, mais nous donnons une preuve différente ici. D'abord, d'après la remarque 4.1.8 (ou la proposition 4.1.4), Γ doit être cocompact (sinon $H^2(\Gamma) = 0$ et $e(\rho) = 0$).

Maintenant, soit Γ un groupe fuchsien cocompact, de signature $(g; k_1, k_2, \dots, k_r)$. Cela signifie que Γ a la présentation suivante :

$$\Gamma = \left\langle q_1, q_2, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g \mid q_1^{k_1}, \dots, q_r^{k_r}, q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \right\rangle.$$

Maintenant en utilisant le lemme 4.1.1 et le fait que $h^2 = 1$ ici (nous sommes dans $SL(2, \mathbb{R})$ et pas dans $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$), nous obtenons la présentation suivante pour le relevé $\tilde{\Gamma}$ dans $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle q_1, \dots, q_r, a_1, \dots, b_g, h \mid h q_1 h^{-1} q_1^{-1}, \dots, h b_g h^{-1} b_g^{-1}, h^2, q_1^{k_1} h, \dots, q_r^{k_r} h, q_1 \cdots q_r [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] h^r \right\rangle.$$

Il en découle que l'abélianisé de $\tilde{\Gamma}$ admet la présentation *abélienne* suivante :

$$H_1(\tilde{\Gamma}) = \left\langle q_1, \dots, q_r, h \mid h^2, q_1^{k_1} h, \dots, q_r^{k_r} h, q_1 \cdots q_r h^r \right\rangle^{\text{ab}}.$$

Maintenant réordonnons les q_i de sorte que les puissances de 2 divisant k_i sont décroissantes. Pour $1 \leq i \leq r$, soit $k_i = 2^{u_i} v_i$ avec v_i impair. En particulier, $u_i = m(\Gamma)$ si $1 \leq i \leq n(\Gamma)$.

1. Supposons d'abord que $n(\Gamma)$ soit impair. Alors $(q_1 \cdots q_r h^r)^{2^{m(\Gamma)} v_1 \cdots v_r} = h^{n(\Gamma)} = 1$ donc $h = 1$ dans $H_1(\tilde{\Gamma})$.
2. Supposons maintenant que $n(\Gamma)$ soit pair. Alors nous allons définir un morphisme $\phi : H_1(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. D'abord, soit $\phi(h) = -1$. Ensuite, si $i \geq 2$, soit $\phi(q_i) = \exp\left(\frac{i\pi}{2^{u_i}}\right)$. Alors $\phi(q_i^{k_i} h) = -\exp\left(\frac{i\pi k_i}{2^{u_i}}\right) = \exp(i\pi(1 + v_i)) = 1$. Si $n(\Gamma) = 0$ (ou, de façon équivalente, si tous les k_i 's sont impairs), posons $\phi(q_1) = -1$. Alors on vérifie aisément que $\phi(q_1^{k_1} h) = 1$ et $\phi(q_1 \cdots q_r h^r) = 1$, donc notre morphisme ϕ est bien défini. Autrement, posons $\phi(q_1) = \exp\left(-\frac{i\pi}{2^m}((n-1) + 2^m r + \sum_{i=n+1}^r 2^{m-u_i})\right)$. Alors nous pouvons encore vérifier que $\phi(q_1^{k_1} h) = 1$ et que $\phi(q_1 \cdots q_r h^r) = 1$, donc notre morphisme est bien défini. Ceci prouve que $h \neq 1$ dans $H_1(\tilde{\Gamma})$.

□

Remarque 4.2.5 Comme dans la remarque 4.1.5, dans le cas où $h = 1$ dans $H_1(\tilde{\Gamma})$, nous pouvons définir explicitement une représentation de classe d'Euler impaire, dont l'image est Γ . Ceci se fait en écrivant $(q_1 \cdots q_r)^d q_1^{-d} \cdots q_r^{-d}$, avec $d = 2^{m(\Gamma)} v_1 \cdots v_r$, comme un produit de commutateurs.

4.3 Déformations des sous-groupes non-élémentaires

Dans [Sul85], D. Sullivan appelle sous-groupe *structurellement stable* d'un groupe de Lie G , tout sous-groupe Γ tel que toute représentation de Γ dans G , suffisamment proche de la représentation tautologique, est encore injective. On dit aussi qu'un sous-groupe Γ d'un groupe de Lie G est localement *non-rigide* s'il existe des représentations de Γ , proches de la représentation tautologique, mais qui ne sont pas conjuguées à la représentation tautologique.

Nous risquons ici le terme *déformable par chemins* pour désigner un sous-groupe Γ de G tel que l'espace topologique quotient $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$ contienne un chemin non trivial partant de la représentation tautologique, constitué de représentations injectives.

Les groupes fuchsien compacts sont déformables dans $PSL(2, \mathbb{R})$; d'ailleurs les espaces de Teichmüller décrivent à quel point ces groupes se déforment. Nous allons voir tout de suite que les groupes fuchsien sont les seuls à admettre de telles déformations.

Proposition 4.3.1 Soit Γ un sous-groupe déformable par chemins et non-élémentaire de $PSL(2, \mathbb{R})$. Alors Γ est discret.

Remarque 4.3.2 “Non-élémentaire” est une hypothèse réellement nécessaire. En effet, si $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, alors en posant

$$\rho_t((1, 0)) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \text{ et } \rho_t((0, 1)) = \begin{pmatrix} \cosh(\pi t) & \sinh(\pi t) \\ \sinh(\pi t) & \cosh(\pi t) \end{pmatrix},$$

la représentation ρ_t est injective pour tout t : ceci donne un chemin non trivial dans $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, PSL(2, \mathbb{R}))/PSL(2, \mathbb{R})$.

Preuve

Considérons un sous-groupe Γ non-élémentaire et non-discret. Notons $r_t \in R_\Gamma/PSL(2, \mathbb{R})$ un chemin de classes de représentations injectives, partant de la représentation tautologique ; nous allons montrer que r_t est constant.

Nous allons commencer par essayer de trouver un chemin (continu) de représentants $\rho_t \in R_\Gamma$, tel que $r_t = [\rho_t]$. Commençons par observer que pour tout élément elliptique $\gamma \in \Gamma$, la trace $\text{Tr}(r_t(\gamma))$ est constante (sinon, l'ordre de $r_t(\gamma)$ ne serait pas constant, ce qui empêcherait r_t d'être une classe de représentations injectives). Par ailleurs, le groupe Γ étant non élémentaire et non discret, d'après la proposition 1.1.14, il existe un élément elliptique $\gamma_0 \in \Gamma$ d'ordre infini. Nous pouvons donc prendre $\rho_t(\gamma_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, avec θ irrationnel fixé, pour tout t . C'est une rotation autour de $x_0(t) = i$, dans le modèle du demi-plan supérieur. Puis Γ n'est pas élémentaire, donc i n'est pas un point fixe global, donc il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\rho_t(\gamma_1)$ soit une rotation d'angle θ , autour d'un point $x_1(t)$, à distance $\alpha(t)$ de $x_0(t)$. Puis on peut conjuguer γ_1 par γ_0 pour trouver une troisième

rotation, γ_2 , d'angle θ , de sorte que $x_0(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (le point fixe de $\rho_t(\gamma_2)$) forment un triangle non dégénéré.

En général, si A et B sont isométries elliptiques d'angle θ et si leurs points fixes x_A et x_B sont à distance α , alors on a $\text{Tr}(AB^{-1}) = 2 + 4\sin^2\theta \sinh^2(\alpha)$. En effet, on a $B = UAU^{-1}$, où U est l'élément hyperbolique de distance de translation α qui envoie x_A sur x_B . Quitte à tout conjuguer, on a $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$, d'où la formule $\text{Tr}(AB^{-1}) = 2 + 4\sin^2\theta \sinh^2(\alpha)$.

Revenons à la représentations ρ_t . On a $\text{Tr}(\rho_t(\gamma_1\gamma_0^{-1})) = 2 + 4\sin^2\theta \sinh^2(\alpha(t))$ donc le réel $\alpha(t)$ dépend continûment de t ; de même pour les longueurs des deux autres triangles. Quitte à conjuguer ρ_t , les trois points $x_0(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dépendent continûment de t . Et de même, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho_t(\gamma)$ envoie les trois points $x_0(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à une distance qui dépend continûment de t . Il découle alors de la proposition 1.1.9 que $t \mapsto \rho_t$ est *continue*.

Fixons maintenant $\gamma \in \Gamma$, et notons $\rho_t(\gamma) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$; supposons par l'absurde que $a(t) + d(t)$ ne soit pas constante. Alors $a(t) + d(t) > 2$, sinon l'ordre de $\rho_t(\gamma)$ varierait. Mais alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_t(\gamma\gamma_0)) &= |(a(t) + d(t)) \cos\theta + (b(t) - c(t)) \sin\theta| \\ &= (a(t) + d(t)) \left| \cos\theta \left(1 + \frac{b(t)-c(t)}{a(t)+d(t)} \tan\theta \right) \right|. \end{aligned}$$

Quitte à remplacer γ_0 par γ_0^N avec $N \in \mathbb{Z}$ bien choisi, nous pouvons choisir θ de sorte que $|\text{Tr}(\rho_t(\gamma\gamma_0))| < 2$, et que $\text{Tr}(\rho_t(\gamma\gamma_0))$ ne soit pas constant près de $t = 0$, ce qui est impossible (si $b(0) \neq c(0)$, on choisit θ de sorte que $\left| \frac{a(0)+d(0)}{b(0)-c(0)} + \tan\theta \right| < \frac{2}{|b(0)-c(0)|}$; sinon on choisit θ de sorte que $\cos\theta < \frac{2}{a(0)+d(0)}$).

Ainsi, $\text{Tr}(\rho_t(\gamma))$ est constante, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Mais d'après la proposition 2.2.12, ceci impose que r_t soit constante. $\square$

Chapitre 5

Compactification avec orientation de l'espace des représentations

Dans toute la suite, nous fixons $n = 2$. Nous nous intéressons aux dégénérescences d'actions sur $\mathbb{H}^2$, et nous allons montrer que ces dégénérescences contiennent l'information d'un ordre cyclique préservé sur le bord de l'arbre réel.

Reprenons les notations du chapitre 2. Ici ce n'est pas l'espace m_g^u que nous allons compactifier, mais l'espace m_g^o , où la classe d'Euler est définie (voir la section 1.3) à l'aide de l'orientation du cerle $\partial\mathbb{H}^2$.

On l'a vu plus haut, les points idéaux de la compactification $\overline{m}_g^u$ de M. Bestvina et F. Paulin sont des (classes d'isométrie équivariante d') actions de $\pi_1\Sigma_g$ par isométries sur des arbres réels. Nous allons montrer que l'on peut munir ces arbres réels d'une orientation, ce qui permet de définir une classe d'Euler sur ces arbres. Cela va nous permettre de définir une compactification de m_g^o , sur laquelle la classe d'Euler s'étend continûment jusqu'au bord.

Nous verrons ensuite que la compactification $\overline{m}_g^u$ est en fait très dégénérée, du fait que cette orientation est "oubliée" par la topologie de Gromov équivariante.

5.1 Arbres réels épais

Soit X un espace hyperbolique au sens de Gromov. Par un germe de rayons dans X , nous entendons une classe d'équivalence de rayons, pour la relation d'équivalence suivante : nous disons que deux rayons sont équivalents s'ils coïncident sur un segment initial non trivial.

Dans le reste de cette section, T désignera un arbre réel non réduit à un point. En tout point $x \in T$, notons $\mathcal{G}(x)$ l'ensemble des germes de rayons issus de x . Une *orientation* de T est la donnée, pour tout $x \in T$, d'un ordre cyclique total $or(x)$ dans $\mathcal{G}(x)$.

Définition 5.1.1

- Un arbre réel muni d'une orientation sera appelé un arbre réel épais.
- Soient (T, or) et (T', or') deux arbres réels épais et $h \in \text{Isom}(T, T')$ une isométrie. Bien entendu, h définit, pour tout point $x \in T$, une bijection $\mathcal{G}h_x: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(h(x))$.

Nous dirons que h préserve l'orientation si pour tout $x \in T$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(x)^3 & \xrightarrow{or(x)} & \{-1, 0, 1\} \\ (\mathcal{G}h_x)^3 \downarrow & \nearrow or'(h(x)) & \\ \mathcal{G}(h(x))^3 & & \end{array}$$

commute. L'ensemble des isométries de T qui préservent l'orientation or forme un sous-groupe de $Isom(T)$, que nous noterons $Isom^{or}(T)$.

- On dit qu'une action $\rho: \Gamma \rightarrow Isom(X)$ d'un groupe Γ par isométries préserve l'orientation or si elle est à valeurs dans $Isom^{or}(T)$.

Vu que nous allons vouloir définir la classe d'Euler d'une action préservant l'orientation, nous allons nous intéresser plus particulièrement au bord de l'arbre. Nous dirons qu'un ordre cyclique total o sur $\partial_\infty T$ est *cohérent* si pour tout $x \in T$ et tout triplet non dégénéré $\{c_1, c_2, c_3\}$ de germes de rayons issus de x , l'élément $o(r_1, r_2, r_3)$ ne dépend pas des représentants choisis r_1, r_2, r_3 de c_1, c_2, c_3 .

Par exemple dans la configuration suivante



un ordre cyclique total o sur le bord $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ est cohérent si et seulement s'il vérifie $o(r_1, r_2, r_3) = o(r_1, r_2, r_4)$ et $o(r_1, r_3, r_4) = o(r_2, r_3, r_4)$.

Il y a, bien entendu, une relation entre les orientations sur un arbre réel et les ordres cycliques totaux cohérents sur son bord. Commençons par introduire quelques notations.

Naturellement, nous dirons qu'un arbre réel T est *l'enveloppe son bord* s'il est l'adhérence de la réunion des géodésiques isométriques à $\mathbb{R}$ tout entier. Autrement dit, si

$$T = \overline{\bigcup_{\substack{a, b \in \partial_\infty T \\ a \neq b}}]a, b[}.$$

Nous dirons aussi que deux tripodes non dégénérés sont équivalents si leur intersection est un tripode non dégénéré ; nous noterons $Trip(T)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Notons

$$O'_T = \{-1, 1\}^{Trip(T)},$$

et munissons-le de la topologie produit (la topologie de la convergence simple). C'est un espace compact d'après le théorème de Tikhonov. Notons O_T l'ensemble (fermé) des fonctions o qui satisfont les conditions suivantes : pour chaque tripode $Trip(a_0, a_1, a_2, a_3)$ (où a_0 est le point central), nous avons

$$o(Trip(a_0, a_1, a_2, a_3)) = o(Trip(a_0, a_2, a_3, a_1)) = -o(Trip(a_0, a_1, a_3, a_2)).$$

Les triplets non dégénérés de germes de rayons issus d'un même point sont évidemment identifiés aux classes de tripodes, de sorte qu'une orientation de T est naturellement un

élément de O_T . Plus précisément, notons $OR_T \subset O_T$ l'ensemble constitué par les fonctions vérifiant la condition suivante : pour tout $a \in T$ et tous tripodes $Trip(a, b, c, d)$ et $Trip(a, b, d, e)$ de sommet a ,

$$or(Trip(a, b, c, d)) = or(Trip(a, b, d, e)) = 1 \Rightarrow or(Trip(a, b, c, e)) = 1.$$

Alors OR_T s'identifie à l'ensemble des orientations de T ; remarquons que OR_T est fermé.

Soit maintenant E_T l'ensemble

$$E_T = \{-1, 0, 1\}^{(\partial T)^3},$$

que nous munissons encore de la topologie produit. Soit E'_T le sous-ensemble (fermé) de E_T , constitué des éléments $o \in E_T$ vérifiant :

$$\forall (x, y, z) \in (\partial T)^3, o(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow Card\{x, y, z\} \leq 2.$$

Notons ORD_T l'ensemble des ordres cycliques cohérents sur $\partial_\infty T$.

Pour tout triplet non-dégénéré $(x, y, z) \in (\partial_\infty T)^3$, notons $t(x, y, z) \in Trip(T)$ la classe du tripode $]x, y[\cup]x, z[\cup]y, z[$. Cette fonction t définit, par précomposition, une fonction $f: O_T \rightarrow E_T$.

Proposition 5.1.2 *Supposons que T soit l'enveloppe de son bord. Alors la restriction de f à OR_T est un homéomorphisme sur son image ORD_T .*

Preuve

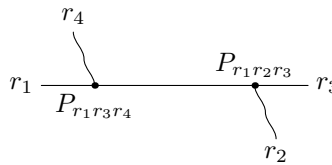
Notons

$$T' = \bigcup_{\substack{a, b \in \partial_\infty T \\ a \neq b}}]a, b[.$$

On constate aisément que T' est connexe (si $x, y \in T'$, alors $x \in]a, b[$ et $y \in]c, d[$: alors $]a, c[\cap]a, b[$ est non vide du fait que T est un arbre, donc il existe un chemin dans T' joignant x à un point de $]a, c[$, et $]a, c[\cap]c, d[\neq \emptyset$ assure qu'il y a un chemin de T' joignant x à un point de $]c, d[$, puis à y), de sorte que T' est un sous-arbre de T , dense dans T' . Par conséquent, toute classe de tripodes possède un représentant dans T' ; on vérifie aussi que tout segment dans T' est réalisé par une portion de droite $]a, b[$. La fonction t est donc surjective, de sorte que f est injective.

La continuité de f est immédiate, par conséquent f est un homéomorphisme de OR_T (qui est compact) sur son image (qui est séparée) ; il nous faut maintenant vérifier que $f(OR_T) = ORD_T$.

Soit or une orientation de T , et $o = f(or)$. La fonction $o: \partial_\infty T^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ vérifie immédiatement les conditions 1 et 2 de la définition 1.3.1. Vérifions que la condition 3 de cette définition est aussi satisfaite : supposons que $o(r_1, r_2, r_3) = o(r_1, r_3, r_4) = 1$. Pour tout triplet non dégénéré $(a, b, c) \in \partial_\infty T$, $]a, b[\cap]a, c[\cap]b, c[$ est un singleton ; notons-le $\{P_{abc}\}$. Si $P_{r_1 r_3 r_4} \in]r_1, P_{r_1 r_2 r_3}[$, alors



$P_{r_1 r_2 r_4} = P_{r_1 r_3 r_4}$ et les germes de $[P_{r_1 r_2 r_4}, r_2[$ et $[P_{r_1 r_2 r_4}, r_3[$ sont identiques, de sorte que $o(r_1, r_2, r_4) = 1$. Si $P_{r_1 r_3 r_4} \in]P_{r_1 r_2 r_3}, r_3[$ on raisonne de même. Si $P_{r_1 r_3 r_4} = P_{r_1 r_2 r_3}$, alors les germes des rayons $[P_{r_1 r_2 r_3}, r_2[$ et $[P_{r_1 r_2 r_3}, r_4[$ sont distincts puisque nous avons $o(r_1, r_3, r_2) \neq o(r_1, r_3, r_4)$: donc $[P_{r_1 r_2 r_3}, r_1[, \dots, [P_{r_1 r_2 r_3}, r_4[$ définissent quatre germes deux à deux distincts de rayons issus de $P_{r_1 r_2 r_3}$, d'où $o(r_1, r_2, r_4) = 1$, vu que $or(P_{r_1 r_2 r_3})$ vérifie la condition 3 de la définition 1.3.1. Et par construction, l'ordre o est cohérent. Nous venons de montrer que $f(OR_T) \subset ORD_T$. Mais par définition, un ordre cyclique total est cohérent si et seulement s'il est dans l'image de f , et si $f(or)$ est un ordre cyclique total cohérent on vérifie aisément que or est bien une orientation de T . $\square$

Rappelons maintenant qu'une action d'un groupe Γ par isométries sur un arbre réel T est dite *minimale* si T ne possède pas de sous-arbre $T' \subset T$, invariant sous l'action de Γ , et distinct de $\emptyset$ et de T .

