

FEUILLE 1 : (G, X) -structures

Soit X une variété connexe, simplement connexe, et G un groupe agissant sur X . On suppose que l'action de tout élément de G est déterminée localement, autrement dit : pour tous $g_1, g_2 \in G$, s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $g_1|_U = g_2|_U$ alors $g_1 = g_2$.

Définition Une (G, X) -structure sur une variété M est la donnée d'un atlas (U_i, ϕ_i) , où $\cup U_i$ est un recouvrement ouvert de M , $\phi_i: U_i \rightarrow X$ est un homéomorphisme sur son image, et où les applications de changement de cartes $\phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ sont des restrictions d'éléments de G .

Bien entendu, on identifiera deux (G, X) -structures sur une même variété si elles sont données par des atlas compatibles.

Exercice 1

- 1) Le groupe additif \mathbb{R} agit sur la variété \mathbb{R} par translations. Montrer que le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est muni naturellement d'une (\mathbb{R}, \mathbb{R}) -structure.
- 2) Montrer que le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ porte une $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -structure naturelle.

On va généraliser cet exemple.

On dit qu'une action d'un groupe Γ sur l'espace X est :

- *libre*, si aucun élément non-trivial de Γ n'a de points fixes,
- *discontinue*, si pour toute partie compacte $K \subset X$, l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $K \cap \gamma K \neq \emptyset$ est fini.

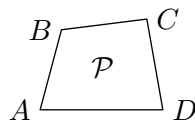
Exercice 2

Montrer que si un sous-groupe Γ de G agit librement et discontinûment sur X , alors le quotient X/Γ est une variété, l'application $X \rightarrow X/\Gamma$ est un revêtement, et X/Γ porte une (G, X) -structure naturelle.

Ceci fournit beaucoup d'exemples de (G, X) -structures. Mais il y en a d'autres :

Exercice 3

Notons \mathcal{A} le groupe des similitudes directes du plan euclidien. On considère un quadrilatère plein, convexe, non dégénéré, \mathcal{P} .



Vérifier qu'il existe une unique similitude directe γ_1 qui envoie le segment (orienté) AB sur DC , et une unique similitude directe γ_2 qui envoie AD sur BC . On note \sim la relation d'équivalence sur \mathcal{P} engendrée par :

si $x, \gamma_i x \in \mathcal{P}$ ($i = 1, 2$), $x \sim \gamma_i x$.

Montrer que le quotient \mathcal{P}/\sim porte une $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$ -structure naturelle.

Soit Γ le groupe engendré par γ_1 et γ_2 : agit-il nécessairement librement et discontinûment sur \mathbb{R}^2 ? (à quelle condition est-ce le cas ?)

Exercice 4 (*application développante et holonomie*)

Soit M une variété connexe munie d'une (G, X) -structure. On fixe un point-base $x_0 \in M$, ainsi qu'une carte (U_0, ϕ_0) telle que $x_0 \in U_0$.

1) Soit $c: [0, 1] \rightarrow M$ une application continue telle que $c(0) = x_0$. Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un ouvert de carte U_α et un intervalle $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\cap [0, 1]$ dont l'image par c est contenue dans U_α : il existe donc une subdivision finie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$, et des ouverts de carte U_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, tels que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, les ouverts U_i et U_{i+1} s'intersectent, donc il existe $g_{i,i+1} \in G$ tel que l'application $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}: \phi_{i+1}(U_i \cap U_{i+1}) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_{i+1})$ coïncide avec $g_{i,i+1}$.

Si $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on pose $f(t) = g_{0,1} \cdots g_{i-1,i} \cdot \phi_i(c(t))$.

a) Vérifier que f est bien définie en chaque point t_1, \dots, t_n .

b) Montrer que f ne dépend pas des choix des cartes ϕ_1, \dots, ϕ_n , et définit bien une application $[0, 1] \rightarrow X$, telle que $f(0) = \phi_0(x_0)$.

2) Si en plus c est un lacet (i.e. si $c(1) = x_0$), on impose $U_n = U_0$, et on pose $\rho(c) = g_{0,1} \cdots g_{n-1,n} \in G$.

Montrer que cet élément de G est bien défini (i.e. ne dépend pas des choix des cartes).

3) a) Soient c_1, c_2 deux chemins partant de x_0 , homotopes relativement à leurs extrémités. On construit $f_1, f_2: [0, 1] \rightarrow X$ à partir de c_1, c_2 , comme dans la question 1. Montrer que $f_1(1) = f_2(1)$.

b) En déduire une application $D: \widetilde{M} \rightarrow X$.

C'est l'application développante associée au choix de x_0 et ϕ_0 .

c) Si c est un lacet, montrer que $\rho(c)$ (construit à la question 2) ne dépend que de la classe d'homotopie de c .

Montrer que $\rho([c]) \cdot D(x_0) = D([c] \cdot x_0)$. Montrer que ρ définit un morphisme $\pi_1(M, x_0) \rightarrow G$.

C'est l'application d'holonomie associée au choix de x_0 et ϕ_0 .

4) Si on modifie x_0 et ϕ_0 , qu'arrive-t-il à D et ρ ?

Si on suppose que D est un homéomorphisme, montrer que ρ est un morphisme injectif.

Exercice 5 (*application développante, suite*)

Vérifier que $D: \widetilde{M} \rightarrow X$ est un homéomorphisme local. Est-elle nécessairement injective ? Surjective ?

Dans le cas de l'exercice 2, montrer que D est un homéomorphisme et que ρ est un isomorphisme sur Γ .

Si, comme dans l'exercice 2, l'application développante est un homéomorphisme, on parle de (G, X) -structure *complète*.

On suppose maintenant que X est muni d'une métrique (riemannienne) et que G agit par isométries. On suppose aussi que G agit transitivement sur X .

Exercice 6 Soit M une variété compacte, munie d'une (G, X) -structure.

- 1) Montrer qu'on peut munir naturellement M et \widetilde{M} de métriques riemanniennes. Montrer que $D: \widetilde{M} \rightarrow X$ est une isométrie locale.
 - 2) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \widetilde{M}$, la restriction de D à $B(y, \varepsilon)$ est une isométrie.
 - 3) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un voisinage U de x tel que $D^{-1}(U)$ soit une union disjointe de copies de U .
 - 4) En déduire que D est un homéomorphisme.
-

Dans les feuilles suivantes et en cours, on verra / rappellera que $PSL(2, \mathbb{R})$ est le groupe des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . On verra qu'un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ agit discontinûment sur \mathbb{H}^2 si et seulement s'il est discret. On verra qu'une représentation fidèle (injective) et discrète d'un groupe sans torsion dans $PSL(2, \mathbb{R})$ définit une action libre sur le plan hyperbolique. On verra aussi qu'on reconnaît une surface fermée, parmi toutes les surfaces, à son groupe fondamental.

Maintenant, fixons une surface fermée Σ : étant donnée une $(PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$ -structure sur Σ , son holonomie définit une classe de conjugaison (exercice 4, 4)) de représentations fidèles et discrètes (d'après ce qui précède, et les exercices 6 et 4-3c)). Réciproquement, une classe de représentations fidèles et discrètes donne lieu, grâce à l'exercice 2, à une $(PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$ -structure sur le quotient $\mathbb{H}^2/\rho(\pi_1\Sigma)$: d'après cet exercice, ce quotient est une surface dont le groupe fondamental est isomorphe à $\pi_1\Sigma$, donc c'est une surface homéomorphe à Σ , d'après ce qui précède, et on a une $(PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$ -structure sur Σ .

On a ainsi établi une correspondance entre $(PSL(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$ -structures sur une surface Σ , et l'ensemble des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de $\pi_1\Sigma$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

Indications bibliographiques.

- On trouvera un point de vue légèrement différent, et beaucoup plus de détails, dans le chapitre 8 du livre “Foundations of hyperbolic manifolds” de John Ratcliffe, chez Springer.
- On trouvera un point de vue un peu plus général, et un grand nombre d'exemples, dans le chapitre 3 du merveilleux livre “Three-Dimensional Geometry and Topology” de William Thurston, chez Princeton University Press. C'est la source principale de cette feuille de TD.

FEUILLE 2 : Géométrie hyperbolique plane

Dans cette feuille on utilise le modèle du demi-plan supérieur. La métrique s'écrit $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Exercice 1 (géodésiques)

1) Calculer la longueur d'un segment vertical.

Montrer que deux points sur une même verticale sont reliés par un unique segment géodésique.

2) Montrer que $PSL(2, \mathbb{R})$ agit par isométries sur \mathbb{H}^2 .

3) Déterminer toutes les géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Exercice 2 (éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$)

Soit $\pm A \in PSL(2, \mathbb{R})$. On suppose $\pm A \neq \pm I$.

1) Vérifier que $\pm A$ admet :

- exactement un point fixe dans \mathbb{H}^2 et aucun dans $\partial\mathbb{H}^2$, si et seulement si $|tr(A)| < 2$,
- exactement un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^2$, et aucun dans \mathbb{H}^2 , si et seulement si $|tr(A)| = 2$,
- exactement deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^2$, et aucun dans \mathbb{H}^2 , si et seulement si $|tr(A)| > 2$.

L'élément $\pm A$ est appelé *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* dans ces trois cas respectifs. Dans le troisième cas, la géodésique reliant les deux points fixes de $\pm A$ dans $\partial\mathbb{H}^2$ est appelée *l'axe* de $\pm A$.

2) Dans chacun des cas, ramener A , par conjugaison, à une forme plus simple. Dans le cas où A est hyperbolique, relier $|tr A|$ à une distance dans \mathbb{H}^2 .

Dans chacun des cas, si $x \in \mathbb{H}^2$, discuter de la trajectoire $(A^n \cdot x)_{n \in \mathbb{Z}}$.

3) Trouver une homographie de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie \mathbb{H}^2 sur le disque unité $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, en envoyant i sur 0.

Exprimer la rotation de centre 0 et d'angle θ comme une matrice 2×2 . En se ramenant à une rotation d'angle i , quelle matrice obtient-on ? Comment agit la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ sur le plan hyperbolique ?

Retrouver cette interprétation en dérivant cette homographie.

Exercice 3 (représentation adjointe)

1) Vérifier que $PSL(2, \mathbb{R})$ agit sur $sl(2, \mathbb{R})$ par conjugaison. Vérifier que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

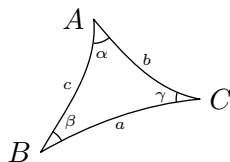
est une base de $sl(2, \mathbb{R})$, et, si $\pm A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, écrire l'action de $\pm A$ dans cette base.

2) Ecrire l'action de $\pm A$ si $A = \begin{pmatrix} e^{d/2} & 0 \\ 0 & e^{-d/2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cosh d/2 & \sinh d/2 \\ \sinh d/2 & \cosh d/2 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}$.

3) Vérifier que $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $sl(2, \mathbb{R})$. Ecrire sa matrice dans la base donnée plus haut. (Quelle est sa signature?)

Exercice 4 (*trigonométrie*)

On considère un triangle ABC de côtés de longueurs $a, b, c > 0$ et d'angles opposés $\alpha, \beta, \gamma > 0$.



L'objectif de cet exercice est de trouver des relations reliant a, b, c et α, β, γ .

- 1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $A = i$, $\text{Re}(B) = 0$, $\text{Im}(B) < 1$ et $\text{Re}(C) > 0$.
- 2) On note R_θ la rotation de centre i et d'angle (orienté) θ , et on note T_h l'élément hyperbolique de $PSL(2, \mathbb{R})$ de point fixe répulsif 0 , de point fixe attractif ∞ et qui envoie i à distance h .

Montrer que

$$R_{\pi+\alpha} \cdot T_b \cdot R_{\pi+\gamma} \cdot T_a \cdot R_{\pi+\beta} \cdot T_c = \pm I.$$

- 3) Montrer les formules de trigonométrie :

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c},$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Que donnent ces formules sur des triangles de très petit diamètre?

Remarquer qu'un triangle, à isométrie près, est uniquement déterminé par ses angles.

Exercice 5 (*distances de déplacement*)

Si $\pm A$ est une isométrie elliptique (resp. hyperbolique), et si $x \in \mathbb{H}^2$, donner une formule reliant $d(x, A \cdot x)$, la distance de x au point fixe de A (resp. à l'axe de A) et $|\text{tr} A|$.

Exercice 6 (*aire des triangles*)

On considère un triangle d'angles α, β, γ . Montrer que son aire vaut $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Indication : on commencera par calculer cette aire lorsqu'un des trois angles est nul (lorsque les trois angles sont nuls, on parle de triangle *idéal*).

Exercice 7 (*distances entre géodésiques*)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ quatre points distincts de $\partial \mathbb{H}^2$. On suppose que les géodésiques (a, b) et (c, d) ne s'intersectent pas.

Trouver une formule reliant la distance entre ces deux géodésiques, et le *birapport* $[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$.

Montrer que $PSL(2, \mathbb{R}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

Exercice 8 (*toutes les isométries*)

1) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est de déterminant -1 , on pose $A \cdot z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. Montrer que cette action préserve \mathbb{H}^2 . Montrer que A fixe exactement deux points a_1, a_2 de $\partial\mathbb{H}^2$, et que A est conjugué (par $PSL(2, \mathbb{R})$) à $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1/\lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda > 0$. Interpréter cette action de A sur le plan hyperbolique.

Si $\lambda = 1$, autrement dit si $tr(A) = 0$, l'isométrie $\pm A$ est appelée une *inversion* d'axe (a_1, a_2) .

2) Vérifier que tout élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ est la composée de deux inversions.

Indications bibliographiques.

- Cette feuille d'exercices s'inspire, dans une grande mesure, du livre "Fuchsian groups", de Svetlana Katok, chez Chicago University Press.
- On trouvera quelques compléments, et beaucoup de dessins, dans le livre "Three-dimensional Geometry and Topology" de William Thurston, chez Princeton University Press.

FEUILLE 3 : Groupes fuchsien

Exercice 1 (*le lemme du ping-pong de Felix Klein*)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X , soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes de G , et soit Γ le sous-groupe de G engendré par Γ_1 et Γ_2 . On suppose qu'il existe des parties X_1, X_2 de X non vides, avec X_2 non inclus dans X_1 , tels que

$$\begin{aligned} \gamma(X_2) &\subset X_1, \forall \gamma \in \Gamma_1 \setminus \{1\}, \\ \gamma(X_1) &\subset X_2, \forall \gamma \in \Gamma_2 \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

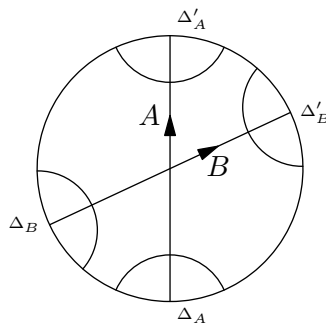
On suppose en outre que Γ_1 contient au moins trois éléments.

Montrer que $\Gamma \simeq \Gamma_1 \star \Gamma_2$.

(Peut-on se passer de l'hypothèse que Γ_1 (ou Γ_2) contient au moins trois éléments?)

Exercice 2 (*groupes de Schottky*)

Soient $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ deux éléments hyperboliques, tels qu'il existe des régions $\Delta_A, \Delta'_A, \Delta_B, \Delta'_B$ disjointes, telles que $A(\mathbb{H}^2 \setminus \overline{\Delta_A}) = \Delta'_A$ et $B(\mathbb{H}^2 \setminus \overline{\Delta_B}) = \Delta'_B$.



Montrer que A et B engendrent un groupe libre dans $PSL(2, \mathbb{R})$, et montrer que ce groupe est discret.

Exercice 3 (*une étude de commutateurs*)

1) Soient $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ deux éléments hyperboliques; quitte à les conjuguer simultanément on supposera $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 1$.

- 1) Caractériser, en termes des coefficients de B , le fait que les axes de A et B se croisent dans \mathbb{H}^2 .
- 2) On suppose que les axes de A et B se croisent. Discuter de l'isométrie $[A, B]$, lorsque λ parcourt $]1, +\infty[$, à B fixé.

Dans le cas où B est sous la forme $\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$, on illustrera les différents cas sur un dessin.

Exercice 4

On dit qu'un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est *élémentaire* s'il a une orbite finie dans $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Montrer que tout sous-groupe non-élémentaire, non discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ contient des éléments elliptiques.

Exercice 5 (covolume)

1) Soient P_1 et P_2 deux domaines fondamentaux d'un même groupe fuchsien Γ . On suppose que $\mu(\partial P_1) = \mu(\partial P_2) = 0$.

Montrer que $\mu(P_1) = \mu(P_2)$ (que cette aire soit finie ou non).

2) Soit Γ_1 un groupe fuchsien, et soit Γ_2 un sous-groupe d'indice fini (disons, $d \geq 1$) de Γ_1 . Soient P_1 et P_2 des domaines fondamentaux, respectivement, pour Γ_1 et Γ_2 , tels que $\mu(\partial P_1) = \mu(\partial P_2) = 0$. Quelle est la relation entre $\mu(P_1)$ et $\mu(P_2)$?