Dans toute la suite, Γ désignera un groupe de type fini et on considèrera des actions minimales de Γ sur des arbres réels. Dans ce cas, T est la réunion des axes de translation des éléments hyperboliques de l'image de Γ (voir par exemple [MS84, Pau89]). En particulier, de tels arbres sont l'enveloppe de leur bord.

Dans toute la suite, nous aurons besoin de pouvoir parler de *l'ensemble* des classes d'actions minimales de Γ sur des arbres réels épais, préservant l'orientation, à isométrie équivariante préservant l'orientation près. Un argument de cardinalité nous permettrait de montrer qu'il s'agit bien d'un ensemble, mais la prochaine proposition donne un argument plus explicite.

Si (T, or) est un arbre réel épais et si $u, v, w \in T$ sont non alignés, alors ils définissent une classe de tripodes et nous noterons encore $or(u, v, w) \in \{-1, 1\}$ l'image de ce tripode par or . Si u, v, w sont alignés, on notera $or(u, v, w) = 0$.

Proposition 5.1.3 *Soit (T, or) un arbre réel épais, soit $x_0 \in T$, et soit $\rho: \Gamma \rightarrow Isom^{or}(T)$ une action minimale d'un groupe Γ de type fini, préservant l'orientation. Alors l'arbre réel T , l'orientation or et l'action ρ sont entièrement déterminés par les fonctions $f: \Gamma^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \Gamma^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ définies par*

$$f(\gamma_1, \gamma_2) = d_T(\gamma_1 x_0, \gamma_2 x_0) \quad \text{et} \quad g(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = o(\gamma_1 x_0, \gamma_2 x_0, \gamma_3 x_0).$$

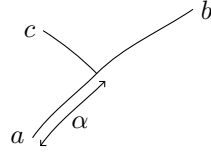
Plus précisément, si $\rho: \Gamma \rightarrow Isom^{or}(T)$ et $\rho': \Gamma \rightarrow Isom^{or'}(T')$ définissent les mêmes fonctions f et g , pour deux choix de points base dans T et T' , alors il existe une isométrie $\varphi: T \rightarrow T'$ équivariante et préservant l'ordre et le point base.

Preuve

Ce fait est connu (voir par exemple [Pau89]) pour les actions minimales d'un groupe de type fini sur les arbres réels ; il s'agit ici seulement d'ajouter l'orientation.

Commençons par la remarque suivante. Soient T et T' deux arbres réels épais et $x_1, \dots, x_n \in T$, $x'_1, \dots, x'_n \in T'$ tels que pour tous i, j , $d(x_i, x_j) = d(x'_i, x'_j)$ et pour tous i, j, k , $or(x_i, x_j, x_k) = or'(x'_i, x'_j, x'_k)$. Notons $K = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors la fonction $\varphi_K: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{x'_1, \dots, x'_n\}$ définie par $\varphi_K(x_i) = x'_i$ s'étend en une isométrie unique, qui préserve l'ordre, $\varphi_{Conv(K)}: Conv(\{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow Conv(\{x'_1, \dots, x'_n\})$ (les parties $Conv(\{x_1, \dots, x_n\})$ et $Conv(\{x'_1, \dots, x'_n\})$, en tant que sous-arbres de T et T' , sont des arbres orientés, par les restrictions de or et or').

Prouvons ceci par récurrence. Si $n = 1$, il n'y a pas grand-chose à faire. Notons donc encore $K = \{x_1, \dots, x_n\}$ et supposons que $\varphi_{Conv(K)}$ est une isométrie préservant l'orientation entre $Conv(\{x_1, \dots, x_n\})$ et $Conv(\{x'_1, \dots, x'_n\})$. Notons y_{n+1} la projection de x_{n+1} sur $Conv(K)$. La relation suivante, valable dans tout arbre réel



$$\alpha = \frac{1}{2} (d(a, b) + d(a, c) - d(b, c))$$

permet de repérer y_{n+1} dans l'arbre $Conv(K)$: les réels $d(x_1, x_{n+1}), \dots, d(x_n, x_{n+1})$ déterminent un unique point $y_{n+1} \in Conv(K)$; de même ils déterminent un unique point $y'_{n+1} \in Conv(\{x'_1, \dots, x'_n\})$, et on a $\varphi_{Conv(K)}(y_{n+1}) = y'_{n+1}$. Si $x_{n+1} = y_{n+1}$ alors $Conv(\{x_1, \dots, x_n\}) = Conv(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$ et $Conv(\{x'_1, \dots, x'_n\}) = Conv(\{x'_1, \dots, x'_{n+1}\})$ et la récurrence est terminée. Sinon, $Conv(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$ est obtenu en recollant en y_{n+1} l'arbre $Conv(\{x_1, \dots, x_n\})$ et le segment $[x_{n+1}, y_{n+1}]$, dont la longueur est déterminée par les nombres $d(x_1, x_{n+1}), \dots, d(x_n, x_{n+1})$; de même pour $Conv(\{x'_1, \dots, x'_{n+1}\})$ dans T' . L'isométrie $\varphi_{Conv(K)}$ se prolonge ainsi en une unique isométrie $\varphi_{Conv(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})}$. Vu que $\varphi_{Conv(K)}$ préserve l'orientation, il suffit de vérifier que $\varphi_{Conv(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})}$ préserve l'orientation au sommet y_{n+1} . Mais cela découle du fait que toutes les classes de tripodes de centre y_{n+1} ont un représentant du type $Conv(\{x_i, x_j, x_{n+1}\})$, où $Card(\{i, j, n+1\}) = 3$.

Supposons maintenant que (ρ, T) et (ρ', T') définissent les mêmes fonctions f et g ; notons x_0 et x'_0 les points base respectifs. Soit P une partie finie de Γ . Nous avons donc une unique isométrie $\varphi_{Conv(P \cdot x_0)}$ entre $Conv(P \cdot x_0)$ et $Conv(P \cdot x'_0)$, préservant l'orientation, telle que $\varphi_{Conv(P \cdot x_0)}(\gamma \cdot x_0) = \gamma x'_0$. En particulier pour toute partie Q de P la restriction de $\varphi_{Conv(P \cdot x_0)}$ à $Conv(Q \cdot x_0)$ vaut $\varphi_{Conv(Q \cdot x_0)}$, ce qui nous permet de construire une isométrie $\varphi : \bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x_0) \rightarrow \bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x'_0)$, telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait $\varphi(\gamma \cdot x_0) = \gamma \cdot x'_0$; et on en déduit aussi que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et toute partie finie P de Γ nous avons

$$\forall y \in Conv(P \cdot x_0), \quad \rho'(\gamma) \cdot \varphi_{Conv(P \cdot x_0)} = \varphi_{Conv(\gamma P \cdot x_0)}(\rho(\gamma) \cdot y)$$

ce qui assure que l'isométrie φ est équivariante pour les actions ρ, ρ' sur les arbres $\bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x_0)$ et $\bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x'_0)$. Tout tripode de $\bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x_0)$ est dans $Conv(P \cdot x_0)$ pour P assez grand, donc φ préserve l'orientation. Enfin, les actions ρ et ρ' étant minimales, nous avons $\bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x_0) = T$ et $\bigcup_{P \subset \Gamma} Conv(P \cdot x'_0) = T'$; ainsi $\varphi : T \rightarrow T'$ est une isométrie équivariante préservant l'ordre, telle que $\varphi(x_0) = x'_0$. $\square$

Bien entendu, f et g dépendent de x_0 , néanmoins il découle de cette proposition que les classes d'équivalence d'arbres réels épais non réduits à un point, munis d'une action minimale de Γ par isométries préservant l'ordre, à isométrie équivariante préservant l'ordre près, forment un ensemble, que nous noterons $\mathcal{T}''(\Gamma)$. Nous noterons $\mathcal{T}^o(\Gamma)$ le sous-ensemble formé par les $(\rho, T) \in \mathcal{T}''(\Gamma)$ tels que $\min_{x_0 \in T} \max_{\gamma \in S} d_T(x_0, \gamma \cdot x_0) = 1$ et tels que si ρ possède au moins un point fixe global dans $\partial_\infty T$ alors T est isométrique à $\mathbb{R}$.

Notre but est maintenant de définir une topologie sur $m_\Gamma^o(2) \cup \mathcal{T}^o(\Gamma)$.

5.2 Rigidité de l'ordre

Nous devons d'abord donner quelques lemmes techniques qui indiqueront que l'ordre dans lequel viennent les triplets de points dans un arbre réel épais ou dans $\mathbb{H}^2$, est stable sous des déformations suffisamment petites de l'arbre ou du plan. Dans toute cette section, X désignera un arbre réel épais ou le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, muni de son orientation (et donc, d'un ordre cyclique total sur son bord), et d'une métrique $\frac{d_{\mathbb{H}^2}}{d}$ proportionnelle à sa métrique usuelle. Sa meilleure constante d'hyperbolicité est alors $\delta(X) = \frac{\delta_{\mathbb{H}^2}}{d}$.

Lemme 5.2.1 *Soient $x_1, x_2, x_3 \in X$. Alors il existe un unique $x_0 \in X$ qui minimise la fonction $x \mapsto d(x, x_1) + d(x, x_2) + d(x, x_3)$. De plus, la fonction $X^3 \rightarrow X$ définie par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_0$ est continue.*

Preuve

Si X est un arbre réel, alors on vérifie aisément que l'unique point $m \in X$ tel que $[x_1, x_2] \cap [x_1, x_3] = [x_1, m]$ est le x_0 recherché. Si X est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ muni d'une métrique proportionnelle à $d_{\mathbb{H}^2}$, alors la fonction $x \mapsto d(x, x_1) + d(x, x_2) + d(x, x_3)$ est convexe, propre, et donc atteint un minimum. Et l'inégalité $CAT(0)$ entraîne que cette fonction ne peut pas être constante sur un segment non dégénéré, ainsi ce minimum est unique. De plus, cette fonction convexe dépend continûment de x_1, x_2 et x_3 , donc son unique minimum dépend aussi continûment de x_1, x_2 et x_3 . $\square$

Remarque 5.2.2 *Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le point x_0 est appelé point de Fermat du triangle $\Delta(x_1, x_2, x_3)$. Si ce triangle a ses angles plus petits que $\frac{2\pi}{3}$, alors ce point coïncide avec le point de Torricelli, qui, dans ce cas, voit chaque arête du triangle sous un angle de $\frac{2\pi}{3}$ (voir par exemple [Fre96]).*

Soit $A \geq 0$. Nous désignerons par $V(A) \subset X^3$ l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in X^3$ tels que pour toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, on ait $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) - d(x_i, x_k) > 2A$.

Lemme 5.2.3 *Il existe une constante universelle $C_0 \geq 0$ telle que pour tous $(x_1, x_2, x_3) \in V(C_0\delta(X))$, on ait $x_0 \notin \{x_1, x_2, x_3\}$, où x_0 est comme dans le lemme 5.2.1.*

Preuve

La preuve dans le cas où X est un arbre réel découle de la même observation que dans la preuve du lemme 5.2.1. Dans ce cas, n'importe quel $C_0 \geq 0$ convient. Maintenant, supposons que $X = (\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$. Commençons par remarquer que si tous les angles d'un triangle non dégénéré $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ sont strictement inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, alors $x_0 \notin \{x_1, x_2, x_3\}$. En effet, supposons que l'angle en x_1 soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Alors, pour un certain $x'_3 \in [x_1, x_3]$, tel que $x'_3 \neq x_1$, le projeté orthogonal $p(x'_3)$ de x'_3 sur la géodésique (x_1, x_2) est strictement entre x_1 et x_2 . Alors $d(x_1, p(x'_3)) + d(x_2, p(x'_3)) + d(x_3, p(x'_3)) < d(x_1, x_2) + d(x_1, x_3)$, de sorte que $x_0 \neq x_1$. De même, $x_0 \notin \{x_2, x_3\}$. Maintenant, nous allons montrer que la condition $(x_1, x_2, x_3) \in V(A)$, pour A assez grand, entraîne que tous les angles du

triangle $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ sont inférieurs à $\frac{\pi}{2}$. Considérons le modèle du disque de Poincaré $\mathbb{H}^2$, et soit a le centre du disque. Soient u_1, u_2 deux points de $\partial\mathbb{H}^2$, tels que la mesure de l'angle $\widehat{u_1 a u_2}$ vaille $\frac{\pi}{2}$. Soit A la distance hyperbolique entre a et la géodésique $(u_1 u_2)$ (nous avons trouvé $A = \frac{1}{2} \ln 3$, dans la section 1.1.3). Supposons maintenant que dans le triangle $\Delta(x_1, x_2, x_3)$, l'angle en x_1 soit supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Alors $d(x_1, [x_2, x_3]) \leq A$, et ceci implique que $d(x_1, x_2) + d(x_1, x_3) - d(x_2, x_3) \leq 2A$, de sorte que $(x_1, x_2, x_3) \notin V(A)$. Il en découle que $C_0 = \frac{A}{\delta_{\mathbb{H}^2}} = \frac{\ln 3}{2 \ln(1+\sqrt{2})}$ convient pour le lemme, pour $X = (\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$. Enfin, dans le cas où X est le plan hyperbolique muni d'une métrique proportionnelle $\frac{d_{\mathbb{H}^2}}{d}$, on prouve le lemme en suivant le raisonnement précédent. $\square$

Dans toute la suite, C_0 désignera la constante exhibée dans la preuve du lemme 5.2.3. En choisissant une autre définition équivalente de la δ -hyperbolicité au sens de Gromov (voir section 1.1.3), et en considérant, par exemple, le réel $A = \frac{1}{2} \ln 3$ comme constante d'hyperbolicité de $\mathbb{H}^2$, nous aurions obtenu $C_0 = 1$. La valeur de C_0 ne tient donc qu'au choix de notre définition de l'hyperbolicité au sens de Gromov, et n'a aucune signification profonde dans les arguments présentés ici.

Définissons maintenant une partie $U \subset X^6$, de la façon suivante : nous dirons que $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \notin U$ s'il existe $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, et des rayons r_i, r_j issus de x_i, x_j et passant par y_i, y_j respectivement, tels que r_i, r_j représentent le même point de $\partial_\infty X$, ou bien finissent au même sommet terminal de T , dans le cas où T est un arbre (heuristiquement, $(x_1, \dots, y_3) \in U$ si les segments orientés $[x_i, y_i]$ pointent dans trois directions deux à deux distinctes). Cela nécessite, en particulier, que $x_i \neq y_i$, pour tout i . Si $X = \mathbb{H}^2$, il y a alors un unique rayon (à la vitesse de parcours près) issu de x_i et passant par y_i ; la condition $(x_1, \dots, y_3) \in U$ exprime le fait que les bouts de ces trois rayons sont trois points deux à deux distincts de $\partial\mathbb{H}^2$. Dans le cas d'un arbre réel, nous pouvons aussi donner une condition équivalente :

Lemme 5.2.4 *Soit X un arbre réel connexe. Alors $(x_1, \dots, y_3) \in U$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, les points x_i, y_{i+1} et y_{i+2} (nous adoptons ici une notation cyclique pour les indices) sont situés dans la même composante connexe de $X \setminus \{y_i\}$.*

Preuve

Commençons par vérifier que $(x_1, \dots, y_3) \in U$ nécessite que y_1, y_2 et y_3 soient non alignés. Supposons que y_1, y_2 et y_3 sont trois points deux à deux distincts alignés (le cas où plusieurs d'entre eux sont confondus se traite de la même manière). Par exemple, prenons $y_2 \in [y_1, y_3]$. Si x_1, x_3 sont dans la même composante connexe de $X \setminus \{y_1, y_3\}$ que y_2 , et si x_2 n'est pas dans la même composante connexe que y_1 alors il existe des rayons r_1, r_2 issus de x_1, x_2 et passant par y_1, y_2 respectivement, tels que r_2 passe par y_1 , et tels que r_1, r_2 soient identiques à partir de leur passage en y_1 . Le point x_2 ne peut pas être dans plusieurs composantes connexes à la fois donc dans ce cas nous avons $(x_1, \dots, y_3) \notin U$. Supposons donc que x_1 et y_2 soient dans deux composantes distinctes de $X \setminus \{y_1\}$. Alors pour avoir $(x_1, \dots, y_3) \in U$ il faut que x_3 ne soit pas dans la même composante connexe de $X \setminus \{y_3\}$ que y_1 . Comme dans le cas précédent, on ne peut pas placer x_2 , ici encore, pour que $(x_1, \dots, y_3)$ soit dans U .

Pour avoir $(x_1, \dots, y_3) \in U$ il est donc nécessaire que y_1, y_2, y_3 forment un tripode non dégénéré. Si par exemple x_1 et y_2, y_3 sont dans deux composantes connexes distinctes de $X \setminus \{y_1\}$, alors : soit x_2 est dans la même composante de $X \setminus \{y_2\}$ que y_1, y_3 et dans ce cas on construit des rayons r_1, r_2 passant tous les deux par y_2 et identiques après leur passage en y_2 ; soit x_2 est dans une autre composante connexe de $X \setminus \{y_2\}$ que y_1, y_3 et alors on construit des rayons r_1, r_2 identiques à partir de leur passage en y_3 . Seul reste le cas où pour tout i , x_i est dans la même composante connexe de $X \setminus \{y_i\}$ que y_1, y_2 et dans ce cas, quels que soient les rayons r_i issus de x_i et passant par y_i , les trois rayons r_1, r_2 et r_3 quittent le tripode en les sommets respectifs y_1, y_2, y_3 et ne peuvent pas aller vers un même bout de l'arbre ou un même point de $\partial_\infty X$. $\square$

Lemme 5.2.5 *Si $(x_1, \dots, y_3) \in U$ et si r_i, r'_i sont des rayons issus de x_i et passant par y_i , alors $o(r_1, r_2, r_3) = o(r'_1, r'_2, r'_3)$.*

Nous posons $o(x_1, \dots, y_3) = o(r_1, r_2, r_3)$ dans ce cas.