Exercice 6 (groupes de surfaces, groupes triangulaires)

1) Vérifier qu'aucun groupe fuchsien n'est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Montrer que, dès que $g \geq 2$, il existe un groupe fuchsien isomorphe à $\pi_1 \Sigma_g$. Quelle est l'aire d'un domaine fondamental ?

2) Soient k_1, k_2, k_3 trois entiers tels que $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$. Montrer qu'il existe un triangle hyperbolique d'angles $\frac{\pi}{k_1}, \frac{\pi}{k_2}, \frac{\pi}{k_3}$; notons-le ABC .

Montrer que le groupe engendré par les réflexions (les inversions) d'axes (AB) , (AC) et (BC) forme un sous-groupe discret de $Isom(\mathbb{H}^2)$, dont on donnera une présentation. Donner une présentation de son sous-groupe d'indice 2 formé uniquement d'isométries préservant l'orientation. En donner un domaine fondamental. Quelle est son aire ? (comparer avec la question 2 de l'exercice 5).

3) (*pour les plus courageux*). À la lumière du théorème de Selberg énoncé plus bas, montrer que tout groupe triangulaire admet un sous-groupe de surface compacte d'indice fini. Pour k_1, k_2, k_3 explicites, déterminer explicitement un tel sous-groupe.

Indications bibliographiques.

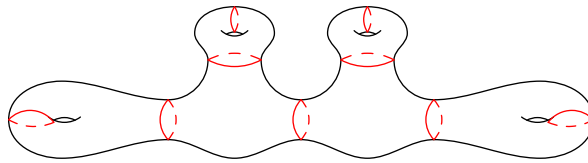
- On peut imaginer plusieurs formulations du lemme du ping-pong. Celle de l'exercice 1 est tirée du magnifique livre "Topics in Geometric Group Theory" de Pierre de la Harpe, chez Chicago University Press.
- On trouvera beaucoup de calculs explicites (dans l'esprit de l'exercice 3, entre autres) dans le livre "The Geometry of Discrete Groups", de Alan Beardon, chez Springer.
- L'exercice 4 est particulier à la dimension 2. Dès que $n \geq 3$, il existe des sous-groupes non discrets et non élémentaires dans $Isom^+(\mathbb{H}^n)$, contenant uniquement des éléments loxodromiques, hormis l'identité; voir L. Greenberg, *Discrete subgroups of the Lorentz group*, *Mathematica Scandinavica* **10** (1962), 85–107.

- L'énoncé de l'exercice 4 peut être précisé; il l'est fait, dans de nombreux ouvrages, en utilisant le théorème suivant, d'Atle Selberg : tout sous-groupe de type fini de $GL(n, \mathbb{C})$ admet un sous-groupe sans torsion d'indice fini. Exercice facile : à l'aide de ce théorème, montrer qu'un sous-groupe non élémentaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ est non discret si et seulement s'il contient un élément elliptique d'ordre infini.
- Pour aller plus loin que l'exercice 6, on trouvera une description systématique des groupes fuchsien de covolume fini dans le livre "Fuchsian groups", de Svetlana Katok, chez Chicago University Press : il sera très profitable d'en lire la section 4.3.
- On trouvera de nombreux dessins de groupes triangulaires dans l'œuvre du dessinateur M. C. Escher. Un de ces dessins est repris, et analysé, à la page 101 du livre "Teichmüller Theory" de John Hubbard, chez Matrix editions.

FEUILLE 4 : Coordonnées de Fenchel-Nielsen

L'objectif de cette feuille est de montrer que l'espace $\mathcal{X}_g = Hom^{fd}(\pi_1 \Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R})) / Isom(\mathbb{H}^2)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} , en le munissant de $6g - 6$ coordonnées, dont la nature consiste à mesurer des longueurs sur les surfaces hyperboliques.

Fixons un découpage de Σ_g en pantalons, comme suit :



Exercice 1

Vérifier que le nombre de courbes rouges vaut $3g - 3$.

Notons-les C_1, \dots, C_{3g-3} .

Comme on l'a vu en cours, chacune de ces courbes est librement homotope à une géodésique, de longueur $\ell([C_i])$.

Vérifier que l'application

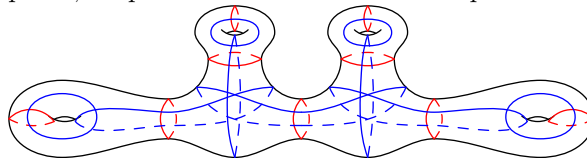
$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{X}_g &\rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \\ [\rho] &\mapsto (\ell(C_1), \dots, \ell(C_{3g-3})) \end{aligned}$$

est continue.

(On pourra exprimer chaque $\ell(C_i)$ comme une fonction de type trace).

Nous allons montrer que Φ est surjective, et que ses fibres sont homéomorphes à \mathbb{R}^{3g-3} . Plus précisément, nous allons dire les choses suivantes.

- Les longueurs des courbes rouges définissent $3g - 3$ paramètres, qui peuvent prendre toutes les valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Ces longueurs déterminent entièrement la géométrie de chaque pantalon. Pour cela, nous allons étudier la géométrie des pantalons hyperboliques, dans l'exercice 3.
- Chaque recollement, le long de chaque courbe rouge, peut se voir au revêtement universel comme le recollement de deux demi-plans ; un paramètre réel est nécessaire pour cela.



Les courbes bleues servent à donner une origine à ce paramètre réel, que nous relierons à la longueur des courbes bleues, dans les exercices 6 et 7.

- En termes de traces de matrices, nous écrirons alors, dans l'exercice 8, cette fonction de coordonnées de Fenchel-Nielsen $\mathcal{X}_g \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$.
 - Enfin, dans l'exercice 9, nous écrirons explicitement une représentation (via quatre matrices) associée à tout choix de coordonnées dans $(\mathbb{R}_+^*)^3 \times \mathbb{R}^3$. On se convaincra alors facilement que pour tout $g \geq 2$, on est capable d'écrire l'application inverse $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathcal{X}_g$: l'application des coordonnées de Fenchel-Nielsen est un homéomorphisme.
-

Avant tout, nous devons établir quelques formules.

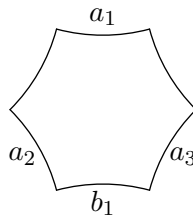
Exercice 2 (*produits d'isométries hyperboliques*)

- 1) Soient A et B deux isométries hyperboliques dont les axes se croisent dans \mathbb{H}^2 . Montrer que AB est hyperbolique, et montrer que les axes de A , B et AB forment un triangle, dont on déterminera les longueurs. En déduire une relation entre $|tr(AB)|$, $|tr(A)|$, $|tr(B)|$ et l'angle entre les axes (orientés) de A et de B .
- 2) On suppose que les axes de A et de B ne se croisent pas, et pointent dans le même sens. Exprimer la distance de translation de AB en fonction de celles de A et de B et de la distance entre leurs axes.
- 3) On suppose que les axes de A et de B ne se croisent pas, et sont dirigés "tête bêche". On suppose aussi que AB est hyperbolique, et que son axe est dans la région du plan entre l'axe de A et celui de B . Exprimer la distance de translation de AB en fonction de celles de A et de B et de la distance entre leurs axes.

Indication. Dans chacune de ces questions, on tâchera de décomposer A et B en produit de symétries convenables. Dans les questions 2 et 3, on pourra conjuguer A à une matrice 2×2 la plus simple possible, et tenter d'exprimer B assez simplement.

Exercice 3 (*l'espace des pantalons hyperboliques*)

- 1) (*hexagones droits*)
 - a) Soient a_1, a_2, a_3 trois nombres réels strictement positifs. Montrer qu'il existe un hexagone à angles droits dont les côtés alternés sont de longueurs a_1, a_2, a_3 .
 - b) Dans la figure ci-dessous,



montrer la formule :

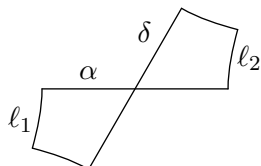
$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 = \cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3.$$

- 2) (*pantalons hyperboliques*)

Montrer que l'application qui à un pantalon hyperbolique, à bord géodésique, associe les longueurs de ses trois composantes de bord, est une bijection de l'ensemble des pantalons hyperboliques (modulo isométrie) et $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

3) (*hexagones tirebouchonnés*)

Dans la figure ci-dessous,



montrer la formule :

$$\cosh \alpha \sinh l_1 \sinh l_2 = \cosh \delta - \cosh l_1 \cosh l_2.$$

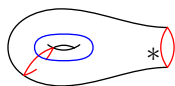
On vérifiera que pour tous l_1, l_2 et α strictement positifs, cette figure est bien réalisée.

Indication. Faire l'exercice précédent avant celui-ci.

Nous allons maintenant dessiner quelques courbes sur les surfaces, pour étudier l'action des twists sur les images des générateurs a_i, b_i .

Exercice 4 (*tore troué*)

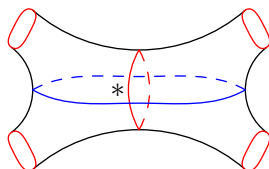
1) Dans la figure ci-dessus,



dessiner des lacets a_1, b_1 basés en $*$ tels que $[a_1, b_1] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ soit librement homotope à la courbe rouge de bord (orientée).

2) Que deviennent a_1 et b_1 après un twist de Dehn le long de la courbe rouge dans l'anse ? Que devient $[a_1, b_1]$?

Exercice 5 (*sphère à quatre trous*)



1) Donner une présentation du groupe fondamental de la sphère à quatre trous, en termes de quatre courbes basées en $*$, librement homotopes, respectivement, à chaque composante de bord. On notera ces quatre courbes a, b, c, d .

2) Sous l'action d'un twist de Dehn le long de la courbe rouge du milieu, donner l'image de a, b, c, d . Donner l'image de bc .

Si M est une matrice d'un élément hyperbolique, et si $t \in \mathbb{R}$, on notera ${}_tM$ l'élément hyperbolique de même axe que M , de distance de translation $|t|$, et de même direction que M si $t > 0$.

Suite aux deux exercices précédents, on se convaincra que, dans un tore troué, ajouter α au paramètre de twist revient à remplacer $\rho(b_i)$ par $\rho(b_i) \cdot {}_\alpha\rho(a_i)$, et que dans une sphère à quatre trous, ajouter α au paramètre de twist revient (pour ce qui est de la courbe bleue concernée) à remplacer $\rho(bc)$ par $\rho(b) \cdot {}_\alpha\rho(ab) \cdot \rho(c) \cdot {}_{-\alpha}\rho(ab)$.

Dans ces deux cas respectifs, nous allons maintenant donner une origine à ces paramètres de twist (la valeur qui minimise la longueur de la courbe bleue), puis trouver le paramètre de twist en fonction des traces des matrices.

Dans les deux exercices qui viennent, on se donne un élément ρ de $Hom^{fd}(\pi_1\Sigma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$.

Exercice 6 (*cas du tore troué*)

On pose ici $A_i = \rho(a_i)$ et $B_i = \rho(b_i)$. Notre objectif est d'obtenir le paramètre de twist dans la i -ème anse en fonction de (traces de) ces matrices.

1) Montrer qu'il existe un unique paramètre $-\alpha$ tel que les axes de A_i et de $B_i \cdot {}_{-\alpha}A_i$ soient orthogonaux. Vérifier que ce $-\alpha$ minimise la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto |tr(B_i \cdot {}_tA_i)|$.

On note $B'_i = B_i \cdot {}_{-\alpha}A_i$, pour ce α . Le réel α est le paramètre de twist recherché.

2) Exprimer $|tr(B_i)|$ et $|tr(B_iA_i)|$ en fonction de $|tr(B'_i)|$ et de α . En déduire une expression de α en fonction de $|tr(A_i)|$, $|tr(B_i)|$ et $|tr(B_iA_i)|$.

Exercice 7 (*cas de la sphère à quatre trous*)

On reprend les notations de l'exercice 5, et on note $A = \rho(a)$, $B = \rho(b)$, $C = \rho(c)$ et $D = \rho(d)$.

1) On note δ la distance entre les axes de B et de C . Si M est un isométrie hyperbolique, on notera ℓ_M sa distance de déplacement. Exprimer ℓ_{BC} en fonction de δ , ℓ_B et ℓ_C .

2) On note ℓ_1 la distance entre l'axe de B et celui de AB , et on note ℓ_2 la distance entre l'axe de AB et celui de C . Exprimer δ en fonction de ℓ_1 , ℓ_2 et un paramètre α que l'on décrira. Vérifier que α est le paramètre de twist recherché.

En déduire une expression de $\cosh(\ell_{BC})$ en fonction de ℓ_B , ℓ_C , ℓ_1 , ℓ_2 et α .

3) Pour $n = 1$ et 2 , exprimer $\cosh(\ell_{B(AB)^nC(AB)^{-n}})$ en fonction des mêmes paramètres que dans la question précédente.

En tirer une expression de α en fonction de $|tr(AB)|$, $|tr(BC)|$, $|tr(B(AB)C(AB)^{-1})|$ et $|tr(B(AB)^2C(AB)^{-2})|$.

Exercice 8 (*bilan : toutes les coordonnées en termes de traces, en genre 2*)

Dans le cas où $g = 2$, exprimer les six coordonnées de Fenchel-Nielsen en termes de traces de matrices.

Exercice 9 (*pour $g = 2$, les matrices en fonction des coordonnées*)

1) Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_c trois nombres réels strictement positifs. Fabriquer des matrices $\rho(a_1), \rho(b_1), \rho(a_2), \rho(b_2)$

telles que la représentation ρ ait les coordonnées de Fenchel-Nielsen $(\ell_1, \ell_2, \ell_c, 0, 0, 0)$ (avec les coordonnées prises dans un ordre qui semble naturel).

2) De même, pour des coordonnées $(\ell_1, \ell_2, \ell_c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_c)$.

3) (Pour les plus motivés) Calculer les coordonnées de Fenchel-Nielsen sur les matrices trouvées, et vérifier qu'on tombe sur les coordonnées de départ. Si ce n'est pas le cas, s'en plaindre à l'auteur de cette feuille de TD.

Remarques.

Dans la littérature, on rencontre différents points de vue. Dans le livre "Travaux de Thurston sur les surfaces" édité par Albert Fathi, François Laudenbach et Valentin Poenaru, Astérisque 66-67, on s'interdit de choisir les courbes a_i comme courbes rouges. Cela permet de ne travailler qu'avec des sphères à quatre trous, cependant le cas du tore troué est plus facile (comme dans bien des problèmes), et il est bon de commencer par là.

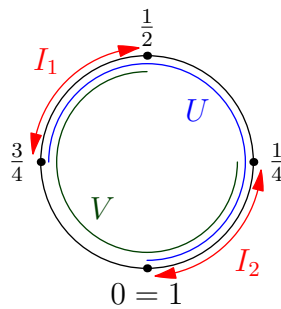
Il y a plusieurs conventions possibles pour le paramètres de twist. Ici, nous avons mesuré le paramètre par une longueur, sans normaliser par la longueur de la courbe rouge correspondante ; de plus nous avons donné un signe à ce paramètre à l'aide d'une orientation donnée sur la courbe rouge (par le choix d'un représentant, dans $\pi_1 \Sigma_g$, de chacune de ces courbes rouges), ce qui n'est pas nécessaire (l'orientation de la surface suffirait).

Le choix de la notation ${}_tM$ qui a été fait plus haut est tout à fait inélégant. Toutes les suggestions (sur ce point ou sur d'autres) sont les bienvenues.

FEUILLE 1 : (G, X) -structures Éléments de correction

Exercice 1

1) On serait tenté de recouvrir $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par deux ouverts de cartes, par exemple les projetés de $]0, \frac{3}{4}[$ et de $]\frac{1}{2}, \frac{5}{4}[$; notons-les respectivement U et V .



Des cartes correspondantes sont les applications inverses : $\phi_U : U \rightarrow]0, \frac{3}{4}[\subset \mathbb{R}$ et $\phi_V : V \rightarrow]\frac{1}{2}, \frac{5}{4}[\subset \mathbb{R}$.

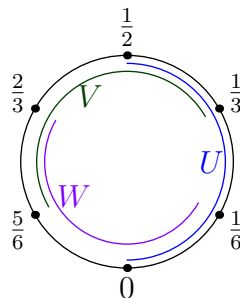
Dans ces conditions, $U \cap V$ a deux composantes connexes, I_1 et I_2 .

Sur I_1 , l'application $\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(I_1) \rightarrow \phi_V(I_1)$ est l'application $x \mapsto x$ de $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ dans $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$.

Sur I_2 , l'application $\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(I_2) \rightarrow \phi_V(I_2)$ est l'application $x \mapsto x + 1$ de $]0, \frac{1}{4}[$ dans $]1, \frac{5}{4}[$.

Ces deux cartes ne constituent donc pas un atlas de (\mathbb{R}, \mathbb{R}) -structure, avec la définition qu'on s'est donnée : $\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \rightarrow \phi_V(U \cap V)$ n'est pas la restriction d'un élément de \mathbb{R} , agissant sur \mathbb{R} par translation.