Preuve

On a $x_i \neq y_i$ donc dans le cas où $X = \mathbb{H}^2$, il existe un unique rayon r_i issu de x_i et passant par y_i . Supposons maintenant que X est un arbre réel épais. D'après le lemme 5.2.4, y_1, y_2 et y_3 ne sont pas alignés ; soit donc y_0 tel que $[y_1, y_2] \cap [y_1, y_3] = [y_1, y_0]$. Alors y_1, y_2, y_3 définissent trois germes de rayons distincts issus de y_0 . Toujours d'après le lemme 5.2.4, la condition $(x_1, \dots, y_3) \in U$ entraîne que pour tout i , x_i est situé dans la composante connexe de $X \setminus \{y_i\}$ contenant y_0 . En particulier, tout rayon r issu de x_i et passant par y_i définit un unique rayon issu de y_0 et passant par y_i : il s'agit du rayon joignant y_0 à y_i , et qui continue ensuite comme le rayon r . Par conséquent, l'égalité $o(r_1, r_2, r_3) = o(r'_1, r'_2, r'_3)$ découle de la condition de cohérence sur l'ordre o de l'arbre réel épais considéré. $\square$

Lemme 5.2.6 *La fonction $o: U \rightarrow \{-1, 1\}$ ainsi définie est continue.*

Preuve

Si $X = \mathbb{H}^2$, il est élémentaire que la fonction $X^2 \setminus \Delta \rightarrow \partial X$ (où Δ désigne la diagonale) qui envoie (x, y) sur le bout du rayon issu de x et passant par y est continue (où $\partial X = \mathbb{S}^1$ est muni de la topologie usuelle), et donc $o: U \rightarrow \{-1, 1\}$ est simplement la composée de deux fonctions continues. Dans le cas où X est un arbre réel épais, la preuve est similaire à celle du lemme précédent. $\square$

Lemme 5.2.7 *Soient $x_1, \dots, y_3$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\sum_j d(x_i, y_j) < \sum_j d(y_i, y_j)$. Alors $(x_1, \dots, y_3) \in U$.*

Preuve

Supposons d'abord que X soit un arbre réel. D'après le lemme 5.2.4, si $(x_1, \dots, y_3) \notin U$, alors pour un certain i , soit x_i n'est pas dans la même composante de $X \setminus \{y_i\}$ que y_{i+1} et y_{i+2} et dans ce cas $\sum_j d(x_i, y_j) = \sum_j d(y_i, y_j) + 3d(x_i, y_i) > \sum_j d(y_i, y_j)$, soit y_i est dans le segment $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ et alors y_i réalise le minimum dans X de la fonction $x \mapsto d(x, y_1) + d(x, y_2) + d(x, y_3)$, de sorte que $\sum_j d(x_i, y_j) \geq \sum_j d(y_i, y_j)$.

Considérons maintenant le cas où X est le plan hyperbolique, et supposons que $x_i \neq y_i$ pour tout i , et que $(x_1, \dots, y_3) \notin U$. Supposons, par exemple, que les rayons $[x_1, y_1)$ et $[x_2, y_2)$ aient le même bout. Supposons aussi, par l'absurde, que $\sum_j d(x_i, y_j) < \sum_j d(y_i, y_j)$. Alors $d(x_1, y_1) + d(x_1, y_2) + d(x_1, y_3) < d(y_1, y_2) + d(y_1, y_3)$ donc $d(x_1, y_2) < d(y_1, y_2)$, et, de même, $d(x_2, y_1) < d(y_1, y_2)$. Ces inégalités étant strictes, nous pouvons bouger x_2 légèrement de sorte que les rayons $[x_1, y_1)$ et $[x_2, y_2)$ s'intersectent en un certain point $a \in \mathbb{H}^2$, tout en préservant les inégalités. En mettant a au centre du modèle du disque de Poincaré de $\mathbb{H}^2$, on voit bien que la condition $d(x_1, y_2) < d(y_1, y_2)$ implique que $d(a, y_1) < d(a, y_2)$. En effet, y_2 est plus proche de x_1 que de y_1 , et donc y_2 est situé dans le demi-plan hyperbolique déterminé par la médiatrice du segment $[x_1, y_1]$ et qui ne contient pas a , et ce demi-plan ne rencontre pas la boule $B(a, d(a, y_1))$. De même, nous avons $d(a, y_2) < d(a, y_1)$, d'où la contradiction. $\square$

En particulier, si $(x_1, x_2, x_3) \in V(C_0\delta(X))$ et si x_0 réalise le minimum de la fonction $x \mapsto d(x, x_1) + d(x, x_2) + d(x, x_3)$, alors nous avons $(x_0, x_0, x_0, x_1, x_2, x_3) \in U$. On pose $o(x_1, x_2, x_3) = o(x_0, \dots, x_3)$ dans ce cas.

Remarque 5.2.8 Soient $y_1, y_2, y_3 \in X$. Les hypothèses du lemme 5.2.7 étant des conditions convexes sur x_1, x_2 et x_3 , elles définissent des parties connexes de X . En particulier, d'après le lemme 5.2.6, si $(y_1, y_2, y_3) \in V(C_0\delta(X))$ et si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\sum_j d(x_i, y_j) < \sum_j d(y_i, y_j)$, alors on a $o(x_1, \dots, y_3) = o(y_1, y_2, y_3)$.

Remarque 5.2.9 Supposons que chacun des espaces X et X' soit le plan hyperbolique (muni d'une distance proportionnelle à la distance usuelle) ou un arbre réel, et soient $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x'_1, x'_2, x'_3 \in X'$. Supposons que $(x_1, x_2, x_3) \in V(C_0(\delta(X) + a) + b)$, $|\delta(X) - \delta(X')| < \varepsilon_1$, et $|d(x_i, x_j) - d(x'_i, x'_j)| < 2\varepsilon_2$ pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Alors on a $(x'_1, x'_2, x'_3) \in V(C_0(\delta(X') + a - \varepsilon_1) + b - 3\varepsilon_2)$.

Soit $(\rho, X) \in m_\Gamma^o(2) \cup \mathcal{T}^o(\Gamma)$, et soit $\varepsilon > 0$, $K = \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$, et soit P une partie finie, quelconque, de Γ . Supposons que $(\rho', X') \in U'_{K, \varepsilon, P}(\rho, X)$. Cela signifie (voir section 2.3) qu'il existe une famille $K' = \{x'_1, \dots, x'_p\} \subset X'$ telle que pour tous $g, h \in P$, et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ on ait

$$|d(\rho(g) \cdot x_i, \rho(h) \cdot x_j) - d'(\rho'(g) \cdot x'_i, \rho'(h) \cdot x'_j)| < \varepsilon \text{ et } |\delta(X) - \delta(X')| < \varepsilon.$$

Définition 5.2.10 Si $o(x_i, x_j, x_k) = o(x'_i, x'_j, x'_k)$ pour tous $i, j, k \in \{1, \dots, p\}$ tels que $(x_i, x_j, x_k) \in V(C_0(\delta(X) + \varepsilon) + 3\varepsilon)$, nous dirons que K et K' viennent dans le même ordre.

Remarquons que si $(x_i, x_j, x_k) \in V(C_0(\delta(X) + \varepsilon) + 3\varepsilon)$, alors $(x'_i, x'_j, x'_k) \in V(C_0\delta(X'))$ et donc $o(x'_i, x'_j, x'_k)$ est bien défini, de sorte que la définition 5.2.10 fait sens.

5.3 Topologie de Gromov équivariante orientée

Soit $(\rho, X) \in m_\Gamma^o(2) \cup \mathcal{T}^o(\Gamma)$, et soit $\varepsilon > 0$, $K = \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ et P une partie finie de Γ . Nous noterons $U''_{K, \varepsilon, P}(\rho, X)$ l'ensemble des $(\rho', X') \in m_\Gamma^o(2) \cup \mathcal{T}^o(\Gamma)$ tels qu'il

existe une famille $K' = \{x'_1, \dots, x'_p\} \subset X'$ telle que pour tous $g, h \in P$, et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ on ait

$$|d(\rho(g) \cdot x_i, \rho(h) \cdot x_j) - d'(\rho'(g) \cdot x'_i, \rho'(h) \cdot x'_j)| < \varepsilon \text{ et } |\delta(X) - \delta(X')| < \varepsilon,$$

et telle que K et K' viennent dans le même ordre.

Proposition 5.3.1 *Les ensembles $U''_{K,\varepsilon,P}(\rho, X)$ forment une base d'ouverts d'une topologie, que nous appellerons topologie de Gromov équivariante orientée.*

Preuve

Bien entendu, on a toujours $(\rho, X) \in U''_{K,\varepsilon,P}(\rho, X)$. Nous devons donc seulement vérifier que si $(\rho, X) \in U''_{K_1,\varepsilon_1,P_1}(\rho_1, X_1) \cap U''_{K_2,\varepsilon_2,P_2}(\rho_2, X_2)$ alors, pour certains $K, \mu > 0$ et P on a $U''_{K,\mu,P}(\rho, X) \subset U''_{K_1,\varepsilon_1,P_1}(\rho_1, X_1) \cap U''_{K_2,\varepsilon_2,P_2}(\rho_2, X_2)$. Il s'agit juste d'une vérification technique. Notons $K_1 = \{a'_1, \dots, a'_{n_1}\}$ et $K_2 = \{b'_1, \dots, b'_{n_2}\}$. Il existe donc une famille finie $K = \{a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2}\} \subset X$ telle que :

$$\forall i, j \leq n_1, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in P_1, |d_X(\rho(\gamma_1) \cdot a_i, \rho(\gamma_2) \cdot a_j) - d_{X_1}(\rho_1(\gamma_1) \cdot a'_i, \rho_1(\gamma_2) \cdot a'_j)| < \varepsilon_1,$$

$|\delta(X) - \delta(X_1)| < \varepsilon_1$, et telle que $o_{X_1}(a'_i, a'_j, a'_k) = o_X(a_i, a_j, a_k)$ pour tous i, j, k tels que $(a'_i, a'_j, a'_k) \in V(C_0(\delta(X_1) + \varepsilon_1) + 3\varepsilon_1)$; de même $o_{X_1}(b'_i, b'_j, b'_k) = o_X(b_i, b_j, b_k)$ pour tous i, j, k tels que $(b'_i, b'_j, b'_k) \in V(C_0(\delta(X_1) + \varepsilon_1) + 3\varepsilon_1)$. Vu que toutes ces inégalités strictes concernent des ensembles *finis*, elles peuvent toutes être améliorées, par un certain $\mu > 0$. Autrement dit,

$$|d_X(\rho(\gamma_1) \cdot a_i, \rho(\gamma_2) \cdot a_j) - d_{X_1}(\rho_1(\gamma_1) \cdot a'_i, \rho_1(\gamma_2) \cdot a'_j)| < \varepsilon_1 - \mu, \quad (5.1)$$

$$|\delta(X) - \delta(X_1)| < \varepsilon_1 - \mu, \quad (5.2)$$

et la condition $o_{X_1}(a'_i, a'_j, a'_k) = o_X(a_i, a_j, a_k)$ est vérifiée pour tout

$$(a'_i, a'_j, a'_k) \in V(C_0(\delta(X_1) + \varepsilon_1 + \mu) + 3\varepsilon_1 + 3\mu). \quad (5.3)$$

Maintenant, prenons $(\rho'', X'') \in U''_{K,\mu,P_1 \cup P_2}(\rho, X)$. Alors en particulier, pour tous $i, j \leq n_1$ et tous $\gamma_1, \gamma_2 \in P_1$,

$$|d_{X''}(\rho''(\gamma_1) \cdot a''_i, \rho''(\gamma_2) \cdot a''_j) - d_X(\rho(\gamma_1) \cdot a_i, \rho(\gamma_2) \cdot a_j)| < \mu, \quad (5.4)$$

$|\delta(X) - \delta(X'')| < \mu$, et pour tous i, j, k tels que $(a_i, a_j, a_k) \in V(C_0(\delta(X) + \mu) + 3\mu)$, $o_X(a_i, a_j, a_k) = o_{X''}(a''_i, a''_j, a''_k)$. Maintenant, les conditions (5.1) et (5.4) entraînent que pour tous $i, j \leq n_1$ et tous $\gamma_1, \gamma_2 \in P_1$,

$$|d_{X''}(\rho''(\gamma_1) \cdot a''_i, \rho''(\gamma_2) \cdot a''_j) - d_{X_1}(\rho_1(\gamma_1) \cdot a'_i, \rho_1(\gamma_2) \cdot a'_j)| < \varepsilon_1,$$

et, d'après la remarque 5.2.9, les conditions (5.1), (5.2) et (5.3) entraînent que

$$(a_i, a_j, a_k) \in V(C_0(\delta(X) + 2\mu) + \frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{9}{2}\mu) \subset V(C_0(\delta(X) + \mu) + 3\mu),$$

de sorte que $o_{X''}(a''_i, a''_j, a''_k) = o_X(a_i, a_j, a_k) = o_{X_1}(a'_i, a'_j, a'_k)$. Nous obtenons ainsi que $(\rho'', X'') \in U''_{K_1,\varepsilon_1,P_1}(\rho_1, X_1)$, et, de la même manière, $(\rho'', X'') \in U''_{K_2,\varepsilon_2,P_2}(\rho_2, X_2)$. $\square$

Proposition 5.3.2 *La topologie de Gromov équivariante orientée coïncide avec la topologie usuelle sur $m_\Gamma^o(2)$.*

Preuve

C'est la même preuve que celle de la proposition 6.2 de F. Paulin [Pau88], avec très peu de modifications. Dans cette preuve (reprise ici, comme proposition 2.3.1), la seule différence est que l'isométrie ϕ de la proposition 1.1.8, est maintenant une isométrie préservant l'orientation. $\square$

Naturellement, nous désignerons par $\overline{m_\Gamma^o(2)}$ l'adhérence de $m_\Gamma^o(2)$ dans $m_\Gamma^o(2) \cup \mathcal{T}^o(\Gamma)$, muni de cette topologie.

Nous écrirons aussi $\overline{m_\Gamma^u} = \overline{m_\Gamma^u(2)}$ et $\overline{m_\Gamma^o} = \overline{m_\Gamma^o(2)}$.

5.4 L'espace $\overline{m_\Gamma^o}$ est compact

Notons $\pi : \overline{m_\Gamma^o} \rightarrow \overline{m_\Gamma^u}$ la fonction naturelle qui consiste à oublier l'orientation.

Proposition 5.4.1 *L'application π est continue, et ses fibres sont compactes.*

Preuve

D'abord, la continuité de π résulte directement de la définition des deux topologies.

Maintenant, soit $(\rho, T) \in \overline{m_\Gamma^u}$. Si T est $\mathbb{H}^2$, alors la fibre $\pi^{-1}(\rho, T)$ est de cardinal 2 dans l'espace séparé m_Γ^o (d'après le théorème 2.2.3), donc est compacte. Supposons donc que T soit un arbre réel.

Par définition, l'ensemble $\pi^{-1}(\rho, T)$ est une partie de O_T . Par définition des ensembles $U''_{K,\varepsilon,P}(\rho, T)$, la topologie induite sur $\pi^{-1}(\rho, T)$ dans O_T coïncide avec la topologie de Gromov équivariante orientée (dans chacune de ces deux topologies, les ouverts sont définis par des égalités de o sur des parties finies de $Trip(T)$).

Remarquons maintenant que $\overline{m_\Gamma^o}$ est séparé. En effet, si (ρ, X, o) et (ρ', X', o') sont distincts et ne sont pas séparés par des ouverts, alors $\delta(X) = \delta(X')$. L'ouvert m_Γ^o étant séparé, cela nécessite que X et X' soient des arbres. Vu que l'application $\pi : \overline{m_\Gamma^o} \rightarrow \overline{m_\Gamma^u}$ est continue, cela nécessite encore que ces deux espaces ne diffèrent que par l'ordre : mais d'après la définition de la topologie de Gromov équivariante orientée, il y a deux ouverts qui séparent (ρ, X, o) et (ρ', X', o') .

Par conséquent, il nous suffit de montrer que $\pi^{-1}(\rho, T)$ est fermé dans O_T . Soit E''_T l'ensemble des ordres $o : (\partial T)^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ qui satisfont les hypothèses de la définition 1.3.1, et qui sont invariants par ρ . Ce sont là des conditions fermées, donc E''_T est fermé dans $f(O_T)$. Par définition, $E''_T \subset \mathcal{T}(\Gamma)^o$, et $\overline{m_\Gamma^o} \cap \mathcal{T}(\Gamma)^o$ est fermé dans $\mathcal{T}(\Gamma)^o$, ainsi $\pi^{-1}(\rho, T)$ est fermé dans E''_T . Il en résulte que $\pi^{-1}(\rho, T)$ est fermé dans un compact, et est donc compact. $\square$

Théorème 5.4.2 *L'espace $\overline{m_\Gamma^o}$ est séquentiellement compact.*

Preuve

Soit $(\rho_n, X_n) \in \overline{m_\Gamma^o}$ une suite d'actions. Quitte à extraire, $\pi(\rho_n, X_n)$ converge vers une certaine action $(\rho_\infty, X_\infty) \in \overline{m_\Gamma}$. Si $X_\infty = \mathbb{H}^2$, alors il découle de la proposition 5.3.2

que X est muni d'une orientation, compatible avec la convergence d'une sous-suite. Nous n'avons donc qu'à montrer que si X_∞ est un arbre réel (notons $(\rho, T) = (\rho_\infty, X_\infty)$ dans ce cas) alors il existe un ordre cohérent $o: (\partial_\infty T)^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ qui vérifie les hypothèses de la définition 1.3.1, qui est stable sous l'action de Γ , et tel que (ρ, T) , muni de cet ordre, est en effet la limite, dans $\overline{m}_\Gamma^o$, d'une sous-suite de (ρ_n, X_n) .

Considérons maintenant une suite croissante $T_k \subset T$ de sous-arbres connexes, finis et fermés de T , tels que $\bigcup_k T_k = T$. Supposons, pour simplifier, que T_1 soit un singleton $\{x_0\}$. Pour tous $k \geq 1$, $N \geq 0$, notons $F_{k,N}$ la partie finie de T_k qui consiste en toutes les extrémités de T_k , ainsi que tous les points de T_k dont la distance à x_0 est un multiple de $\frac{1}{2^N}$. Pour tous k, N et $\varepsilon > 0$, et pour toute partie finie P de Γ , pour n assez grand, il existe une approximation P -équivariante entre $F_{k,N}$ et une partie finie K_n de X_n . Désignons par $O_{k,N,\varepsilon,P}$ l'ensemble des fonctions $o \in O_T$ telles qu'il existe une telle approximation, telle que pour tous $x_1, x_2, x_3 \in F_{k,N}$ avec $(x_1, x_2, x_3) \in V\left((C_0 + 3\varepsilon) + \frac{1}{2^N}\right)$, et pour tous $x'_1, x'_2, x'_3 \in K_n$ qui leur correspondent, on ait $o(\text{Trip}(x_1, x_2, x_3)) = o(x'_1, x'_2, x'_3)$ (notons que ceci est bien défini, grâce à la remarque 5.2.8).

Nous divisons la fin de la preuve en les deux lemmes suivants :

Lemme 5.4.3 *Pour tous k, N, ε, P , l'ensemble $O_{k,N,\varepsilon,P}$ est fermé, non vide. De plus, si $k > k', N > N', \varepsilon < \varepsilon'$ et $P' \subset P$, alors $O_{k,N,\varepsilon,P} \subset O_{k',N',\varepsilon',P'}$.*

Par compacité de E'_T , il en découle que $\bigcap_{k,N,\varepsilon,P} O_{k,N,\varepsilon,P} \neq \emptyset$.

Lemme 5.4.4 *Soit $o \in \bigcap_{k,N,\varepsilon,P} O_{k,N,\varepsilon,P}$. Alors o satisfait les hypothèses de la définition 1.3.1. Ainsi, o définit un ordre total cyclique cohérent. De plus, il est stable sous l'action de Γ , et l'élément (ρ, T) , muni de l'orientation o , est la limite, dans $\overline{m}_\Gamma^o$, d'une sous-suite de (ρ_n, X_n) .*

□

Preuve du lemme 5.4.3.

Il découle de la définition que $O_{k,N,\varepsilon,P} \subset O_{k',N',\varepsilon',P'}$ si $k > k', \varepsilon < \varepsilon'$ et $P' \subset P$.

Les hypothèses concernent seulement $\text{Trip}(T_k)$, qui est une partie finie de $\text{Trip}(T)$, et donc $O_{k,N,\varepsilon,P}$ est fermé. Nous voulons montrer qu'il est aussi non vide. Quitte à se restreindre à un sous-ensemble, nous pouvons supposer ε suffisamment petit et N suffisamment grand pour que pour tout triplet u_1, u_2, u_3 de points de branchement non-alignés de T_k , on ait $(u_1, u_2, u_3) \in V\left((C_0 + 3)\varepsilon + \frac{1}{2^N}\right)$. Choisissons une ε -approximation (non orientée) entre $E_{k,N}$ et $K_n \subset X_n$ (elle existe, puisque $\pi(\rho_n, X_n) \rightarrow (\rho, T)$ dans $\overline{m}_\Gamma^u$). Pour tout tripode $\text{Trip}(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \text{Trip}(T_k)$ (où a_0 désigne le centre du tripode), la seule obstruction à définir $o(\text{Trip}(a_0, a_1, a_2, a_3)) \in \{-1, 1\}$ en accord avec K_n , serait qu'il existe deux représentants (a_0, a_1, a_2, a_3) et (a_0, b_1, b_2, b_3) de cette même classe de tripodes, tels que les triplets (a_1, a_2, a_3) et (b'_1, b'_2, b'_3) soient dans $V\left((C_0 + 3)\varepsilon + \frac{1}{2^N}\right)$,

et que $o_{X_n}(a'_1, a'_2, a'_3) = 1 = -o_{X_n}(b'_1, b'_2, b'_3)$. Il nous faut donc montrer que ceci est impossible. L'hypothèse $(u_1, u_2, u_3) \in V\left((C_0 + 3)\varepsilon + \frac{1}{2N}\right)$ pour tous les points de branchement non alignés de T_k , entraîne qu'il est possible de passer du triplet (a_1, a_2, a_3) au triplet (b_1, b_2, b_3) par une séquence de mouvements consistant à remplacer a_1 , a_2 ou a_3 par un de ses voisins les plus proches dans T_k , sans quitter $V\left((C_0 + 3)\varepsilon + \frac{1}{2N}\right)$. En particulier, nous pouvons supposer que $(b_1, b_2, b_3) = (b_1, a_2, a_3)$ et $d_T(a_1, b_1) \leq \frac{1}{2N}$. Cela entraîne que $d_{X_n}(a'_1, b'_1) < \varepsilon + \frac{1}{2N}$. Prenons $a'(t) \in [a'_1, b'_1]$, avec $a'(0) = a'_1$ et $a'(1) = b'_1$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, et toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, on a $d(a'_i, a'_j) + d(a'_j, a'_k) - d(a'_i, a'_k) > 2\left(\left((C_0 + 3)\varepsilon + \frac{1}{2N}\right) - 3\varepsilon - \frac{1}{2N}\right)$, de sorte que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(a'(t), a'_2, a'_3) \in V(C_0\delta(X))$. Il découle de la continuité de l'ordre (et plus précisément, des lemmes 5.2.1 et 5.2.6) que $o_{X_n}(a'_1, a'_2, a'_3) = o_{X_n}(b'_1, a'_2, a'_3)$. $\square$

Preuve du lemme 5.4.4.

Vue la définition des $O_{k,N,\varepsilon,P}$, nous savons déjà que notre ordre $o : (\partial_\infty T)^3 \rightarrow \{-1, 1\}$ définit une orientation, c'est-à-dire qu'il est cohérent, et satisfait les deux premières hypothèses de la définition 1.3.1. On montre la troisième, ainsi que l'invariance de o sous l'action de Γ , en prenant un sous-arbre assez grand T_k de T contenant les points de branchement voulus, et en dérivant ces propriétés pour o , des propriétés correspondantes pour o_{X_n} , qui sont supposées parce que $(\rho_n, X_n) \in \overline{m_\Gamma^O}$. Nous faisons, à titre d'exemple, la preuve que o vérifie la troisième hypothèse de la définition 1.3.1 ; la preuve de l'invariance est similaire. Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \partial_\infty T$ tels que $o(x_1, x_2, x_3) = o(x_1, x_3, x_4) = 1$; nous voulons prouver que $o(x_1, x_2, x_4) = 1$. Soient k et N suffisamment grands pour que T_k contienne cinq points $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in F_{k,N}$ tels que pour tout triplet i, j, k d'éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4\}$, on ait $(a_0, a_0, a_0, a_i, a_j, a_k) \in U$ dans T_k , et tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, le rayon issu de a_0 et passant par x_i passe aussi par a_i , et tels que $a_0 \in \text{Conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ (de tels points existent effectivement dans T). Alors, pour toute ε -approximation entre $F_{k,N}$ et $K_n \subset X_n$, avec ε assez petit, on a $(a'_0, a'_0, a'_0, a'_i, a'_j, a'_k) \in U$ dans X_n , et alors l'égalité $o(x_1, x_2, x_4) = 1$ découle effectivement du fait que o_{X_n} satisfait la troisième hypothèse de la définition 1.3.1.

Nous devons encore montrer que (ρ, T) , muni de o , est la limite, dans $\overline{m_\Gamma^O}$, d'une sous-suite de (ρ_n, X_n) , mais ceci est vrai par définition (simplement, en prenant ε' tel que $(C_0 + 3)\varepsilon < (C_0 + 3)\varepsilon' + \frac{1}{N}$). $\square$

Corollaire 5.4.5 *L'application $\pi : \overline{m_\Gamma^O} \rightarrow \overline{m_\Gamma^U}$ est surjective.*

Preuve

Bien entendu, $m_\Gamma^O \rightarrow m_\Gamma^U$ est surjective. Ensuite, soit $T \in \partial \overline{m_\Gamma^U}$, et $\rho_n \in m_\Gamma^O$ tels que $\pi(\rho_n)$ converge vers T . Alors ρ admet une sous-suite qui converge vers un certain ρ_∞ , et par continuité de π on a $\pi(\rho_\infty) = T$. $\square$

Théorème 5.4.6 *L'espace $\overline{m}_\Gamma^o$, muni de la fonction $m_\Gamma^o \hookrightarrow \overline{m}_\Gamma^o$, est une compactification naturelle de m_Γ^o .*

Ici encore, par “naturelle”, nous entendons que l'action de $Out(\Gamma)$ sur m_Γ^o s'étend continûment en une action de $Out(\Gamma)$ sur $\overline{m}_\Gamma^o$.

Preuve

Vu que m_Γ^o est un ouvert dense de $\overline{m}_\Gamma^o$ et que, par définition de la topologie de Gromov équivariante avec orientation, l'action de $Out(\Gamma)$ sur $\overline{m}_\Gamma^o$ est continue, il suffit de montrer que l'espace $\overline{m}_\Gamma^o$ est compact.

Comme dans les travaux de M. Bestvina et de F. Paulin ([Bes88, Pau88, Pau04]), on pourrait montrer que l'espace $\overline{m}_\Gamma^o$ est normal (ou *régulier*, au sens de la séparation) et à base dénombrable, de sorte qu'il est métrisable, d'après le théorème d'Urysohn. Mais ici, la compacité des fibres va nous suffire.

L'application $\pi: \overline{m}_\Gamma^o \rightarrow \overline{m}_\Gamma^u$ est surjective, et ses fibres sont compactes. L'espace $\overline{m}_\Gamma^o$ est séquentiellement compact, et l'espace $\overline{m}_\Gamma^u$ est compact. C'est alors un exercice agréable de topologie générale, que de constater que de ces conditions, découle la quasi-compacité de $\overline{m}_\Gamma^o$. Puis, comme nous l'avons signalé un peu plus haut, l'espace $\overline{m}_\Gamma^o$ est séparé, de sorte qu'il est compact. $\square$

Remarque 5.4.7 *D'après [Bou71], page 59, un espace est compact si et seulement si tout ultrafiltre, dans cet espace, possède une unique limite. En copiant la preuve du théorème 5.4.2, tout en considérant un ultrafiltre sur $\overline{m}_g^o$ au lieu d'une suite dans cet espace, on montre directement que l'espace $\overline{m}_g^o$ est compact, et pas seulement séquentiellement compact. On obtient ainsi une preuve un peu plus concise (voir [Wol]), mais un peu moins élémentaire, de la compacité de $\overline{m}_g^o$.*

5.5 L'espace $\overline{m}_g^o$ admet $4g - 3$ composantes connexes

Nous allons maintenant nous concentrer sur le cas où $\Gamma = \pi_1 \Sigma_g$. On note $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\pi_1 \Sigma_g)$, et $\mathcal{T}^o = \mathcal{T}(\pi_1 \Sigma_g)^o$. Si $(\rho, T) \in \mathcal{T}^o$, l'ensemble $\partial_\infty T$ est muni d'un ordre cyclique total, stable sous l'action de $\pi_1 \Sigma$, par conséquent il admet une classe d'Euler, définie au chapitre 1.3. Remarquons que si T est une droite, alors il résulte de la définition de la classe d'Euler que $e(\rho, T) = 0$.

Théorème 5.5.1 *La classe d'Euler $e: \overline{m}_g^o \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction continue.*

Cette preuve va utiliser les résultats techniques établis dans la section 1.3.2 concernant le calcul de la classe d'Euler ; nous allons réutiliser ici les notations introduites dans cette section.

Preuve

D'abord, l'ensemble $m_g^o = \{(\rho, X) | \delta(X) \neq 0\}$ est ouvert dans $\overline{m}_g^o$, et, par exemple d'après la formule 1.1, e est continue sur m_g^o .

Prenons maintenant un élément $(\rho_T, T) \in \overline{m}_g^o \setminus m_g^o$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage de T , au sens de la topologie de Gromov équivariante orientée, qui consiste uniquement en représentations de même classe d'Euler que T . Supposons d'abord que T ne soit pas réduit à une droite, de sorte que T admette au moins trois bouts (il en admet

alors une infinité). Prenons $x, y \in \partial_\infty T$, tels que $x \notin P_{ref} \cdot y$. Nous pouvons supposer que $\text{Card}(P_{ref} \cdot y) \geq 2$; autrement $\pi_1 \Sigma_g$ fixerait tous les bouts de T , et par minimalité, T serait réduit à un point ou à une droite.

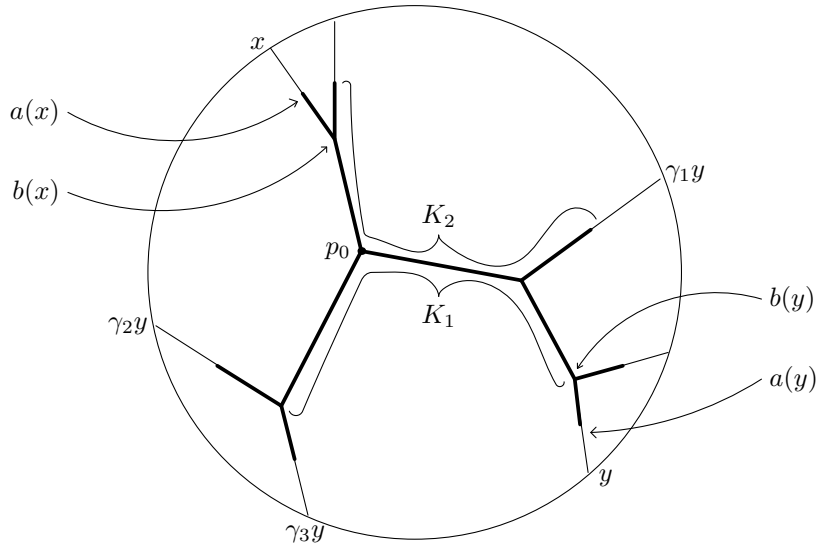
Tout triplet $\{a, b, c\}$ d'éléments deux à deux distincts de $P_{ref} \cdot \{x, y\}$ détermine une unique classe de tripodes dans T ; nous désignerons par P_{abc} le centre de ce tripode. Soit K_1 l'enveloppe convexe

$$K_1 = \text{Conv} \left\{ P_{abc} \mid (a, b, c) \in (P_{ref} \cdot \{x, y\})^3, \text{Card}\{a, b, c\} = 3 \right\}.$$

Posons $d_T = \max\{d(p, \gamma p) \mid p \in K_1, \gamma \in P_{ref}\}$ et soit d_{K_1} le diamètre de K_1 . Aussi, pour tout triplet non-dégénéré $\{a, b, c\} \subset P_{ref} \cdot \{x, y\}$, soit $P_{abc}^a \subset]a, b[\cap]a, c[$ tel que $d(P_{abc}^a, P_{abc}) = L$, avec $L > 9d_T + 3d_{K_1}$, et soit K_2 l'enveloppe convexe

$$K_2 = \text{Conv} \left\{ P_{abc}^a \mid (a, b, c) \in (P_{ref} \cdot \{x, y\})^3, \text{Card}\{a, b, c\} = 3 \right\}.$$

Enfin, fixons un point $p_0 \in K_1$.



Soit $a(x) = \bigcap_{p \in K_2} [p, x[$. C'est le point de K_2 "le plus proche de x ". Et soit $b(x)$ le projeté de $a(x)$ sur K_1 . On définit de même $a(y)$ et $b(y)$. On pose $K = \{p_0, a(x), b(x), a(y), b(y)\}$ et on considère $(\rho, X) \in U''_{K, \frac{d_T}{C_0+3}, P_{ref}}(\rho_T, T)$. Nous allons prouver que (ρ_T, T) et (ρ, X) ont la même classe d'Euler, en utilisant la proposition 1.3.18. Dans l'espace X , notons $p'_0, a'(y), b'(y), a'(x), b'(x)$ les points correspondants. Notons $x' \in \partial_\infty X$ le bout d'un rayon (quelconque) $[b'(x), a'(x))$ et $y' \in \partial_\infty X$ le bout d'un rayon $[b'(y), a'(y))$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in P_{ref}$ tels que $o(\gamma_1 x, \gamma_2 x, \gamma_3 y) = 1$. Nous voulons montrer que $o(\gamma_1 x', \gamma_2 x', \gamma_3 y') = 1$. Pour cela, nous allons prouver les trois égalités suivantes :

$$o(\gamma_1 x, \gamma_2 x, \gamma_3 y) = o(\gamma_1 a(x), \gamma_2 a(x), \gamma_3 a(y)), \quad (5.5)$$

$$o(\gamma_1 x', \gamma_2 x', \gamma_3 y') = o(\gamma_1 a'(x), \gamma_2 a'(x), \gamma_3 a'(y)), \quad (5.6)$$

$$o(\gamma_1 a(x), \gamma_2 a(x), \gamma_3 a(y)) = o(\gamma_1 a'(x), \gamma_2 a'(x), \gamma_3 a'(y)). \quad (5.7)$$

On vérifie que pour tout $\gamma \in P_{ref}$, $L - d_T \leq d(\gamma a(y), K_1) \leq L + d_T$, et le centre du tripode déterminé par $\gamma_1 a(x)$, $\gamma_2 a(x)$ et $\gamma_3 a(y)$ est dans K_1 , ainsi

$$(\gamma_1 a(x), \gamma_2 a(x), \gamma_3 a(y)) \in V(8d_T + 3d_{K_1}) \subset V(d_T),$$

de sorte que tous les termes des équations (5.5), (5.6) et (5.7) sont bien définis, et l'équation (5.7) est satisfaite. Notons $p_1 = \gamma_1 a(x)$, $p'_1 = \gamma_1 a'(x)$, $\dots$, $p_3 = \gamma_3 a(y)$, $p'_3 = \gamma_3 a'(y)$. Alors, $d_X(p'_0, p'_i) < d_{K_1} + L + d_T + \frac{d_T}{C_0+3}$, et $d_X(p'_i, p'_j) > 2L - 2d_T - \frac{d_T}{C_0+3}$, de sorte que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\sum_j d_X(p'_0, p'_j) < \sum_j d_X(p'_i, p'_j)$. Ces inégalités sont encore plus fines dans T , et d'après le lemme 5.2.7 et la remarque 5.2.8, les égalités (5.5) et (5.6) sont satisfaites. De même, si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in P_{ref}$ sont tels que $o(\gamma_1 x, \gamma_2 y, \gamma_3 y) \neq 0$ alors $o(\gamma_1 x', \gamma_2 y', \gamma_3 y') = o(\gamma_1 x, \gamma_2 y, \gamma_3 y)$, de sorte que les hypothèses de la proposition 1.3.18 sont satisfaites. Ceci termine la preuve dans le cas où T n'est pas une droite.

Maintenant, supposons que T soit une droite. Nous voulons montrer qu'il existe un voisinage de T qui consiste uniquement en représentations de classe d'Euler nulle.

Lemme 5.5.2 *Il existe un voisinage V' de T dans lequel tout arbre réel épais est de classe d'Euler nulle.*

Ce lemme implique le théorème, pour la raison suivante. Comme nous l'avons vu dans la proposition 3.2.2, les espaces $e^{-1}(k)$ ont un bout. Par conséquent, leurs bords $\overline{\partial e^{-1}(k)}$, dans $\overline{m_g^o}$, sont connexes. On montre aisément qu'au bord de chaque composante connexe de m_g^o , il existe des arbres qui ne sont pas réduits à une droite. Supposons maintenant, par l'absurde, qu'il existe une droite au bord de $e^{-1}(k)$, avec $k \neq 0$. Alors, par connexité, il existe une telle droite dans $\overline{\partial e^{-1}(k)}$ telle que dans tous ses voisinages (au sens de la topologie de Gromov équivariante avec orientation), il existe des arbres qui ne sont pas des droites. Mais la première étape de cette preuve s'applique donc à ces arbres, qui doivent donc être de classe d'Euler k , ce qui contredit le lemme 5.5.2. $\square$

Preuve du lemme 5.5.2.