Il nous faut donc trois cartes :



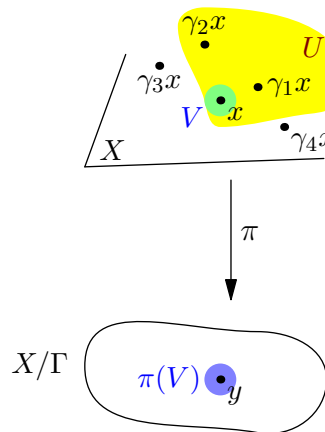
Les ouverts de cartes U, V et W sont respectivement les images par $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des intervalles $]0, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{3}, \frac{5}{6}[$ et $]\frac{2}{3}, \frac{7}{6}[$. La restriction de π à chacun de ces intervalles induit un homéomorphisme, qui en l'inversant, donne les applications de cartes ϕ_U, ϕ_V et ϕ_W sur chacune de ces trois cartes. Et il suffit d'écrire les expressions des changements de cartes pour constater que ce sont bien des translations.

Le but de cet exercice était simplement de signaler que la définition de (G, X) -structure serait un peu plus naturelle (et la notion inchangée) si on demandait seulement aux applications de changement de cartes d'être *localement* des éléments de G .

Bien entendu, cette nuance est de nature uniquement esthétique, dans le choix des formulations des définitions. Mais restons sur nos gardes ! Il peut arriver qu'une nuance d'apparence tout aussi anecdotique puisse avoir des conséquences bien plus gênantes.

2) Cette fois-ci on peut prendre, comme ouverts de cartes, des produits d'ouverts U, V et W de la question 1, dans chaque coordonnée. Les applications de changement de cartes s'écrivent alors coordonnées par coordonnées, par des translations puisque c'était le cas à la question précédente.

Exercice 2 On va d'abord montrer que l'application $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ est un revêtement. Pour cela, donnons-nous un point $y \in X/\Gamma$, et choisissons un relevé $x \in X$ de y .



Soit U un voisinage ouvert relativement compact de x . Comme l'action de Γ est proprement discontinue, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \Gamma$ tels que $U \cap \gamma_k U \neq \emptyset$. Comme l'action est libre, tous les points $\gamma_1 x, \dots, \gamma_n x$ sont distincts de x . Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on choisit des ouverts V_k, W_k disjoints tels que $x \in V_k$ et $\gamma_k x \in W_k$, puis on pose $V = U \cap (\bigcap_{k=1}^N V_k) \cap (\bigcap_{k=1}^N \gamma_k^{-1} W_k)$.

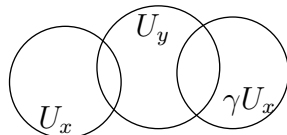
Par construction, V est un ouvert contenant x et tel que pour tout $\gamma \neq 1$, $V \cap \gamma V = \emptyset$.

Maintenant, $\pi(V)$ est un ouvert de X/Γ , puisque $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V$ est une réunion d'ouverts de X . Le même raisonnement assure que la restriction de l'application π à V est ouverte. Ainsi, l'application $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ est ouverte, bijective, continue : c'est un homéomorphisme.

L'ouvert $\pi(V)$ a donc pour préimage par π une réunion discrète d'ouverts qui lui sont homéomorphes : on a montré que π était un revêtement.

Pour chaque point $y \in X/\Gamma$, on vient de construire un ouvert de trivialisatation du revêtement. On l'a noté $\pi(V)$ ci-dessus ; notons-le maintenant U_y , et choisissons-en un relevé par π , V_y . Il suffit de prendre nos ouverts U_y assez petits pour que les cartes $(U_y, \pi|_{V_y}^{-1} : U_y \rightarrow V_y)$ se composent avec les cartes pour la structure de variété sur X , et les applications de changement de cartes seront aussi régulières que l'action de Γ et la structure de variété sur X : il suffit pour cela décrire toutes les cartes (c'est sans aucune difficulté, et pas vraiment passionnant).

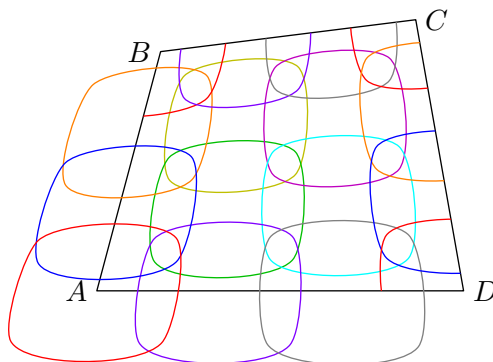
Les mêmes cartes $(U_y, \pi|_{V_y}^{-1} : U_y \rightarrow V_y)$ ne définissent *a priori* pas encore une (G, X) -structure sur X/Γ : les applications de changement de cartes sont *localement* donnés par des éléments de G (des éléments de Γ , en fait), mais, comme dans l'exercice précédent, il faut encore prendre des ouverts de cartes suffisamment petits pour exclure la situation suivante :



On se convainc facilement qu'il suffise de prendre des ouverts assez petits pour interdire cette situation. Je laisse la rédaction de ce dernier point au lecteur ; je compte y revenir dans une version ultérieure de ce document.

Exercice 3 Les similitudes sont les applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. Elles forment le groupe \mathcal{A} (*groupe affine de la droite complexe*) qui agit simplement transitivement (transitivement avec stabilisateurs triviaux) sur l'ensemble des segments orientés non dégénérés du plan. D'où l'existence et l'unicité de γ_1 et γ_2 .

Pour munir le quotient \mathcal{P}/\sim d'une $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$ -structure, on refait ce qu'on a dit à la question 2 de l'exercice 1.



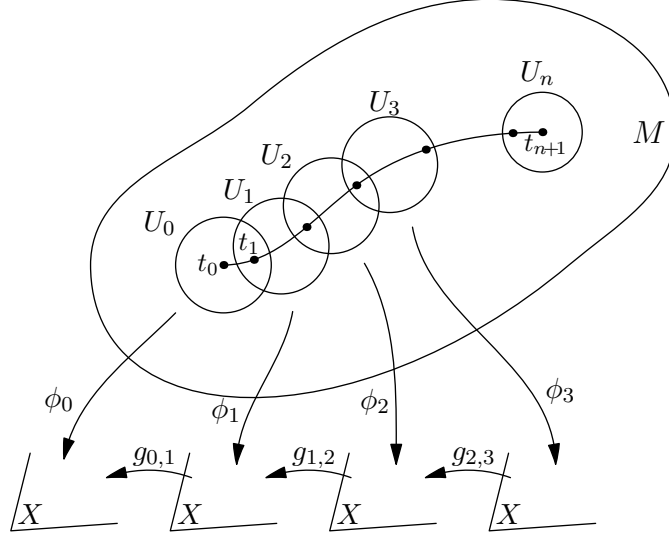
Dans la figure ci-dessus, on a dessiné à la fois des ouverts recouvrant \mathcal{P}/\sim , et les images (dans le plan) des cartes correspondantes.

Le fait que la carte contenant le point image des quatre sommets de \mathcal{P} se "recolle bien" tient au fait que les similitudes préservent les angles. Plus précisément cela tient au fait que le groupe \mathcal{A} agit simplement transitivement sur le cercle unité au plan, et au fait que ce groupe envoie les segments sur les segments, en y respectant la proportionnalité des longueurs.

Dans cet atlas, nos applications de changement de cartes, outre l'identité de \mathbb{R}^2 , sont juste γ_1 et γ_2 , et leurs inverses.

Exercice 4 (*application développante et holonomie*)

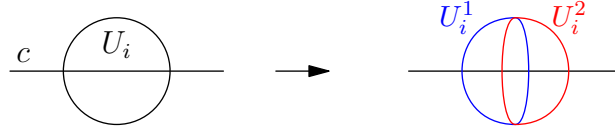
1) $c: [0, 1] \rightarrow M$ continue ; $c(0) = x_0$. Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $f(t) = g_{0,1} \cdots g_{i-1,i} \cdot \phi_i(c(t))$.



a) En t_i , on a deux définitions de f ; il faut vérifier qu'elles coïncident. Ces deux expressions sont $g_{0,1} \cdots g_{i-2,i-1} \phi_{i-1}(c(t_i))$, et $g_{0,1} \cdots g_{i-2,i-1} g_{i-1,i} \phi_i(c(t_i))$.