Quitte à lui ajouter des éléments, nous allons supposer ici que la partie P_{ref} contient S et qu'elle est symétrique. Soit (ρ, T) une droite, telle que $\min_{x_0 \in T} \max_{\gamma \in S} d(x_0, \gamma \cdot x_0) = 1$. Prenons un $x_0 \in T$ comme dans l'égalité ci-dessus. Soit d_1 la plus grande distance entre x_0 et γx_0 , pour tout $\gamma \in P_{ref}$. Considérons les points x_1, x_2, y_1, y_2 de T où x_i, y_i sont du même côté de x_0 , tels que $d(x_0, y_i) = d_1 + 4$ et $d(x_0, x_i) = 2d_1 + 6$. Soit K la partie finie de T qui consiste en x_1, x_2, y_1, y_2 et $P_{ref} \cdot x_0$. Soit $(\rho', X') \in U''_{K, \frac{1}{6}, P_{ref}}(\rho, T)$, nous allons montrer que $e(\rho', T') = 0$. Si T' est une droite, alors il n'y a rien à faire. Sinon, pour tout point $p'_i \in K'$ approximant K , notons p''_i sa projection sur le segment $[x'_1, x'_2]$. Cela définit une nouvelle approximation, qui réalise (ρ', T') comme un élément de $U''_{K, 1, P_{ref}}(\rho, T)$, et où K'' est contenu dans un segment. Soit r le bout d'un rayon issu de x''_0 et quittant le segment $[x'_1, x'_2]$ en un point p_0 à distance au plus 2 de x''_0 (un tel rayon existe, vu que $\max_{\gamma \in S} d(x''_0, \gamma \cdot x''_0) < 2$). Pour tout $\gamma \in P_{ref}$, $d(\gamma \cdot p_0, x''_0) < d_1 + 3$, et donc le segment $[x'_1, x'_2] \cap \text{Conv}(P_{ref} \cdot p_0)$ est inclus, strictement (de chaque côté), dans le segment $[y''_1, y''_2]$. De même, pour tout $\gamma \in P_{ref}$, $[y''_1, y''_2] \subset [\gamma \cdot x'_1, \gamma \cdot x'_2]$. Pour $i = 1, 2$, soit U_i l'ensemble des bouts de rayons issus de x''_0 et passant par x'_i , et soit U'_2 l'ensemble des bouts de

rayons issus de x_0'' et passant par y_i'' . Alors P_{ref} envoie $U_1 \cup U_2$ sur une partie de $U_1' \cup U_2'$. Il découle alors de la condition de cohérence sur l'ordre de T' que pour tous $x \in U_1'$, $y \in U_2'$, $o(r, x, y) \in \{-1, 1\}$ est constant. Supposons par exemple que $o(r, x, y) = 1$ pour tous $x \in U_1'$, $y \in U_2'$. Pour tout $\gamma \in P_{ref}$, la situation est donc la suivante.

- Si γ envoie U_1 sur une partie de U_1' , et U_2 sur une partie de U_2' (ou de façon équivalente, si $\rho(\gamma)$ préserve l'orientation de T), alors $o(\gamma \cdot r, x, y) = 1$ pour tous $x \in U_1'$, $y \in U_2'$. Notons A l'ensemble formé par ces bouts $\gamma \cdot r$.
- Si γ envoie U_1 sur une partie de U_2' , et U_2 sur une partie de U_1' (ou de façon équivalente, si $\rho(\gamma)$ renverse l'orientation de T), alors $o(\gamma \cdot r, x, y) = -1$ pour tous $x \in U_1'$, $y \in U_2'$. Notons B l'ensemble de tels bouts $\gamma \cdot r$.

Munissons maintenant l'ensemble $\{a, u_1, b, u_2\}$, de l'ordre cyclique dans lequel on les a écrits ici. Notons h la bijection, préservant l'ordre, qui échange a avec b et u_1 avec u_2 . Nous pouvons alors considérer la représentation $\pi_1 \Sigma_g \rightarrow \{1, h\}$ sur cet ensemble orienté, définie comme suit : si $\gamma \in \pi_1 \Sigma_g$ préserve l'orientation de la droite T alors on l'envoie sur 1, et sinon on l'envoie sur h . Bien entendu, cette action est de classe d'Euler nulle, et il découle maintenant de la proposition 1.3.18, qui s'applique ici, que $e(\rho', T') = 0$. $\square$

5.6 Arbres réels non-orientables

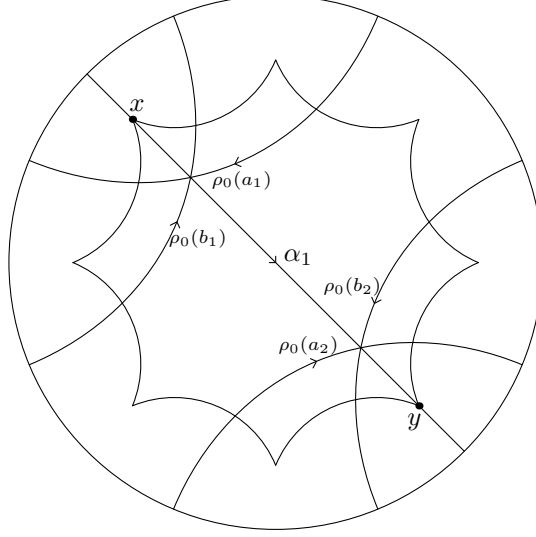
Nous allons maintenant constater que l'existence d'une orientation préservée sur un arbre réel est une condition effectivement restrictive. En particulier :

Proposition 5.6.1 *Soit $g \geq 3$. Alors l'inclusion $\overline{\partial m_g^u(2)} \subset \overline{\partial m_g^u(3)}$ est stricte.*

Preuve

Bien entendu, tout plongement isométrique de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{H}^3$ donne lieu à un plongement $m_g^u(2) \subset m_g^u(3)$ de sorte que $\overline{\partial m_g^u(2)} \subset \overline{\partial m_g^u(3)}$. Pour prouver que cette inclusion est stricte, nous allons montrer qu'il existe un élément $(T, \rho_\infty) \in \overline{\partial m_g^u(3)}$ tel qu'aucune orientation de T ne soit préservée par ρ_∞ . Vu que l'application $\pi : \overline{m_g^o(2)} \rightarrow \overline{m_g^u(2)}$ est surjective, cela implique que $(T, \rho_\infty) \notin \overline{\partial m_g^u(2)}$.

Commençons par reprendre la réalisation “aussi symétrique que possible” de $\pi_1\Sigma_2$ comme groupe fuchsien (voir la section 1.2), $\rho_0: \pi_1\Sigma_2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$.



Notons $\rho_0(a_1), \dots, \rho_0(b_2) \in PSL(2, \mathbb{R})$ les isométries hyperboliques suggérées sur le dessin ci-dessus. L'élément $\alpha_1 = \rho_0(a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2)$ est hyperbolique, d'axe (x, y) représenté ci-dessus (en effet, $\alpha_1 \cdot x = y$, et si $\vec{u}$ est le vecteur tangent unitaire en x pointant vers y , les angles de $\vec{u}$ et de ses images successives avec les arêtes de l'octogone permettent de vérifier que l'image de $\vec{u}$ est encore un vecteur porté par l'axe (x, y) , pointant en direction opposée de x). Remarquons que α_1 est représenté par une courbe simple non séparante sur la surface Σ_2 (par exemple, l'isométrie $\rho_0(a_1)$ identifie deux points du bord du domaine fondamental représenté dans la figure ci-dessus ; ces deux points sont de part et d'autre de l'axe de α_1 ; autrement dit : l'axe de $\rho_0(a_1)$ détermine une courbe fermée simple sur la surface, qui intersecte exactement une fois, de façon transverse, l'axe de α_1 , donc celui-ci définit une courbe non séparante). On peut donc le compléter en $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ représenté par un système de courbes sur Σ_2 , avec $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \rho_0(\pi_1\Sigma_2)$. Définissons alors $\rho_n: \pi_1\Sigma_2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ par les formules $\rho_n(a_i) = \alpha_i$, $\rho_n(b_2) = \beta_2$, $\rho_n(b_1) = \beta_1\alpha_1^n$, pour tout $n \geq 1$. Alors ρ_n est fidèle et discrète, et, en tant que sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$, on a $Im(\rho_n) = Im(\rho_0)$. Vu que ρ_0 est purement hyperbolique (i.e., tous les éléments de $\pi_1\Sigma_2 \setminus \{1\}$ ont pour image un élément hyperbolique), les éléments $\alpha_1, \beta_1 \in Hyp$ ne partagent pas de points fixes sur $\partial\mathbb{H}^2$. Donc $Tr(\beta_1\alpha_1^n) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Notons maintenant $S \in Isom(\mathbb{H}^2)$ l'inversion par rapport à l'axe (x, y) (c'est-à-dire la réflexion dont l'axe est celui de α_1).

Nous définissons maintenant $h_n: \pi_1\Sigma_g \rightarrow Isom^+(\mathbb{H}^3)$, pour tout $g \geq 3$, de la façon suivante. On se donne un plongement isométrique $i: \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^3$; cela détermine une injection $PSL(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Toute réflexion dans $\mathbb{H}^2$ peut alors être réalisée comme une rotation dans $\mathbb{H}^3$, et nous noterons encore $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ et S les éléments de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ correspondants. On pose $h_n(a_i) = \rho_n(a_i)$ et $h_n(b_i) = \rho_n(b_i)$ pour $i = 1, 2$, et on pose $h_n(a_i) = h_n(b_i) = S$ pour $3 \leq i \leq g$.

Nous avons bien $h_n \in R_g(3)$, et $h_n(b_1)$ est un élément hyperbolique dont la distance de translation tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(h_n) = +\infty$; il existe

donc un point d'accumulation $(T, h_\infty) \in \overline{\partial m_g^u(3)}$ de cette suite de représentations. Nous affirmons qu'aucune orientation de T n'est préservée par ρ_∞ . Pour cela il suffit de trouver un tripode non dégénéré $Trip(a, b, c, d) \subset T$, de point central a , et un élément $\gamma \in \pi_1 \Sigma_g$, tels que $\gamma(a) = a$, $\gamma(b) = b$, $\gamma(c) = d$ et $\gamma(d) = c$.

Remarquons que si $A, B \in Hyp$ n'ont pas de points fixes communs dans $\partial \mathbb{H}^2$, alors le point fixe attracteur de AB^n tend, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers celui de B , tandis que le point fixe répulsif de AB^n tend vers la préimage, par A , de celui de B . Ainsi, l'axe de $\rho_n(b_1)$ converge vers une géodésique de $\mathbb{H}^2$. Vu que les images $\rho_n(\gamma)$ des autres générateurs $\gamma \in \{a_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\}$ sont fixées, il existe une suite $(x_0^n)_n \in (\mathbb{H}^2)^\mathbb{N}$ convergeante vers un point $x_\infty \in \mathbb{H}^2$, telle que pour tout n , $x_0^n \in \min(\rho_n)$ et $i(x_0^n) \in \min(h_n)$. Alors $d(i(x_0^n), h_n(a_3) \cdot i(x_0^n))$ est bornée. De plus, $h_n(b_1^{-1}) = \alpha_1^{-n} \beta_1^{-1}$. Vu que l'axe de la symétrie $S = h_n(a_3)$ est l'axe de la translation α_1 , nous avons

$$d(\alpha_1^{-n} \beta_1^{-1} i(x_0^n), S \cdot \alpha_1^{-n} \beta_1^{-1} i(x_0^n)) = d(\beta_1^{-1} i(x_0^n), S \beta_1^{-1} i(x_0^n)),$$

et ce nombre est borné, par conséquent la distance $d(h_n(b_1^{-1}) \cdot i(x_0^n), h_n(a_3 b_1^{-1}) \cdot i(x_0^n))$ est bornée. D'après la construction de l'arbre réel T décrite par M. Bestvina ([Bes88]), il y a donc deux points distincts de T , x_0^∞ et $h_\infty(b_1^{-1}) \cdot x_0^\infty$, qui sont fixés par $h_\infty(a_3)$. Le segment $[x_0^\infty, \rho_\infty(b_1^{-1}) \cdot x_0^\infty]$ est donc fixé globalement par $h_\infty(a_3)$. Vu que $(h_\infty(a_3))^2 = id_T$, pour montrer qu'il existe un tripode $Trip(a, b, c, d)$ tel que $h_\infty(a_3)(a) = a$, $h_\infty(a_3)(b) = b$, $h_\infty(a_3)(c) = d$ et $h_\infty(a_3)(d) = c$, il suffit de montrer que $h_\infty(a_3) \neq id_T$. Cela découle par exemple du fait que $h_n(a_2 b_1 a_2^{-1})$ est un élément hyperbolique dont les points fixes dans $\partial \mathbb{H}^2$ sont distincts de ceux de α_1 et de $h_n(b_1)$, par conséquent pour n assez grand la distance entre $h_n(a_2 b_1 a_2^{-1}) \cdot i(x_n)$ et l'axe de symétrie de $h_n(a_1)$ est de l'ordre de $d(h_n)$: toujours d'après la construction de M. Bestvina, cela donne un point de T qui n'est pas fixe par $h_\infty(a_3)$. $\square$

5.7 L'espace $\overline{m}_g^u$ admet au plus 3 composantes connexes

Nous allons maintenant exhiber un nouvel exemple de dégénérescences. Fixons une représentation injective $\rho: \pi_1 \Sigma_{g-1} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Le cercle $\mathbb{S}^1$ n'étant pas dénombrable, il existe un point $a_0 \in \mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{H}^2$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1 \Sigma_{g-1}$, $\rho(\gamma)a_0 = a_0 \Leftrightarrow \gamma = 1$. Choisissons un point $x_0 \in \mathbb{H}^2$. Notons A_n l'élément hyperbolique dont l'axe passe par x_0 , de point attracteur a_0 , et de longueur de translation n . Nous définissons une représentation $\rho'_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ en posant $\rho'_n(a_i) = \rho(a_i)$, $\rho'_n(b_i) = \rho(b_i)$ pour $i \leq g-1$, et $\rho'_n(a_g) = 1$, $\rho'_n(b_g) = A_n$.

Proposition 5.7.1 *La suite $(\rho'_n)_n \in \overline{m}_g^u$ converge vers une action ρ_∞ sur un arbre réel T , qui ne dépend plus de ρ .*

Dans [DK06], J. DeBlois et R. Kent ont montré que toutes les composantes connexes de R_{g-1} contiennent des représentations injectives. Il en découle que cet arbre réel est un point commun à tous les $\partial e^{-1}(k)$ dans $\overline{m}_g^u$, pour tous les k tels que $|k| \leq 2g-4$, puisque, évidemment, la représentation ρ'_n est aussi de classe d'Euler k (cela découle immédiatement de l'algorithme de Milnor, formule 1.1), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela prouve le résultat suivant :

Corollaire 5.7.2 *L'espace $\overline{m_g^u(2)}$ a au plus 3 composantes connexes. Plus précisément, les composantes de classes d'Euler entre 0 et $2g - 4$ se recollent toutes sur leur bord.*

Il est bien connu (voir par exemple [Gol88]) que l'espace $m_g^u(3)$ admet deux composantes connexes, l'une d'entre elles contenant toutes les représentations de classe d'Euler paire dans $m_g^u(2)$, et l'autre contenant celles de classe d'Euler impaire. Le résultat suivant en découle :

Corollaire 5.7.3 *L'espace $\overline{m_g^u(3)}$ est connexe.*

Preuve de la proposition 5.7.1.

Nous allons d'abord définir un arbre réel T muni d'une action ρ_∞ de $\pi_1 \Sigma_g$; nous montrerons ensuite que $(\mathbb{H}^2, \rho'_n) \rightarrow (T, \rho_\infty)$ dans $\overline{m_g^u}$.

Soit $\mathcal{G}$ le graphe de Cayley du groupe produit libre $G = \pi_1 \Sigma_{g-1} * \mathbb{Z}$ pour la partie génératrice $\{a_1, b_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, z\}$ où z est l'un des deux générateurs du facteur libre $\mathbb{Z}$ de G . Notons que l'action de G sur $\mathcal{G}$ est libre, et que si e est l'arête entre 1 et z , alors e sépare $\mathcal{G}$, par définition d'un produit libre. Soit T le graphe dual dans $\mathcal{G}$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ des milieux d'arêtes de $\mathcal{G}$: ses sommets sont les composantes connexes de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{E}$, avec une arête entre deux telles composantes connexes si leurs adhérences se rencontrent. Nous noterons $\bar{1}, \bar{z}$ les sommets de T images des sommets 1 et z de $\mathcal{G}$, respectivement. L'action de G sur $\mathcal{G}$, qui est libre et transitive sur les sommets induit une action de G sur T qui est transitive sur les arêtes. Le graphe T est donc un arbre, car chacune de ses arêtes le sépare, et l'action de G sur T est donc minimale, et à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Il s'agit une action *géométrique* du groupe G sur l'arbre réel T , au sens de G. Levitt et F. Paulin (voir [LP97]) : G est le groupe fondamental du bouquet de Σ_{g-1} avec un cercle; notons S ce complexe. Alors l'action de G sur T est l'action duale à la "lamination" définie par n'importe quel point x du cercle de S .



Le morphisme surjectif $e: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow G$ défini par $e(a_i) = a_i$ et $e(b_i) = b_i$ si $i \leq g - 1$, et $e(a_g) = 1$, $e(b_g) = z$ induit une action minimale ρ_∞ de $\pi_1 \Sigma_g$ sur T par isométries, dont le stabilisateur d'une arête est exactement le sous-groupe distingué de $\pi_1 \Sigma_g$ engendré par a_g .

Nous allons maintenant prouver que $(\mathbb{H}^2, \rho'_n) \rightarrow (T, \rho_\infty)$ pour la topologie de Gromov équivariante. Soit P une partie finie de $\pi_1 \Sigma_g$. Soit T_P le sous-arbre minimal de T , contenant les sommets $\bar{1}, \bar{z} \in C \subset T$, ainsi que $P \cdot \bar{1}$ et $P \cdot \bar{z}$. Soient $\{x_1, \dots, x_m\}$ une partie finie de T_P et $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe $\{x'_1, \dots, x'_m\} \subset \mathbb{H}^2$ tel que pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et tous $\gamma_1, \gamma_2 \in P$,

$$|d(\rho'_n(\gamma_1) \cdot x'_i, \rho'_n(\gamma_2) \cdot x'_j) - d(\rho_\infty(\gamma_1) \cdot x_i, \rho_\infty(\gamma_2) \cdot x_j)| < \varepsilon.$$

Pour tout $\gamma \in P$, l'élément $e(\gamma) \in G$ s'écrit de manière unique $e(\gamma) = u_1 z^{n_1} \dots u_k z^{n_k}$, avec $u_1, \dots, u_k \in \pi_1 \Sigma_{g-1}$, $u_2, \dots, u_k \neq 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \neq 0$. Notons $Q \subset \pi_1 \Sigma_{g-1}$ la partie formée de tous les éléments $u_1, \dots, u_k$ lorsque γ parcourt P . Posons

$$\alpha_P = \min_{\substack{u_1, u_2 \in Q \\ u_1 \neq u_2}} (\rho_0(u_1) a_0, x_0, \rho_0(u_2) a_0).$$

C'est un angle non nul. Posons aussi $\beta_P = \max_{u \in Q} d_{\mathbb{H}^2}(x_0, \rho_0(u) \cdot x_0)$.

Si P est assez grand, ce que nous supposons par la suite, l'arbre T_P est l'orbite du segment $[\bar{1}, \bar{z}]$ par $\rho_\infty(P)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ il existe $t_i \in [0, 1]$ et (au moins un) $c_i \in P$ tels que x_i soit sur le segment $[c_i \cdot \bar{1}, c_i \cdot \bar{z}]$ et tels que $d(x_i, c_i \cdot \bar{1}) = t_i = 1 - d(x_i, c_i \cdot \bar{z})$. Notons x'_i l'élément de $\mathbb{H}^2$ tel que $\frac{1}{n} d_{\mathbb{H}^2}(x'_i, \rho'_n(c_i)x_0) = t = 1 - \frac{1}{n} d_{\mathbb{H}^2}(x'_i, \rho'_n(c_i)A_n x_0)$. Un tel point existe et est unique, vu que $d_{\mathbb{H}^2}(\rho'_n(c_i)x_0, \rho'_n(c_i)A_n x_0) = n$. Par construction des points x'_i , pour vérifier que pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et tous $\gamma_1, \gamma_2 \in P$ on ait

$$|d(\rho'_n(\gamma_1) \cdot x'_i, \rho'_n(\gamma_2) \cdot x'_j) - d(\rho_\infty(\gamma_1) \cdot x_i, \rho_\infty(\gamma_2) \cdot x_j)| < \varepsilon,$$

il suffit de le faire dans le cas où x_i et x_j sont des sommets de l'arbre T . Supposons par exemple que $x_i = c_i \cdot \bar{1}$ et $x_j = c_j \cdot \bar{1}$ avec $c_i, c_j \in P$. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in P$. Notons $c = \gamma_1 c_1 (\gamma_2 c_2)^{-1}$ et $e(c) = u_{k+1} t^{n_k} \dots u_2 t^{n_1} u_1$, avec $n_1, \dots, n_k \neq 0$ et $u_2, \dots, u_k \neq 1$. Vu que le stabilisateur de l'arête $\bar{1}$, dans le groupe G , est $\pi_1 \Sigma_{g-1}$ et que $d(\bar{1}, \bar{z}) = 1$

dans l'arbre T , on vérifie que $d(\rho_\infty(\gamma_1)x_i, \rho_\infty(\gamma_2)x_j) = \sum_{i=1}^k |n_i|$. Nous allons donc mon-

trer que, asymptotiquement, la distance $\frac{1}{n} d_{\mathbb{H}^2}(\rho'_n(c)x_0, x_0)$ s'approche de $\sum_{i=1}^m |n_k|$. On

procède par récurrence sur k . Notons $c' = u_k z^{n_{k-1}} \dots u_2 z^{n_1}$, et supposons que $u_k \neq 1$ et que $d_{\mathbb{H}^2}(\rho'_n(c)x_0, x_0) = n \sum_{i=1}^{k-1} |n_i| + O(1)$. Alors $d(\rho'_n(c')x_0, x_0) = n \sum_{i=1}^{k-1} |n_i|$, et ainsi

$d(A_n^{n_k} \rho'_n(c')x_0, A_n^{n_k} x_0) = n \sum_{i=1}^{k-1} |n_i|$, et $d(A_n^{n_k} x_0, x_0) = n |n_k|$. Vu que $A_n^{n_k} \in PSL(2, \mathbb{R})$

préserve les angles, nous avons donc $\widehat{A_n^{n_k} \rho'_n(c')x_0, A_n^{n_k} x_0, x_0} = \widehat{\rho'_n(c')x_0, x_0, A_n^{-n_k} x_0} \geq \frac{\alpha_{P'}}{2}$,

pour P' assez grande (mais ne dépendant que de P). Ceci, combiné avec la règle du cosinus I, entraîne que $d(A_n^{n_k} \rho'_n(c')x_0, x_0) = n \sum_{i=1}^m |k_i| + O(1)$. Vu que $d(u_{k+1}x_0, x_0) \leq \beta$, il en

découle que $d(\rho'_n(c)x_0, x_0) = n \sum_{i=1}^k |n_i| + O(1)$, ce qui termine la preuve. $\square$

5.8 L'espace $\overline{m}_g^u$ est connexe

Nous allons maintenant prouver le théorème 0.2.1.

Théorème 5.8.1

- Pour tout $g \geq 2$, l'espace $\overline{m}_g^u$ admet au plus deux composantes connexes. Plus précisément, toutes les composantes connexes, sauf peut-être celle de classe d'Euler $2g - 3$, se recollent sur leur bord.
- Pour tout $g \geq 4$, l'espace $\overline{m}_g^u$ est connexe.

On considère encore la partie génératrice $S = \{a_1, \dots, b_g\}$ de $\pi_1 \Sigma_g$. L'idée principale est la suivante.

Lemme 5.8.2 Soient Γ un groupe de type fini et $\phi: \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ une représentation fidèle, discrète et d'image cocompacte. Notons B_n la boule fermée de rayon n pour la métrique de Cayley sur $\pi_1 \Sigma_g$ pour la partie génératrice S , et supposons que $\phi_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \Gamma$ soit un morphisme non injectif vérifiant $Ker(\phi_n) \cap B_n = \{1\}$. Alors $d(\phi \circ \phi_n) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Soit (T, ρ_∞) un point d'accumulation dans $\partial \overline{m}_g^u$ de la suite $(\phi \circ \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors l'action ρ_∞ est à petits stabilisateurs d'arêtes.

Preuve

Montrons d'abord que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi \circ \phi_n) = +\infty$. Par l'absurde, supposons que l'on puisse extraire cette suite de sorte que $(d(\phi \circ \phi_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre $d \in \mathbb{R}_+$. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{H}^2$. Vu que l'image $\phi(\Gamma)$ est cocompacte, il existe $g_{\varphi(n)} \in \phi(\Gamma)$ et

$$x_n \in \min \left(g_{\varphi(n)} \cdot (\phi \circ \phi_{\varphi(n)}) \cdot g_{\varphi(n)}^{-1} \right)$$

tels que la distance $d(x_0, x_n)$ soit bornée ; disons $d(x_0, x_n) \leq k$. Notons ρ_n la représentation $g_{\varphi(n)} \cdot (\phi \circ \phi_{\varphi(n)}) \cdot g_{\varphi(n)}^{-1}$. Alors pour tout $n \geq 0$, ρ_n est discrète, et $Ker(\rho_n) \cap B_{\varphi(n)} = \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\gamma \in S$, $d(\rho_n(\gamma) \cdot x_0, x_0) \leq d(\rho_n) + 2k$, et $\lim_n d(\rho_n) = d$ donc d'après la proposition 1.1.2, quitte à extraire, $(\rho_n)_n$ converge vers une représentation $\rho \in R_g$. Vu que la partie $\rho_n(\pi_1 \Sigma_g) = \phi(\Gamma) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est discrète et que pour tout $\gamma \in \pi_1 \Sigma_g \setminus \{1\}$, à partir d'un certain rang, $\rho_n(\gamma) \neq \text{Id}$, on a $\rho(\gamma) \neq \text{Id}$, donc ρ est injective. Ainsi, la représentation ρ est fidèle et discrète, donc $|e(\rho)| = 2g - 2$, et ρ est limite de représentations ρ_n non injectives, donc $|e(\rho_n)| \neq 2g - 2$: ceci contredit la continuité de la classe d'Euler (il n'est pas nécessaire d'utiliser la classe d'Euler ici, mais c'est l'argument le plus rapide).

Notons maintenant $\rho_n = \phi \circ \phi_n$. Il existe donc un point d'accumulation $(T, \rho_\infty) \in \partial \overline{m}_g^u$ de la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste à montrer que cette action est à petits stabilisateurs. Mais notre représentation ρ_n , pour tout $n \geq 0$, est *discrète*. Il suffit donc d'appliquer le même argument que M. Bestvina et F. Paulin ([Bes88, Pau88]), qui consiste à appliquer le lemme de Margulis. Nous reprenons donc ici la preuve du théorème 6.7 de [Pau88], pages 78-79, auquel nous renvoyons le lecteur pour plus de détails.

Lemme de Margulis : *Il existe une constante $\mu > 0$, qui ne dépend que de n , telle que pour tout sous-groupe discret Γ d'isométries de $\mathbb{H}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, le sous-groupe engendré par $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x) < \mu\}$ est presque abélien.*

Supposons donc qu'il existe un segment $[x_\infty, y_\infty]$ de l'arbre limite, dont le stabilisateur contienne un groupe libre de rang 2. Quitte à passer à un sous-groupe d'indice 2, nous pouvons supposer qu'il existe un groupe libre de rang 2, $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \pi_1 \Sigma_g$, tel que α et β fixent x_∞ et y_∞ . Pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, il existe donc $x_n, y_n \in \mathbb{H}^2$ tels que $\left| \frac{1}{\ell(\rho_n)} d_{\mathbb{H}^2}(x_n, y_n) - 1 \right| < \varepsilon$, $d_{\mathbb{H}^2}(x_n, \rho_n(\alpha)x_n) < \varepsilon \ell(\rho_n)$, $d_{\mathbb{H}^2}(y_n, \rho_n(\alpha)y_n) < \varepsilon \ell(\rho_n)$, et de même pour $\rho_n(\beta)$. Notant z_n le milieu du segment $[x_n, y_n]$, on peut alors montrer que si ε est assez petit et $\ell(\rho_n)$ assez grand, les éléments $[\rho_n(\alpha), \rho_n(\beta)]$ et $[\rho_n(\alpha^2), \rho_n(\beta)]$ déplacent le point z_n d'une distance inférieure à μ . D'après le lemme de Margulis, les éléments $\rho_n([\alpha, \beta]), \rho_n([\alpha^2, \beta]) \in PSL(2, \mathbb{R})$ engendrent donc un groupe presque abélien. Mais les sous-groupes presque abéliens de $PSL(2, \mathbb{R})$ sont métabeliens, d'après le lemme 1.1.18. En particulier, notant par exemple $w(\alpha, \beta) = [[[\alpha, \beta], [\alpha^2, \beta]], [[\alpha, \beta]^2, [\alpha^2, \beta]]]$, on a $\rho_n(w(\alpha, \beta)) = 1$ pour tout n assez grand. Si n est assez grand, et plus grand que la longueur du mot $w(\alpha, \beta)$ en les générateurs a_i, b_i , ceci implique que $w(\alpha, \beta) = 1$ dans $\pi_1 \Sigma_g$ (vu que $Ker(\rho_n) \cap B_n = \{1\}$), ce qui contredit le fait que $\langle \alpha, \beta \rangle$ soit libre. Ainsi,

l'action ρ_∞ est bien à petits stabilisateurs d'arêtes. $\square$

Preuve du théorème 5.8.1.

- Fixons Γ un groupe fuchsien cocompact, $\mathbb{F}_2 \subset \Gamma$ un sous-groupe de Γ isomorphe au groupe libre de rang 2, et $\phi: \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la représentation tautologique (l'inclusion). Considérons le morphisme $\phi_n: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \mathbb{F}_2$ du théorème 3.3.1, et posons $\rho_n = \phi \circ \phi_n$. Alors ρ_n factorise par le groupe libre, qui a un H^2 trivial, donc d'après la proposition 4.1.8, la représentation ρ_n est de classe d'Euler nulle. D'après le lemme 5.8.2, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un point d'accumulation $(T, \rho_\infty) \in \partial \overline{m_g^u}$, qui est à petits stabilisateurs d'arêtes. D'après le théorème de R. Skora [Sko96], cela entraîne que cette limite est aussi au bord de l'espace de Teichmüller ; autrement dit, cet arbre est aussi limite de représentations de classe d'Euler $2g - 2$. Ainsi, les adhérences des composantes connexes de m_g^u de classes d'Euler 0 et $2g - 2$ se rencontrent. D'après le corollaire 5.7.2, nous savons déjà que les composantes de classes d'Euler 0, 1, $\dots$, $2g - 4$ se recollent sur leurs bords, ce qui termine la preuve du premier point.
- Nous avons vu (théorème 4.1.17) que l'application $p_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ est discrète et de classe d'Euler $2g - 3$. Nous avons vu (lemme 3.3.2) que pour tout $n \geq 0$, il existe $\phi_n \in Aut(\pi_1 \Sigma_g)$ tel que $Ker(p_g \circ \phi_n) \cap B_n = \{1\}$. La représentation $p_g \circ \phi_n$ est encore discrète, et on a $|e(p_g \circ \phi_n)| = 2g - 3$, donc comme précédemment, le lemme 5.8.2 assure que les composantes de m_g^u de classes d'Euler $2g - 3$ et $2g - 2$ se recollent sur leur bord. $\square$

5.9 Dynamique

L'objectif de cette dernière section est de constater que la compactification $\overline{m_g^u}$ est *extrêmement* dégénérée, de sorte que la compactification $\overline{m_g^o}$ que nous avons introduite ici, est peut-être un objet un peu plus intéressant. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 5.9.1 *Soit $g \geq 3$. Alors l'espace $\overline{m_g^u}$ n'admet aucune décomposition en complexe cellulaire fini compatible avec la compactification de m_g^u (autrement dit, tel que $\partial \overline{m_g^u}$ soit un sous-complexe).*

Ceci contraste dramatiquement avec la compactification de l'espace de Teichmüller seul (voir par exemple [Thu88, FLP91]).

Preuve

Posons $F = \partial e^{-1}(2g - 2) \cap \partial e^{-1}(2g - 4)$. Notons encore $e_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \pi_1 \Sigma_{g-1}$ l'application d'écrasement définie au chapitre 3, et notons $h: \pi_1 \Sigma_{g-1} \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ une représentation fidèle et discrète, donc de classe d'Euler $2g - 4$: si $g \geq 3$, d'après le lemme 3.3.3, pour tout $n \geq 0$ il existe $\phi_n \in Aut(\pi_1 \Sigma_g)$ tel que $Ker(h \circ e_g \circ \phi_n) \cap B_n = \{1\}$ donc toujours en appliquant le lemme 5.8.2 on vérifie que $F \neq \emptyset$. Vu que $e^{-1}(2g - 2)$ et $e^{-1}(2g - 4)$ sont stables sous l'action (naturelle) de $Out(\pi_1 \Sigma_g)$, nous en déduisons que F est stable, lui aussi, sous cette action. Il est bien connu (voir [FLP91], exposé 6, théorème VII.2, p. 117 ; voir aussi [Mas85]) que l'action de $Out(\pi_1 \Sigma_g)$ sur $\partial e^{-1}(2g - 2)$ est minimale, c'est-à-dire

que tout fermé de $e^{-1}(2g-2)$, invariant par $\text{Out}(\pi_1 \Sigma_g)$, est soit vide soit $e^{-1}(2g-2)$ tout entier. Vu que F est une partie fermée, cela entraîne que $\partial e^{-1}(2g-2) \subset F \subset \partial e^{-1}(2g-4)$.

L'application $e_g: \pi_1 \Sigma_g \rightarrow \pi_1 \Sigma_{g-1}$ définit, par composition, une fonction continue $\overline{m_{g-1}^u} \rightarrow \overline{m_g^u}$ qui préserve la classe d'Euler. Tout élément de $\partial e^{-1}(2g-4)$ dans $\partial \overline{m_{g-1}^u}$ (c'est-à-dire, toute action minimale de $\pi_1 \Sigma_{g-1}$ à petits stabilisateurs d'arêtes sur un arbre réel) définit donc, par composition avec e_g , une action de $\pi_1 \Sigma_g$ sur un arbre réel, de classe d'Euler $2g-4$, et qui n'est pas à petits stabilisateurs d'arêtes puisqu'elle a un noyau non trivial, engendré par $\{a_g, b_g\}$. Ainsi, $\partial e^{-1}(2g-2) \subsetneq \partial e^{-1}(2g-4)$. Nous savons aussi, d'après la proposition 3.2.2, que $e^{-1}(2g-4)$ a un seul bout, de sorte que $\partial e^{-1}(2g-4)$ est connexe. Soit F' la partie de F constituée des points d'accumulation de $\partial e^{-1}(2g-4) \setminus F$. Alors F' est fermée, et F' est stable sous $\text{Out}(\pi_1 \Sigma_g)$. Par conséquent, $F' = F = e^{-1}(2g-2)$. Cela signifie que le complexe $\partial e^{-1}(2g-4)$ contient des cellules de dimension au moins $6g-6$, vu que $e^{-1}(2g-2)$ est de dimension $6g-7$ (voir [Thu88, FLP91]). Ceci contredit l'hypothèse que ce complexe borde l'espace $e^{-1}(2g-4)$, qui est lui-même de dimension $6g-6$ d'après [Hit87], théorème 10.2. $\square$

Chapitre 6

Quelques perspectives

Un des problèmes les plus naturels serait de bien comprendre la topologie de ces composantes exotiques de $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$. Cette question a été partiellement résolue par N. Hitchin, mais il serait intéressant de trouver une autre preuve, peut-être plus géométrique. Un autre problème naturel, est celui d'interpréter les représentations comme des structures géométriques sur la surface. Une question toujours ouverte est la suivante : les représentations de classe d'Euler $2g - 1$, dans R_g , sont-elles toutes des représentations d'holonomie de structures hyperboliques ramifiées sur la surface ? Cette question semble liée à la précédente, puisque dans ce cas, la topologie de $e^{-1}(2g - 1) \subset R_g/PSL(2, \mathbb{R})$ pourrait être retrouvée de cette manière.

Une autre question ouverte, proche de celle que nous venons d'évoquer, a été posée par S. Tan [Tan94] : les représentations d'holonomie de structures hyperboliques ramifiées sur Σ_g sont-elles denses dans les composantes de classe d'Euler non nulle ? Ce problème est intimement lié à une conjecture proposée W. Goldman ([Gol06], conjecture 3.1), qui affirmerait que l'action de $Out(\pi_1 \Sigma_g)$ est ergodique sur les composantes connexes exotiques. La validation de cette conjecture apporterait un outil extrêmement fort pour l'étude de ces composantes connexes ; en particulier pour répondre positivement à la question de S. Tan il suffirait d'exhiber un ouvert, dans chaque composante, qui ne contiendrait que des représentations d'holonomie de structures hyperboliques.

Nous venons de montrer ici que les représentations d'image discrète, qui forment un fermé dans les composantes de classe d'Euler non nulle (c'est la proposition 4.1.6), sont les seules représentations "déformables par chemins" (proposition 4.3.1). Ainsi, les représentations d'image discrète ont une stabilité particulière, parmi l'ensemble de toutes les représentations. Il me paraît très probable que l'orbite de toute représentation d'image non-discrète, en classe d'Euler non nulle, soit dense dans sa composante connexe.

Ensuite, les résultats du chapitre 5 devraient se généraliser au rang supérieur. Pour cela une première difficulté serait de redéfinir la compactification de A. Parreau, à l'aide cette fois-ci de la topologie de Gromov équivariante, au moins dans les cas particuliers où l'on connaît un cocycle que l'on pourrait étendre à la compactification. Cela pourrait être le cas de $Sp(2n, \mathbb{R})$, avec la classe de Maslov. De plus, dans le cas de $Sp(4, \mathbb{R})$, le nombre de composantes connexes est connu (voir [Got01]), donc les résultats présentés ici pourraient s'étendre de la même manière.

Lorsque l'on compactifie un objet dont on connaît la topologie, il est naturel de se demander comment la topologie de notre espace a changé. Par exemple, l'espace de Teichmüller est une boule ouverte de dimension $6g - 6$, et ce qu'on ajoute au bord en fait une boule fermée. Nous avons montré (proposition 5.9.1) qu'on ne peut pas espérer qu'un tel résultat, concernant la compactification de Morgan, Shalen, Bestvina et Paulin, se généralise au bord des autres composantes. Cependant, il est possible que la compactification (avec orientation) que nous introduisons ici se comporte d'une façon nettement moins sauvage ; elle conserve les différentes composantes connexes (c'est le théorème 5.5.1) et maintenant il est naturel de se demander si c'est une équivalence d'homotopie, par exemple.

Enfin, une suite très naturelle de nos résultats sur la compactification serait de donner une caractérisation des arbres réels qui apparaissent au bord de m_g^o . C'est l'analogue de la question correspondante pour le bord de l'espace de Teichmüller, qui a été l'objet de travaux importants, et qui a été cloturée par R. Skora [Sko96]. Nous avons prouvé ici que ces arbres réels doivent admettre une orientation, préservée par l'action du groupe. Mais on peut encore exhiber, assez facilement, des obstructions, pour des actions minimales de $\pi_1 \Sigma_g$ sur des arbres réels épais, à être au bord de m_g^o , mais nous n'avons pas encore de condition suffisante.