Il s'agit donc de vérifier que $\phi_{i-1}(c(t_i)) = g_{i-1,i} \phi_i(c(t_i))$. Mais cela découle de la définition de $g_{i-1,i}$ et du fait que $c(t_i) \in U_{i-1} \cap U_i$.

b) On considère deux recouvrements de notre segment, U_0, U_1, \dots, U_n et U'_0, U'_1, \dots, U'_n ; on leur associe comme précédemment les fonctions f et h (on garde la lettre g pour les éléments du groupe!). On peut subdiviser chacun des recouvrements comme suit



avec l'identité comme fonction de transition : ceci ne change évidemment pas les fonctions f et h . On peut ainsi supposer que $n = N$, et que la subdivision temporelle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ est commune, adaptée à chacun de nos deux recouvrements. Il suffit maintenant de changer les ouverts un par un : on suppose donc qu'entre les deux chaînes d'ouverts U_0, U_1, \dots, U_n et U'_0, U'_1, \dots, U'_n , seules les cartes (U_k, ϕ_k) et (U'_k, ϕ'_k) diffèrent.

Sur $[t_0, t_k]$, f et h sont définies par la même expression, donc coïncident.

Si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a

$$f(t) = g_{0,1} \cdots g_{k-2,k-1} \cdot g_{k-1,k} \cdot \phi_k(c(t))$$

$$h(t) = g_{0,1} \cdots g_{k-2,k-1} \cdot g'_{k-1,k} \cdot \phi'_k(c(t)).$$

Il existe une application de changement de carte, $g \in G$, telle que $\phi'_k = g \cdot \phi_k$ sur $U_k \cap U'_k$.

L'ouvert $U_k \cap U'_k \cap U_{k-1}$ est non vide, et sur cette intersection on a $\phi_{k-1} = g_{k-1,k} \cdot \phi_k$, et $\phi_{k-1} = g'_{k-1,k} \cdot \phi'_k$. Comme l'action de G sur X est analytique, on a donc $g = (g'_{k-1,k})^{-1} \cdot g_{k-1,k}$. D'où l'égalité de f et h sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$.

On fait de même sur $[t_{k+1}, t_{k+2}]$: si $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$,

$$\begin{aligned} f(t) &= g_{0,1} \cdots g_{k-2,k-1} \cdot g_{k-1,k} \cdot g_{k,k+1} \cdot \phi_{k+1}(c(t)) \\ h(t) &= g_{0,1} \cdots g_{k-2,k-1} \cdot g'_{k-1,k} \cdot g'_{k,k+1} \cdot \phi'_{k+1}(c(t)). \end{aligned}$$

Sur l'intersection, non vide, $U_k \cap U'_k \cap U_{k-1}$, on a cette fois-ci $\phi_k = g_{k,k+1} \cdot \phi_{k+1}$ et $\phi'_k = g'_{k,k+1} \cdot \phi'_{k+1}$, de sorte que $g = g'_{k,k+1}(g_{k,k+1}^{-1})$. Les deux expressions différentes de g donnent que

$$g_{k-1,k} \cdot g_{k,k+1} = g'_{k-1,k} \cdot g'_{k,k+1},$$

d'où l'égalité entre f et h sur $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, ainsi que sur $[t_{k+2}, 1]$ pour la même raison : f ne dépend pas des cartes.

2) $\rho(c) = g_{0,1} \cdots g_{n-1,n} \in G$. Pour vérifier que ceci ne dépend pas des cartes, on fait exactement le même raisonnement qu'à la question précédente.

3) a) Ceci découle des questions précédentes.

b) Une incarnation du revêtement universel de M est :

$$\widetilde{M}_{x_0} = \{\text{chemins issus de } x_0\} / \text{homotopie rel. aux extrémités.}$$

Donc cela découle de 3)a).

c) Idem : cela découle de 1)b). Puis $D(x_0) = \phi_0(x_0)$; $\rho([c]) = g_{0,1} \cdots g_{n-1,n}$ et $D([c] \cdot x_0) = f(1) = g_{0,1} \cdots g_{n-1,n} \cdot \phi_0(x_0)$.

De même : le fait que ρ soit un morphisme découle de ce qui précède.

4) Si on modifie x_0 , on doit aussi choisir un chemin C reliant x_0 à x_1 . Notons D_{x_i} la développante associée à (x_i, U_i, ϕ_i) , et ρ_i la représentation d'holonomie associée.

On a alors un homéomorphisme naturel, $\phi: \widetilde{M}_{x_1} \rightarrow \widetilde{M}_{x_0}$, qui à $[c]$ associe $[C \wedge c]$ (comme d'habitude \wedge désigne la concaténation des chemins).

Le chemin C définit aussi un isomorphisme naturel $\psi: \pi_1(M, x_1) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$, avec $\psi([\gamma]) = [C \wedge \gamma \wedge \text{opp}(C)]$.

La construction de la développante et de la représentation se comportent de manière fonctorielle, au sens qui suit.

Le chemin C permet de définir un élément $g \in G$, comme à la question 1, en partant de la carte (U_0, ϕ_0) et en arrivant à la carte (U_1, ϕ_1) .

On a alors des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_{x_1} & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{M}_{x_0} \\ \downarrow D_{x_1} & & \downarrow D_{x_0} \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(M, x_1) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(M, x_0) \\ \downarrow \rho_{x_1} & & \downarrow \rho_{x_0} \\ G & \xrightarrow{h \mapsto ghg^{-1}} & G \end{array}$$

Cette information est parfois paraphrasée en disant que l'effet d'un changement de point-base consiste à prémultiplier D et conjuguer ρ par un même élément de G , mais bien entendu, tel quel, ça ne veut pas vraiment dire quelque chose.

Exercice 5 (*application développante, suite*) Par construction, D s'écrit localement via les cartes : donc c'est un homéomorphisme local.

Dans le cas de l'exercice 2 : on choisit un point \widetilde{x}_0 , et $x_0 = \pi(\widetilde{x}_0)$. On a vu dans l'exercice 2 que pour un ouvert \widetilde{U}_0 assez petit autour de \widetilde{x}_0 , $\pi|_{\widetilde{U}_0}$ induit un homéomorphisme et $U_0 = \pi(\widetilde{U}_0)$ est un ouvert de carte. On choisit cette carte comme ouvert de départ, U_0 , dans la construction de la développante.

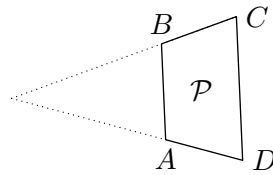
On pose alors

$$V = \{x \in X, D(x) = x\}.$$

Comme D est continue, V est fermé dans X . Puis pour tout $x \in V$, comme les applications de changement de cartes sont à valeurs dans Γ qui agit librement sur X , il y a un voisinage de x qui consiste, par construction de D , en des points de V . Donc D est un homéomorphisme.

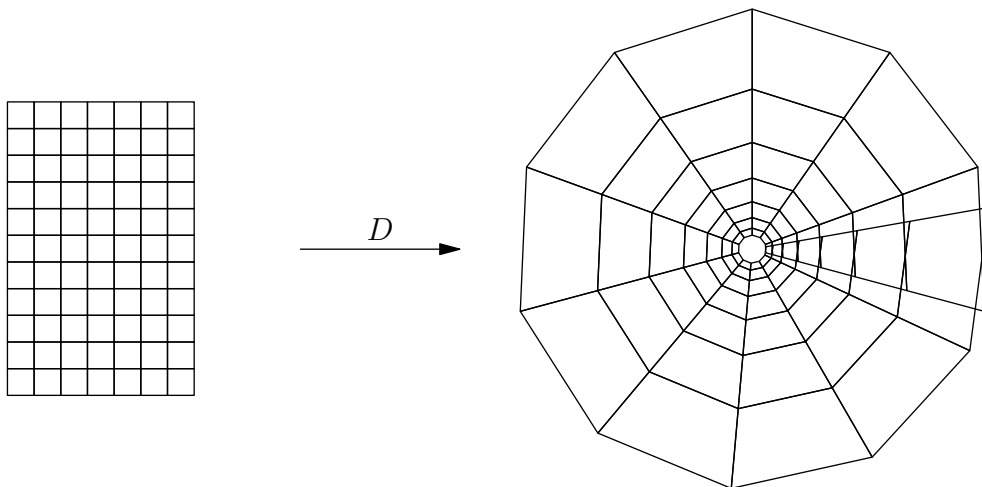
Puis ρ est à valeurs dans Γ puisque les changements de cartes sont dans Γ . Elle est injective d'après la fin de la question 3 de l'exercice précédent, et le fait que Γ agisse librement. Elle est surjective : pour vérifier ceci on représente un élément de Γ comme une courbe fermée dans X/Γ , dont on prend l'holonomie...

Pour voir si D est nécessairement injective, ou surjective, on revient sur l'exercice 3. Plaçons-nous à la suite de l'exercice 3, et considérons le cas de figure où le parallélogramme \mathcal{P} est comme suit :



Remarquons qu'on n'est pas loin du cas "générique". En effet, les similitudes γ_1 et γ_2 commutent, donc soit ce sont deux translations et on est dans le cas de l'exercice 2, soit ce sont deux similitudes à centre, qui partagent le même point fixe. Elles ont alors chacune une partie de rotation et une partie de dilatation ; le lecteur pourra chercher à comprendre comment se comporte cet exemple lorsqu'on fait varier les paramètres (de rotation et dilatation) associés à γ_1 et γ_2 .

L'application développante est comme suit :



Bien sûr, ce n'est pas sans rappeler l'application exponentielle de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ! Et comme l'exponentielle, D n'est pas surjective (elle rate le point fixe commun de γ_1 et γ_2), ni injective.

La représentation d'holonomie, elle, est non injective mais d'image discrète si l'angle d'ouverture de notre polygone est rationnel avec π , et dans le cas contraire elle est injective mais non discrète.

Exercice 6 On prend M compacte, munie d'une (G, X) structure, où G laisse invariante une métrique riemannienne sur X .

1) On se sert des applications de cartes pour tirer en arrière la métrique sur X à une métrique sur chaque ouvert de carte. Cette métrique est bien définie sur M , puisque les changements de cartes sont des isométries. De même on munit \widetilde{M} d'une métrique riemannienne. Par construction, la développante $D: \widetilde{M} \rightarrow X$ est une isométrie locale, dans le sens que cette application est un homéomorphisme local et respecte la métrique.

C'est même une isométrie locale, au sens des espaces métriques. En effet, si U est un ouvert de M , homéomorphe à $D(U)$, alors tout $x \in U$ admet un voisinage V tel que pour tout point $y \in V$, et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, les chemins de longueurs ε -minimisantes joignant x à y ne sortent pas de U . En poussant ces chemins par D , on comprend que sur les ouverts assez petits, D contracte les longueurs. En raisonnant de même sur la réciproque de l'homéomorphisme induit par la restriction de D à U , on vérifie que D est bien une isométrie locale, au sens des espaces métriques.

2) Pour tout $y \in M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon)$ se relève isométriquement en une boule $B(\tilde{y}, \varepsilon)$ dans \widetilde{M} , et de sorte que $D|_{B(\tilde{y}, \varepsilon)}$ soit une isométrie.

La compacité de M permet d'échanger les quantificateurs.

3) Observons d'abord que $D: \widetilde{M} \rightarrow X$ a une image ouverte (c'est un homéomorphisme local), et fermée, grâce à la question précédente. Donc D est surjective.

Maintenant, $U = B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ convient, d'après la question 2.

4) Finalement, D est un revêtement. Mais X est simplement connexe, et \widetilde{M} est connexe, donc D est un homéomorphisme.

FEUILLE 2 : Géométrie hyperbolique plane

Éléments de correction

Exercice 1 (*géodésiques*)

1) Si $z_1 = x + iy_1$ et $z_2 = x + iy_2$ sont sur une même verticale, avec $y_2 > y_1$, on paramétrise le segment $[z_1, z_2]$ par $\gamma: [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{H}^2$, avec $\gamma(t) = x + it$.

La longueur du segment est alors :

$$\ell(\gamma) = \int_{y_1}^{y_2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

2) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, on note $A \cdot z = A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Alors $A'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$.

De plus,

$$A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

d'où $Im(A(z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$.

Donc A envoie $ds^2 = \frac{|dz|^2}{y^2}$ sur $\frac{|dz|^2}{\frac{(Im(z))^2}{|cz+d|^4}} = \frac{|dz|^2}{(Im(z))^2} : PSL(2, \mathbb{R})$ agit par isométries sur \mathbb{H}^2 .

3) D'après la formule de la métrique, la projection horizontale sur un axe vertical diminue les distances (strictement, si on n'est pas vertical au départ). Une géodésique, entre deux points sur la même verticale, ne peut donc être que le segment vertical qui les joint. En effet, si $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ est une géodésique, et si la fonction $Re(\gamma)$ a un maximum (resp. minimum) local en un point, alors c'est un maximum (resp. minimum) global, sinon γ ne minimise pas localement les distances.

Ensuite, étant donné deux points $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, il existe un élément $\pm A \in PSL(2, \mathbb{R})$ qui envoie z_1 et z_2 sur une même verticale (on peut facilement exhiber un tel A , mais on y verra encore plus clair à l'issue de l'exercice 2). Les deux points z_1 et z_2 sont donc reliés par un unique segment géodésique, qui est l'image par A^{-1} d'un segment vertical.

La famille des géodésiques de \mathbb{H}^2 est donc l'orbite sous $PSL(2, \mathbb{R})$ de l'ensemble des demi-droites verticales : c'est l'ensemble des demi-droites verticales et des demi-cercles qui rencontrent l'axe $\{Im(z) = 0\}$ de façon orthogonale (i.e., dont le centre est sur cet axe).

Exercice 2 (*éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$*)

1) Soit $\pm A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme nous nous intéressons uniquement à l'action de $\pm A$ par homographie, nous omettrons fréquemment le signe \pm .

Si $c = 0$, alors A fixe ∞ , et l'équation $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$ a un autre point fixe si et seulement si $\frac{a}{d} \neq 1$, i.e. $a^2 \neq 1$. De plus, $|tr(A)| = |a + \frac{1}{a}|$, donc dans ce cas-ci, $|tr(A)| \geq 2$, avec égalité si et seulement si A n'a qu'un point fixe dans $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$.

Si $c \neq 0$, alors l'équation $\frac{az+b}{cz+d} = z$ équivaut à : $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Le discriminant de cette équation de degré 2 est $(d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = |tr(A)|^2 - 4$. Si $|tr(A)| < 2$, cette équation a donc deux racines, non réelles, conjuguées. L'une est dans \mathbb{H}^2 . Si $|tr(A)| \geq 2$, alors cette équation a des racines réelles, au nombre proposé par l'énoncé.

2) On vérifie facilement que $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur \mathbb{H}^2 . Si A est elliptique, quitte à conjuguer A , on peut donc supposer qu'il fixe i , donc que $-c + (d-a)i - b = 0$. On a alors $a = d$, $b = -c$, et $ad - bc = 1$, donc $a^2 + b^2 = 1$: il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que A soit conjugué à $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. On reviendra à la question suivante sur l'action de A sur le plan.

Si $|tr(A)| = 2$, A fixe un unique point, au bord du plan hyperbolique. Comme $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, A est conjugué à $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $c \neq 0$ puisque nous avons supposé $\pm A \neq \pm I$. En conjuguant encore par une matrice sous la forme $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$, on constate que A est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, l'ensemble $A^n \cdot x$ s'accumule sur le point fixe de A .

Si $|tr(A)| > 2$, on peut encore conjuguer A et obtenir un élément qui fixe 0 et ∞ . Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A soit conjugué à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, et, quitte à conjuguer encore par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut supposer que $\lambda > 1$. Ainsi, A fixe globalement la géodésique $\{Re(z) > 0\}$, et d'après la formule trouvée dans l'exercice 1, A déplace chacun de ces points à distance $2 \ln \lambda$. Ce réel $2 \ln \lambda > 0$ est appelé la *distance de déplacement* de A (nous reviendrons sur cette appellation dans l'exercice 5); on le notera souvent ℓ_A , et A est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{\frac{\ell_A}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\ell_A}{2}} \end{pmatrix}$. Pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n \cdot x = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} A^n \cdot x = 0$. On dit que ∞ (resp. 0) est le *point fixe attractif* (resp. *répulsif*) de $\pm A$.

Remarquons que la conjugaison par $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ nous ramène à $\begin{pmatrix} \cosh \frac{\ell_A}{2} & \sinh \frac{\ell_A}{2} \\ \sinh \frac{\ell_A}{2} & \cosh \frac{\ell_A}{2} \end{pmatrix}$: le point fixe attractif (resp. répulsif) de $\pm A$ est alors 1 (resp. -1).

3) On a évidemment : $Im(z) > 0 \Leftrightarrow |z - i| < |z + i|$.

L'homographie $\varphi: z \mapsto \frac{z-i}{z+i} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot z$ est un biholomorphisme de \mathbb{H} sur $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

et $\varphi^{-1}(z) = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = i \frac{z+1}{1-z}$.