Annexe A

Nœuds holonomes parallélisés



Framed holonomic knots

TOBIAS EKHOLM

MAXIME WOLFF

Abstract A holonomic knot is a knot in 3-space which arises as the 2-jet extension of a smooth function on the circle. A holonomic knot associated to a generic function is naturally framed by the blackboard framing of the knot diagram associated to the 1-jet extension of the function. There are two classical invariants of framed knot diagrams: the Whitney index (rotation number) W and the self linking number S .

For a framed holonomic knot we show that W is bounded above by the negative of the braid index of the knot, and that the sum of W and $|S|$ is bounded by the negative of the Euler characteristic of any Seifert surface of the knot.

The invariant S restricted to framed holonomic knots with $W = m$, is proved to split into n , where n is the largest natural number with $n \leq \frac{|m|}{2}$, integer invariants. Using this, the framed holonomic isotopy classification of framed holonomic knots is shown to be more refined than the regular isotopy classification of their diagrams.

AMS Classification 57M27; 58C25

Keywords Framing, holonomic knot, Legendrian knot, self-linking number, Whitney index

1 Introduction

1.A Holonomic knots and framing

Let $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function. The *holonomic plane curve* and *holonomic space curve* associated to f are the 1-jet extension c and the 2-jet extension C of f , respectively. That is, $c(t) = (f(t), f'(t))$, and $C(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ where $t \in S^1$, and where (x_0, x_1) and (x_0, x_1, x_2) are linear coordinates on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, respectively.

A *holonomic knot* is a holonomic space curve which is an embedding. A *framed holonomic knot* is a holonomic knot with associated holonomic plane curve

which is an immersion. If f is a function giving rise to a framed holonomic knot C then $(f'(t), f''(t)) \neq 0$, for all $t \in S^1$, and we consider the constant vector field ∂_{x_2} as a normal vector field along C .

In the space of smooth functions on the circle, the functions with associated holonomic space curve being a (framed) holonomic knot form an open and dense subset. A *(framed) holonomic isotopy* is a continuous 1-parameter family of (framed) holonomic knots, or equivalently a continuous path in the space of (framed) holonomic knots.

Vassiliev [5] introduced holonomic knots and proved that any knot class (topological isotopy class of knots) has a holonomic representative and also that there exists a natural isomorphism from finite type invariants of topological knots to finite type invariants of holonomic knots.

Birman and Wrinkle [2] showed that two holonomic knots which are topologically isotopic are in fact holonomically isotopic. From a combinatorial point of view this means that the holonomic isotopy classification of holonomic knots is identical to the isotopy classification of their diagrams. (A *knot diagram* is the image of a generic projection of a knot to a plane in $\mathbb{R}^3$, decorated with over and under crossing information at its double points. An *isotopy of a knot diagram* is defined to be a sequence of planar isotopies and Reidemeister moves, see e.g. Kauffman [3].)

1.B Whitney index and self linking number

Following Kauffman [3], we say that two knot diagrams which can be deformed into each other by a sequence of planar isotopies and, second- and third Reidemeister moves (i.e. the moves the projections of which are self-tangency- and triple point instances) are called *regularly isotopic*. There are two simple invariants of regular isotopy:

Fix an orientation of the ambient $\mathbb{R}^3$. This orientation together with a fixed orientation of the projection direction associated to the knot diagram induce an orientation on the projection plane. The *Whitney index* W is the tangential degree of the knot diagram viewed as an oriented regular plane curve in the projection plane. The *self linking number* S is the linking number of a knot K which projects to the diagram and a copy of K shifted slightly in the projection direction, computed using the fixed orientation of the ambient $\mathbb{R}^3$.

The Whitney formula [6] expresses the Whitney index of a generic regular plane curve as follows. Let q be a point on C such that C lies on one side of the

tangent line of C at q . Let $\mu(q) = \pm 1$ denote the winding number of C with respect to q' , where q' is the point q shifted slightly into the half plane which contains the curve. The orientation of C and the point q induces an ordering of the preimages of a self intersection point p of C . Let $\epsilon_p = \pm 1$ be the sign of the orientation of the plane induced from the tangent vectors of the ordered branches of C intersecting at p . Then

$$W(C) = - \sum_p \epsilon(p) + \mu(q).$$

The self linking number is the sum of the crossing signs over all crossings of the diagram. Hence $W + S$ is an odd integer.

In our study of framed holonomic knots we use the orientation $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 > 0$ and project along the x_2 -axis oriented by $dx_2 > 0$ to define W and S for framed holonomic knots. The ranges of these invariants are easily found:

Proposition 1.1 *Let C be a framed holonomic knot. Then $W(C) < 0$, and if $W(C) = -1$ then $S(C) = 0$ and C represents the unknot. Let $m \leq -2$ and $n \in \mathbb{Z}$ be such that $m + n$ is odd. Then there exists a framed holonomic knot with $W(C) = m$ and $S(C) = n$.*

Proposition 1.1 is proved in Subsection 2.A.

It is more interesting to consider the ranges of W and S restricted to diagrams representing a fixed knot class K . It is easy to see that for any integers m and n such that $m + n$ is odd there exists a diagram D which represents K with $W(D) = m$ and $S(D) = n$. If the domains of W and S are restricted further to framed holonomic knots which represent K the situation changes drastically.

Theorem 1.2 *Let C be a framed holonomic knot representing the knot class K . Then*

$$W(C) \leq -\text{braid}(K), \quad (1.1)$$

where $\text{braid}(K)$ is the braid index of K , and

$$W(C) + |S(C)| \leq 2g(K) - 1, \quad (1.2)$$

where $g(K)$ denotes the genus of K .

Theorem 1.2 is proved in Subsection 3.C. The proof of (1.2) uses the Bennequin inequality [1] from the theory of Legendrian knots: if (x, y, z) are coordinates on $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^3$ is oriented by $dx \wedge dy \wedge dz > 0$ then this inequality asserts that

for the xy -diagram $\Gamma_{\mathbb{C}}$ of a knot Γ which is everywhere tangent to the field of hyperplanes $\ker(dz - ydx)$ and which represents the knot class K

$$S(\Gamma_{\mathbb{C}}) + |W(\Gamma_{\mathbb{C}})| \leq 2g(K) - 1. \quad (1.3)$$

It is a curious fact that the roles of S and W in (1.2) and (1.3) are reversed.

1.C New invariants of framed holonomic knots

Trace [4] showed that two knot diagrams D and D' are regularly isotopic if and only if they represent the same knot class, $W(D) = W(D')$, and $S(D) = S(D')$. The classification problem for framed holonomic knots resembles the problem of classifying knot diagrams up to regular isotopy in the following way. Regular isotopy is knot diagram isotopy without first Reidemeister moves (the move which projects to a cusp-instance) and framed holonomic isotopy is holonomic isotopy without the holonomic first Reidemeister move, see Figure 2.

Theorem 1.3 *On the space of framed holonomic knots with Whitney index equal to m , the invariant S splits. More precisely, to each framed holonomic knot C with $W(C) = m$ there is associated n , where n is the largest integer with $n \leq \frac{|m|}{2}$, integers $S_1(C), \dots, S_n(C)$, which are invariant under framed holonomic isotopy. Moreover,*

$$S(C) = \sum_{j=1}^n S_j(C). \quad (1.4)$$

The invariants S_j are defined in Definition 4.1 and Theorem 1.3 is proved in Subsection 4.A.

In Section 5 we give examples of framed holonomic knots representing the same knot class, with the same W and S but which are distinguished up to framed holonomic isotopy by the invariants S_j . This shows that the classification of framed holonomic knots up to framed holonomic isotopy is more refined than the regular isotopy classification of their diagrams. This result should be compared to the result of Birman and Wrinkle mentioned in Subsection 1.A.

1.D Holonomic regular homotopy

A *holonomic regular homotopy* is a continuous 1-parameter family of regular holonomic plane curves.

Proposition 1.4 *Two regular holonomic plane curves are holonomically regularly homotopic if and only if they have the same Whitney index.*

Proposition 1.4 is proved in Subsection 2.B. If the holonomic requirements in Proposition 1.4 are removed one obtains the classical Whitney-Graustein theorem [6]. The proof we present is independent of this theorem.

2 Diagrams of holonomic knots and Reidemeister moves

For the readers convenience, basic facts on the geometry of diagrams of holonomic knots are presented. For proofs of these facts, see [5], Proposition 1.

Let $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ be a generic function. Then the x_0x_1 -diagram c of the framed holonomic knot C associated to f has the following properties:

- P1** c is a regular curve and if p is a point on c in the upper (lower) half plane and v is the unit tangent of c at p then $\langle v, \partial_{x_0} \rangle > 0$ ($\langle v, \partial_{x_0} \rangle < 0$), where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the standard inner product on $\mathbb{R}^2$.
- P2** c meets the x_0 -axis at right angles at a finite number of points corresponding to the local extrema of f . The curvature of c at such a point p does not vanish and if p corresponds to maximum (minimum) of f the unit tangent of c at p equals $-\partial_{x_1}$ (∂_{x_1}).
- P3** The only self intersection points of c are transverse double points which lie in the region $\{(x_0, x_1): x_1 \neq 0\}$. The crossing number of a double point in the upper (lower) half plane is negative (positive) with respect to the orientation $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 > 0$.

In generic 1-parameter families of *framed holonomic knots* the diagram changes by planar isotopy which preserve properties **P1–3** above except for a finite number of instances where one of the bifurcations in Figure 1 occur. Note that the Ω_2 -moves always occur on the x_0 -axis. The signs on the Ω_2 -moves refer to the signs of the product of the second derivatives at the extrema meeting at the self-tangency moment of the function defining the holonomic knot. The Ω_3 -move depicted occurs either in the upper- or lower half plane.

If the word *framed* above is omitted the corresponding result is: In generic 1-parameter families of *holonomic knots* the diagram changes by planar isotopy which preserve properties **P1–3** above except for a finite number of instances where one of the bifurcations in Figures 1 or 2 occur. The signs of the Ω_1 -moves

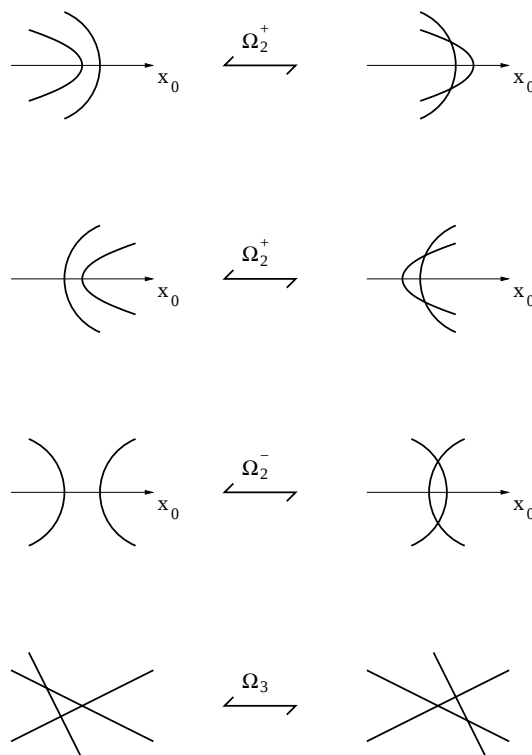


Figure 1: Framed holonomic Reidemeister moves

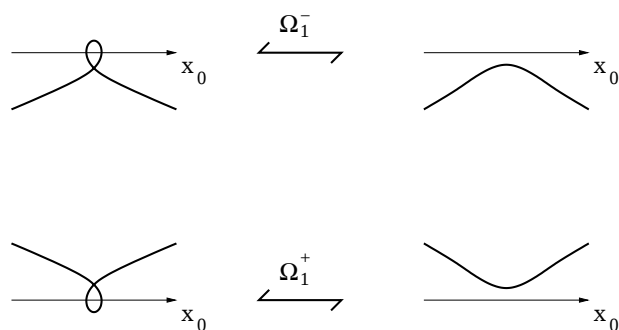


Figure 2: Holonomic versions of the first Reidemeister move

in Figure 2 refer to the sign of x_1 in the half plane where a double point is born or vanishes.

If we further omit the condition that the holonomic curve be an embedding then

the list of diagram-bifurcations would be further extended and include also the move in Figure 3 (which might change the knot class of the holonomic curve). The signs on the Ω_0 -moves in Figure 3 refer to the half plane where double

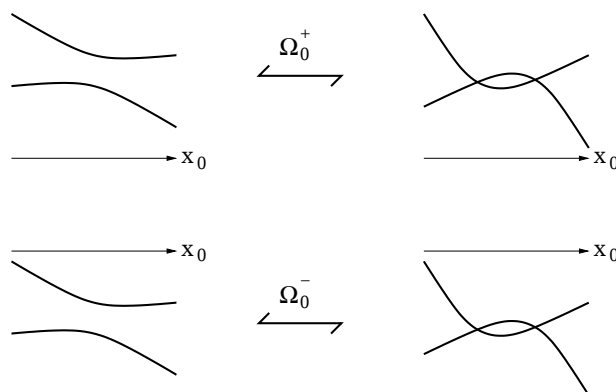


Figure 3: Framed holonomic crossing move

points are born or vanish.

2.A Proof of Proposition 1.1

Let $\pi(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1)$. Let f be a generic function on the circle, let C be its associated holonomic knot, and let $c = \pi(C)$. To see that $W(C) < 0$ compute the Whitney index by looking at points p on c where the unit tangent equals ∂_{x_1} . These correspond to minima of f and all of them contribute -1 to W . The second statement is immediate.

To create a holonomic knot C with $W(C) = m$, $m \leq -2$ and $S(C) = n$, start from the holonomic unknot diagram (which is just the unit circle). If $n \geq 0$ ($n < 0$) apply Ω_1^+ (Ω_1^-) $m - 1$ times in such a way that the resulting diagram contains $m - 1$ consecutive loops along the x_0 -axis. The resulting holonomic knot has $W = m$ and $S = -(m - 1)$ if $n \geq 0$ ($S = m - 1$ if $n < 0$). Finally, if $n \geq 0$ apply $\Omega_0^- \frac{n+m-1}{2}$ times and if $n < 0$ apply $\Omega_0^+ \frac{n+m-1}{2}$ times to create new double points. The resulting holonomic knot C then has $W(C) = m$ and $S(C) = n$, as desired. $\square$

2.B Proof of Proposition 1.4

Let f be a function with associated holonomic plane curve c_f which is an immersion. If ϕ is a diffeomorphism of S^1 then also $f \circ \phi$ gives rise to a regular

holonomic plane curve.

Let g be a function with regular plane holonomic curve c_g with $W(c_f) = W(c_g)$. Perturb f and g so that they become Morse functions. Then the proof of Proposition 1.1 implies that they have the same number of local extrema. Let ϕ_s , $0 \leq s \leq 1$ be a diffeotopy of S^1 which moves each critical point of f to a critical point of g of the same index. Then the critical sets of $\hat{g} = g \circ \phi_1$ and of f agree. Moreover, if t is local maximum (minimum) of f then it is a local maximum (minimum) of $g \circ \phi_1$. Let (s, r) be coordinates on the cylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ and consider the vector field $V(s, r) = (f(s) - \hat{g}(s))\partial_r$. Let Φ^ρ be the flow of V . If $\hat{g}_\rho$ is the function with graph $\Phi^\rho(\Gamma_{\hat{g}})$, where $\Gamma_{\hat{g}}$ is the graph of $\hat{g}$, then $\hat{g}_\rho$ has a regular associated holonomic curve for each $\rho \leq 1$ and $\hat{g}_1 = f$.

These two deformations together give the desired holonomic regular homotopy. $\square$

3 Holonomic knots and front projections of Legendrian knots

3.A The front and complex projections of a Legendrian knot

Let Γ be a knot in $\mathbb{R}^3$ with coordinates (x, y, z) everywhere tangent to the plane field $\{\ker(dz - ydx)\}$. That is, Γ is a *Legendrian knot*. Assume moreover that Γ is generic among Legendrian knots, then the projection Γ_F of Γ to the xz -plane is a curve with transverse double points, isolated cusps, and without vertical tangencies. Moreover, given any curve in the xz -plane with these properties, there exists a unique Legendrian knot which projects to this curve. We associate the following numbers to Γ_F :

First we count cusps, let $\text{Dcu}(\Gamma_F)$, $\text{Ucu}(\Gamma_F)$, and $\text{Lcu}(\Gamma_F)$ denote the number of down-cusps, up-cusps, and left-cusps respectively of Γ_F , see Figure 4.

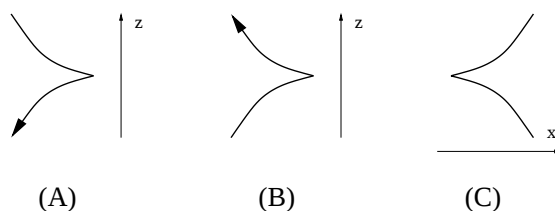


Figure 4: (A) Down-cusp, (B) Up-cusp, and (C) left-cusp.

Second we count crossings, let $\text{Ecr}(\Gamma_F)$ denote the number of crossing points where the tangent vectors has x -components of the same sign and $\text{Ocr}(\Gamma_F)$ the number of crossing points where the tangent vectors has x -components of the opposite sign. See Figures 5 and 6.

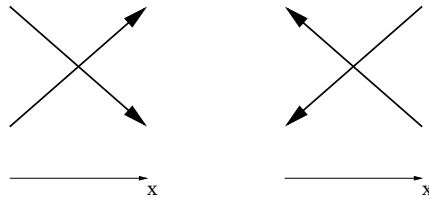


Figure 5: Crossing points with tangents with x -components of equal sign

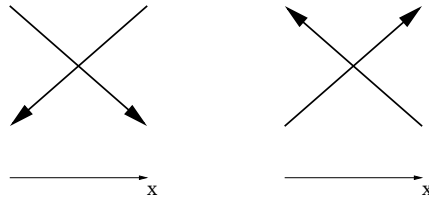


Figure 6: Crossing points with tangents with x -components of opposite signs

The projection $\Gamma_{\mathbb{C}}$ of Γ to the xy -plane is a generic knot diagram. It is straightforward to check that the invariants $W(\Gamma_{\mathbb{C}})$, where we use the orientation given by $dx \wedge dy$ in the xy -plane, and $S(\Gamma_{\mathbb{C}})$, where we use the orientation given by $dx \wedge dy \wedge dz$ in space, can be computed from data of Γ_F as follows,

$$W(\Gamma_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2} (\text{Dcu}(\Gamma_F) - \text{Ucu}(\Gamma_F)), \quad (3.1)$$

$$S(\Gamma_{\mathbb{C}}) = \text{Ecr}(\Gamma_F) - \text{Ocr}(\Gamma_F) - \text{Lcu}(\Gamma_F). \quad (3.2)$$

3.B Legendrian knots associated to a holonomic one

Let C be a framed holonomic knot. We associate two Legendrian knots Γ^+ and Γ^- , everywhere tangent to $\ker(dx_1 - x_2 dx_0)$, to C by describing their front projections (in the $x_0 x_1$ -plane). The resulting Legendrian knots lie in $\mathbb{R}^3$ oriented by $dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_1 > 0$.

The first step in the construction of the fronts of Γ^+ and Γ^- is the same in both cases:

The points where the diagram of C has vertical tangents are all confined to the x_0 -axis. Replace neighborhoods of such points in the diagram with cusped arcs as described in Figure 7. The second step however differs:

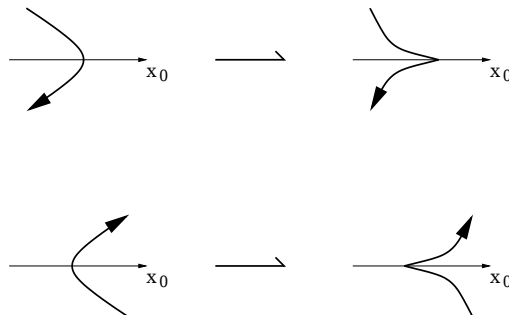


Figure 7: Replacing vertical tangencies with cusps

To obtain the front of Γ^+ we insert a zig-zag as in Figure 8 at all crossings in the lower half plane and keep the crossings in the upper half plane as they are.

To obtain the front of Γ^- we insert a zig-zag as in Figure 9 at all crossings in the upper half plane and keep the crossings in the lower half plane as they are.

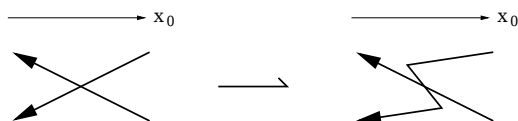


Figure 8: Inserting a zig-zag in the lower half plane

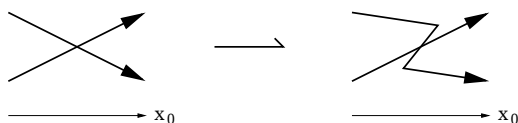


Figure 9: Inserting a zig-zag in the upper half plane

It is easy to check that Γ^- (Γ^+) is topologically isotopic to the knot C in $\mathbb{R}^3$ equipped with the orientation $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 > 0$ ($dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 < 0$).

3.C Proof of Theorem 1.2

Using Ω_2 -moves, we may obtain a closed braid representation of K . Equation (1.1) follows.

To prove (1.2), let $H_+(C)$ ($H_-(C)$) denote the number of intersection points of C in the upper (lower) half plane. Then $S(C) = H_-(C) - H_+(C)$. As noted before, $W(C)$ is the negative of the number of local minima of the function f giving rise to C .

Let Γ^+ and Γ^- be the Legendrian knots associated to C as in Subsection 3.B. Then

$$\begin{aligned} \text{Dcu}(\Gamma_F^+) &= -W(C) + 2H_-(C), \\ \text{Dcu}(\Gamma_F^-) &= -W(C) + 2H_+(C), \\ \text{Ucu}(\Gamma_F^+) &= \text{Ucu}(\Gamma_F^-) = -W(C), \end{aligned}$$

and hence

$$W(\Gamma_{\mathbb{C}}^+) = H_-(C), \quad (3.3)$$

$$W(\Gamma_{\mathbb{C}}^-) = H_+(C). \quad (3.4)$$

Also,

$$\begin{aligned} \text{Lcu}(\Gamma_F^+) &= -W(C) + H_-(C), \\ \text{Lcu}(\Gamma_F^-) &= -W(C) + H_+(C), \\ \text{Ecr}(\Gamma_F^+) &= \text{Ocr}(\Gamma_F^-) = H_+(C), \\ \text{Ecr}(\Gamma_F^-) &= \text{Ocr}(\Gamma_F^+) = H_-(C), \end{aligned}$$

and hence

$$S(\Gamma_{\mathbb{C}}^+) = H_+(C) - 2H_-(C) + W(C), \quad (3.5)$$

$$S(\Gamma_{\mathbb{C}}^-) = H_-(C) - 2H_+(C) + W(C). \quad (3.6)$$

Combining (3.3) and (3.5), respectively (3.4) and (3.6) with the Bennequin inequality (1.3) yields

$$\begin{aligned} -S(C) + W(C) &\leq 2g(K) - 1 \text{ and} \\ S(C) + W(C) &\leq 2g(K) - 1, \end{aligned}$$

since the genus does not depend on the orientation of the ambient space. The theorem follows. $\square$

4 Splitting the self linking number

Consider the diagram of a framed holonomic knot C . The x_0 -axis divides the diagram into cyclically ordered arcs (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, m$, where the X_i lies in the upper half plane, the Y_i in the lower, and where $-m = W(C)$.

Let $(A_i, A_j) = (X_i, X_j)$ or $(A_i, A_j) = (Y_i, Y_j)$ where $i \neq j$. Define

$$\delta(A_i, A_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial A_i \text{ is contained in an unbounded component of } \mathbb{R} - \partial A_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Define

$$N(A_i, A_j) = |A_i \cap A_j| + \delta(A_i, A_j),$$

where $|S|$ denotes the number of points in the set S .

Let $\tilde{X}_i$ and $\tilde{Y}_i$ denote the preimages of X_i and Y_i , for $i = 1, \dots, m$. Let x_i and y_i denote the midpoints of $\tilde{X}_i$ and $\tilde{Y}_i$, respectively.

Consider two arcs X_i and X_j , $i \neq j$. Let $\gamma(x_i, x_j)$ denote the unique oriented arc connecting x_i to x_j with orientation agreeing with that of the circle. Define the *cyclic distance of X_i and X_j* as

$$d(X_i, X_j) = \min \left\{ |\gamma(x_i, x_j) \cap \{y_1, \dots, y_m\}|, |\gamma(x_j, x_i) \cap \{y_1, \dots, y_m\}| \right\}.$$

Define the cyclic distance of arcs Y_i and Y_j analogously.

Definition 4.1 Define

$$S_k(C) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\{(Y_i, Y_j): d(Y_i, Y_j)=k\}} N(Y_i, Y_j) - \sum_{\{(X_i, X_j): d(X_i, X_j)=k\}} N(X_i, X_j) \right).$$

Remark 4.2 In terms of defining functions, the terms in the definition of S_k can be interpreted as follows. Let $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ be a function with associated framed holonomic knot C . Consider f as a periodic function with period T such that $f(0) = f(T)$ is the global minimum of f . Let $\Gamma_f \subset [0, T] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ denote the graph of f . Then the arcs X_i (Y_i) are the holonomic curves corresponding to restrictions of f to subintervals of $[0, T]$, where f is increasing (decreasing). If (x, y) are coordinates on $\mathbb{R}^2$ then $|A_i \cap A_j|$ equals the number of lines $l_a = \{y = a\}$, $a \in \mathbb{R}$ which intersect A_i and A_j at equal angles, and $\delta(A_i, A_j) = 1$ if no l_a intersect both A_i and A_j , otherwise it is 0.

4.A Proof of Theorem 1.3

We check that S_k is invariant under framed holonomic Reidemeister moves. For Ω_3 this is immediate.

An Ω_2^+ -move involving two arcs X and X' with distance $d(X, X') = k$ involves also two arcs Y and Y' with $d(Y, Y') = k$. At the move $\delta(X, X')$ and $\delta(Y, Y')$ are unchanged and the change in $|X \cap X'|$ and $|Y \cap Y'|$ are the same. Hence S_k remains constant.

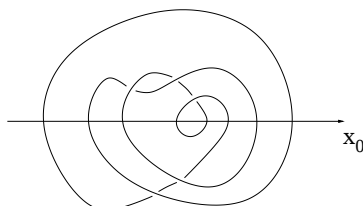
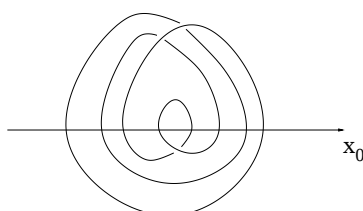
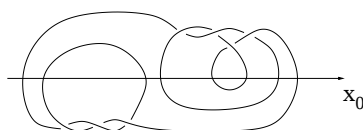
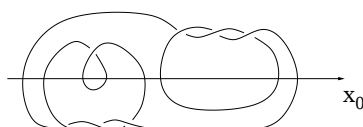
At an Ω_2^- -move involving arcs X and X' , Y and Y' the change in $|X \cap X'|$ and $|Y \cap Y'|$ equals the change in $\delta(X, X')$ and $\delta(Y, Y')$, respectively. Hence S_k remains constant.

To prove (1.4) note that by using the Ω_2 -moves we may move any framed holonomic knot diagram in such a way that its diagram is a closed braid with braid-axis parallel to the x_2 -direction. (The linking number of this axis oriented in the positive x_2 -direction and the holonomic knot with its natural orientation is negative.) Under such deformations both S and $S_1, \dots, S_n$, remain constant. Moreover for a diagram which is a closed braid $\delta(X_i, X_j) = \delta(Y_i, Y_j) = 0$ for all i, j . Hence both the left and right hand sides of (1.4) are equal to the difference of the number of double points in the lower and upper half planes. $\square$

5 Examples

The framed holonomic knots K_1 in Figure 10 and K_2 in Figure 11 both represent the unknot. Since $S(K_1) = S(K_2) = -1$ and $W(K_1) = W(K_2) = -4$, K_1 and K_2 are regularly isotopic. Since K_1 is a closed braid $\delta(X_i, X_j) = 0 = \delta(Y_i, Y_j)$ for all i, j . Noting that all three intersection points in the diagram of K_1 in the upper half plane are intersections between arcs of cyclic distance 1, and that the two intersection points in the lower half plane are intersections of arcs of cyclic distance 1 respectively 2, we conclude that $S_1(K_1) = -2$ and $S_2(K_1) = 1$. A similar calculation gives $S_1(K_2) = 0$ and $S_2(K_2) = -1$. Hence K_1 and K_2 are *not* framed holonomically isotopic.

The framed holonomic knots K_3 in Figure 12 and K_4 in Figure 13 both represent the connected sum of the trefoil and its mirror image. Since $S(K_3) = S(K_4) = -1$ and $W(K_3) = W(K_4) = -4$, K_3 and K_4 are regularly isotopic. However, $S_1(K_3) = 0$ and $S_2(K_3) = -1$ but $S_1(K_4) = -4$ and $S_2(K_4) = 3$ so K_3 and K_4 are *not* framed holonomically isotopic.

Figure 10: The framed holonomic knot K_1 Figure 11: The framed holonomic knot K_2 Figure 12: The framed holonomic knot K_3 Figure 13: The framed holonomic knot K_4

References

- [1] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Soc. Math. de France, Astérisque **107–108** (1983) 87–161.
- [2] J. S. Birman and N. C. Wrinkle, *Holonomic and Legendrian parametrizations of knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), 293–309.
- [3] L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (1991).

- [4] B. Trace, *On the Reidemeister moves of a classical knot*, Proc. Amer. math. Soc. **89** (1983) 722–724.
- [5] V. A. Vassiliev, *Holonomic links and Smale principles for multisingularities*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997) 115–123.
- [6] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Composito Math. **4** (1936) 276–284.

Department of Mathematics, Uppsala University

P.O. Box 480, 751 06 Uppsala, Sweden

and

Département de Mathématiques et Informatique, Ecole Normale Supérieure de Lyon

46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cédex 07, France

Email: tobias@math.uu.se, mwolff@ens-lyon.fr

Received: 11 December 2001 Revised: 17 May 2002

Bibliographie

- [Abi80] William ABIKOFF : *The real analytic theory of Teichmüller space*, volume 820 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Ahl64] Lars V. AHLFORS : Finitely generated Kleinian groups. *Amer. J. Math.*, 86:413–429, 1964.
- [AM85] Roger C. ALPERIN et Kenneth N. MOSS : Complete trees for groups with a real-valued length function. *J. London Math. Soc. (2)*, 31(1):55–68, 1985.
- [Bau62] Gilbert BAUMSLAG : On generalised free products. *Math. Z.*, 78:423–438, 1962.
- [Ber71] George M. BERGMAN : The logarithmic limit-set of an algebraic variety. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157:459–469, 1971.
- [Bes88] Mladen BESTVINA : Degenerations of the hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 56(1):143–161, 1988.
- [BGSS06] Emmanuel BREUILLARD, Tsachik GELANDER, Juan SOUTO et Peter STORM : Dense embeddings of surface groups. *Geom. Topol.*, 10:1373–1389 (electronic), 2006.
- [BH01] K. BROMBERG et J. HOLT : Self-bumping of deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 57(1):47–65, 2001.
- [Bou71] N. BOURBAKI : *Topologie générale, chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [BP92] Riccardo BENEDETTI et Carlo PETRONIO : *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Cal04] Danny CALEGARI : Circular groups, planar groups, and the Euler class. In *Proceedings of the Casson Fest*, volume 7 de *Geom. Topol. Monogr.*, pages 431–491 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004.
- [CG05] Christophe CHAMPETIER et Vincent GUIARDEL : Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146:1–75, 2005.
- [CM87] Marc CULLER et John W. MORGAN : Group actions on $\mathbf{R}$ -trees. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(3):571–604, 1987.
- [CS83] Marc CULLER et Peter B. SHALEN : Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1):109–146, 1983.
- [DK06] Jason DEBLOIS et Richard P. KENT, IV : Surface groups are frequently faithful. *Duke Math. J.*, 131(2):351–362, 2006.
- [EHN81] David EISENBUD, Ulrich HIRSCH et Walter NEUMANN : Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle. *Comment. Math. Helv.*, 56(4):638–660, 1981.

- [FLP91] FATHI, LAUDENBACH et POENARU, éditeurs. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Société Mathématique de France, Paris, 1991. Séminaire Orsay, Reprint of *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Soc. Math. France, Paris, 1979 [MR0568308 (82m :57003)], Astérisque No. 66-67 (1991).
- [Fre96] Jean FRESNEL : *Méthodes modernes en géométrie*. Hermann, Paris, 1996.
- [FW07] Louis FUNAR et Maxime WOLFF : Non-injective representations of a closed surface group into $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 142(2):289–304, 2007.
- [GdlH90] É. GHYS et P. de la HARPE, éditeurs. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [Ghy87a] Étienne GHYS : Classe d'Euler et minimal exceptionnel. *Topology*, 26(1):93–105, 1987.
- [Ghy87b] Étienne GHYS : Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. In *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, volume 58 de *Contemp. Math.*, pages 81–106. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Glu04] Alexey GLUTSYUK : Instability of nondiscrete free subgroups in lie groups, 2004. math.DS/0409556.
- [Gol80] William M. GOLDMAN : *Discontinuous groups and the Euler class*. Thèse de doctorat, Berkeley, 1980.
- [Gol84] William M. GOLDMAN : The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2):200–225, 1984.
- [Gol88] William M. GOLDMAN : Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3):557–607, 1988.
- [Gol06] William M. GOLDMAN : Mapping class group dynamics on surface group representations. In *Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 189–214. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Got01] Peter B. GOTHEN : Components of spaces of representations and stable triples. *Topology*, 40(4):823–850, 2001.
- [Gui98] Vincent GUIARDEL : Approximations of stable actions on $\mathbf{R}$ -trees. *Comment. Math. Helv.*, 73(1):89–121, 1998.
- [Gui04] Vincent GUIARDEL : Limit groups and groups acting freely on $\mathbb{R}^n$ -trees. *Geom. Topol.*, 8:1427–1470 (electronic), 2004.
- [Hit87] N. J. HITCHIN : The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(1):59–126, 1987.
- [Hub06] John Hamal HUBBARD : *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.

- [Iva02] Nikolai V. IVANOV : Mapping class groups. *In Handbook of geometric topology*, pages 523–633. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Kat92] Svetlana KATOK : *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [KL95] M. KAPOVICH et B. LEEB : On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 5(3):582–603, 1995.
- [LP97] Gilbert LEVITT et Frédéric PAULIN : Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1):83–102, 1997.
- [Mag73] W. MAGNUS : Rational representations of Fuchsian groups and non-parabolic subgroups of the modular group. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. II*, pages 179–189, 1973.
- [Mas85] Howard MASUR : Ergodic actions of the mapping class group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(3):455–459, 1985.
- [Mat87] Shigenori MATSUMOTO : Some remarks on foliated S^1 bundles. *Invent. Math.*, 90(2):343–358, 1987.
- [Mil58] John MILNOR : On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.*, 32:215–223, 1958.
- [ML95] Saunders MAC LANE : *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.
- [Mor86] John W. MORGAN : Group actions on trees and the compactification of the space of classes of $SO(n, 1)$ -representations. *Topology*, 25(1):1–33, 1986.
- [MS84] John W. MORGAN et Peter B. SHALEN : Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)*, 120(3):401–476, 1984.
- [Par] Anne PARREAU : Compactification d’espaces de représentations de groupes de type fini. Preprint disponible sur [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parreau](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parreau).
- [Par00] Anne PARREAU : *Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines*. Thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.
- [Pau88] Frédéric PAULIN : Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.*, 94(1):53–80, 1988.
- [Pau89] Frédéric PAULIN : The Gromov topology on $\mathbf{R}$ -trees. *Topology Appl.*, 32(3):197–221, 1989.
- [Pau04] Frédéric PAULIN : Sur la compactification de Thurston de l’espace de Teichmüller, 2004. Notes de l’école d’été, Grenoble, disponible sur [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr).
- [Sco78] Peter SCOTT : Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(3):555–565, 1978.
- [Sel60] Atle SELBERG : On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *In Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, pages 147–164. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

- [Sel01] Zlil SELA : Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 93:31–105, 2001.
- [Sko96] Richard K. SKORA : Splittings of surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):605–616, 1996.
- [Sul85] Dennis SULLIVAN : Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups. *Acta Math.*, 155(3-4):243–260, 1985.
- [Tan94] Ser Peow TAN : Branched $\mathbf{CP}^1$ -structures on surfaces with prescribed real holonomy. *Math. Ann.*, 300(4):649–667, 1994.
- [Thu] W.P. THURSTON : 3-manifolds, foliations and circles II. preprint.
- [Thu88] William P. THURSTON : On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.
- [Thu97] William P. THURSTON : *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Wol] Maxime WOLFF : Connected components of the compactification of representation spaces of surface groups. En préparation.
- [Woo71] John W. WOOD : Bundles with totally disconnected structure group. *Comment. Math. Helv.*, 46:257–273, 1971.

RÉSUMÉ

Notons R_g l'espace des représentations d'un groupe de surface de genre g dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Un théorème de W. Goldman affirme que l'espace R_g possède $4g - 3$ composantes connexes, indexées par la classe d'Euler $e: R_g \rightarrow \mathbb{Z}$, soumise à l'inégalité de Milnor-Wood. Il en va de même pour le quotient $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$, dans lequel les composantes de classes d'Euler extrêmes s'identifient à l'espace de Teichmüller de la surface, et sont constituées de toutes les représentations fidèles et discrètes. Dans un premier temps, nous montrons que l'ensemble des représentations non-injectives est dense dans les autres composantes connexes, et que l'ensemble des représentations d'image discrète ou élémentaire est un fermé d'intérieur vide dans ces composantes exotiques. Nous considérons ensuite la compactification de M. Bestvina et F. Paulin de l'espace $R_g/PSL(2, \mathbb{R})$, qui généralise la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. Nous montrons que cette compactification est très dégénérée, et qu'il est beaucoup plus naturel de considérer une compactification, raffinée, qui garde en mémoire l'orientation du plan.

MOTS-CLÉS

Arbres réels, espaces de Teichmüller, compactification d'espaces de représentations, groupes fuchsien, classe d'Euler.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

20H10, 30F45, 30F60, 32G15, 53C23, 54D35, 58D27.