L'image de i par φ est 0, et dans Δ , la rotation de centre 0 et d'angle θ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice de rotation d'angle $+\theta$ autour du point $i \in \mathbb{H}^2$ est

$$R_\theta = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Et cela tombe très bien, parce que la dérivée en i de l'homographie correspondante (on l'a vu dans l'exercice 1) est la multiplication par $\frac{1}{(-i \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2}$, c'est donc bien la multiplication par $e^{i\theta}$.

La matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, elle, agit sur \mathbb{H}^2 comme une rotation autour de i , et d'angle -2θ .

Remarque : ceci est une version préliminaire de ce document. Je compte bien y revenir, et je modifierai alors profondément la rédaction de cette correction, pour y inclure un grand nombre de figures.

Exercice 3 (représentation adjointe)

1) Si $A \in SL(2, \mathbb{R})$, A agit sur $sl(2, \mathbb{R})$ par $A \cdot X = AXA^{-1}$.

Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} AXA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ad+bc)x + bdz - acy & -b^2z + a^2y - 2abx \\ d^2z - c^2y + 2cdx & -(ad+bc)x - bdz + acy \end{pmatrix} \\ &= ((ad+bc)x + bdz - acy)e_1 + (-b^2z + a^2y - 2abx) \cdot \frac{e_2 + e_3}{2} + (d^2z - c^2y + 2cdx) \cdot \frac{e_2 - e_3}{2}. \end{aligned}$$

La matrice de l'action de A dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc :

$$ad(A) = \begin{pmatrix} ad+bc & bd-ac & -ac-bd \\ -ab+cd & \frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2+d^2) & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \\ -ab-cd & \frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2) & \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien sûr que $\text{Ker}(ad) = \{\pm I\}$. Il est aussi intéressant de constater que $\text{tr}(ad(A)) = |\text{tr}(A)|^2 - 1$.

2) On remplace gaiement. Si $A = \begin{pmatrix} e^{d/2} & 0 \\ 0 & e^{-d/2} \end{pmatrix}$, on trouve $ad(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh d & \sinh d \\ 0 & \sinh d & \cosh d \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} \cosh d/2 & \sinh d/2 \\ \sinh d/2 & \cosh d/2 \end{pmatrix}$, on trouve $ad(A) = \begin{pmatrix} \cosh d & 0 & -\sinh d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh d & 0 & \cosh d \end{pmatrix}$.

Enfin, si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}$, on trouve $ad(A) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) La matrice de la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale, avec deux termes 2 et un -2 . Elle est donc de signature $(2, 1)$, et elle est préservée par l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$. Cela définit un morphisme injectif du groupe de Lie connexe $PSL(2, \mathbb{R})$ dans le groupe de Lie $SO(2, 1)$; les deux ont la même dimension.

Cette représentation adjointe est donc un isomorphisme entre $PSL(2, \mathbb{R})$ et la composante de l'identité de $SO(2, 1)$.

Exercice 4 (*trigonométrie*)

On suppose bien entendu que le triangle est non dégénéré.

1) Le groupe d'isométries $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur \mathbb{H}^2 , donc on peut appliquer une isométrie pour ramener A en i . Puis $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les directions autour de i , donc on peut supposer que $Re(B) = 0$ et $Im(B) < 1$. Enfin, la symétrie par rapport à l'axe $\{Re(z) = 0\}$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 , qui en renverse l'orientation (nous y reviendrons dans l'exercice 8) : quitte à appliquer cette isométrie, on peut supposer que $Re(C) > 0$.

2) Comme on l'a vu dans l'exercice 2, on a $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, et $T_h = \begin{pmatrix} e^{h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix}$.

Par construction, l'isométrie (préservant l'orientation)

$$R_{\pi+\alpha} \cdot T_b \cdot R_{\pi+\gamma} \cdot T_a \cdot R_{\pi+\beta} \cdot T_c$$

fixe le point i (elle est donc sous la forme R_θ , pour un certain $\theta \in [0, 2\pi]$, comme on l'a vu dans l'exercice 2), et elle fixe aussi la direction verticale vers 0 : donc c'est l'identité :

$$R_{\pi+\alpha} \cdot T_b \cdot R_{\pi+\gamma} \cdot T_a \cdot R_{\pi+\beta} \cdot T_c = \pm I.$$

3) Pour tirer quelque chose de cette égalité, il est très pratique de la passer à la représentation adjointe.

Si $\theta, h \in \mathbb{R}$, notons donc $M_{\theta,h} = ad(R_{\pi+\theta} \cdot T_h)$. Cela donne

$$M_{\theta,h} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi) & -\sin(\theta + \pi) & 0 \\ \sin(\theta + \pi) & \cos(\theta + \pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh h & \sinh h \\ 0 & \sinh h & \cosh h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \cosh h \sin \theta & \sinh h \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cosh h \cos \theta & -\sinh h \cos \theta \\ 0 & \sinh h & \cosh h \end{pmatrix}.$$

De plus, on a évidemment $\det(M_{\theta,h}) = 1$; on en tire (en écrivant la comatrice) que

$$M_{\theta,h}^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cosh h & -\cos \theta \cosh h & -\sinh h \\ -\sin \theta \sinh h & \cos \theta \sinh h & \cosh h \end{pmatrix}.$$

L'égalité $M_{\alpha,b} \cdot M_{\gamma,a} = M_{\beta,c}^{-1}$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \cosh b \sin \alpha \sin \gamma & * & * \\ * & * & * \\ -\sinh b \sin \gamma & * & \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \end{pmatrix} = M_{\beta,c}^{-1} \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta \cosh c & -\cos \beta \cosh c & -\sinh c \\ -\sin \beta \sinh c & \cos \beta \sinh c & \cosh c \end{pmatrix},$$

et on trouve les formules de trigonométrie :

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c},$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Si a , b et c sont très petits, la première formule donne la loi des sinus, dans les triangles euclidiens, connus de beaucoup d'élèves de collège, et les termes d'ordre 2 de la deuxième formule donnent la formule d'Al-Kashi.

La troisième formule, elle, indique qu'un triangle hyperbolique est entièrement déterminé, à isométrie près, par ses trois angles. Lorsque les trois longueurs tendent vers 0, elle indique simplement que la somme des trois angles d'un triangle euclidien vaut π .

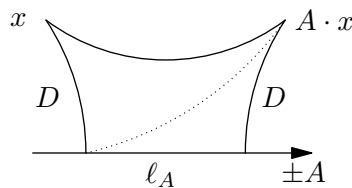
Il est fréquent d'appeler ces trois formules, respectivement, loi des sinus, loi du cosinus I, et loi du cosinus II.

Exercice 5 (*distances de déplacement*)

Si $\pm A$ est une isométrie elliptique, elle est conjuguée à une matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, avec un angle de rotation θ . Notons x_A le point fixe de A . Si $x \in \mathbb{H}^2$, alors les points x , x_A et $A \cdot x$ forment un triangle isocèle d'angle θ en x_A . La formule du cosinus I donne alors :

$$\cosh(d(x, A \cdot x)) = \cosh^2(d(x, x_A)) - \sinh^2(d(x, x_A)) \cos \theta.$$

Si $\pm A$ est une isométrie hyperbolique, et si $x \in \mathbb{H}^2$ est à distance D de l'axe de $\pm A$, alors les points x et $A \cdot x$ sont comme dans la figure suivante :



En découpant ce quadrilatère en deux triangles, dans lesquels on applique les deux premières formules de l'exercice précédent, on trouve que $\cosh(d(x, A \cdot x)) = \cosh^2 D \cosh \ell_A - \sinh^2 D$.

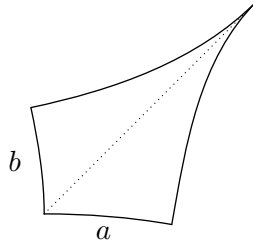
En particulier, on voit que c'est exactement sur son axe qu'un élément hyperbolique réalise son minimum de déplacement (évidemment, on l'avait compris dès l'exercice 2, mais maintenant on en a une preuve dans une version quantitative).

Exercice 6 (*aire des triangles*)

C'est un très gentil petit calcul très simple, qu'on pourra retrouver au besoin dans le livre de Svetlana Katok, ainsi que dans beaucoup d'autres livres.

Exercice 7 (*distances entre géodésiques*)

Tout d'abord, nous devons établir une petite formule. Considérons un quadrilatère à trois angles droits, et un angle nul (à un sommet idéal), dont les deux longueurs finies sont a et b . Nous voulons une relation entre a et b . Découpons ce quadrilatère en deux triangles, comme ci-dessous.



La loi du cosinus II, dans l'un des triangles, donne $\cosh b = \frac{1}{\sin \theta}$, alors que dans l'autre triangle, elle donne $\cosh a = \frac{1}{\cos \theta}$. Nous avons donc :

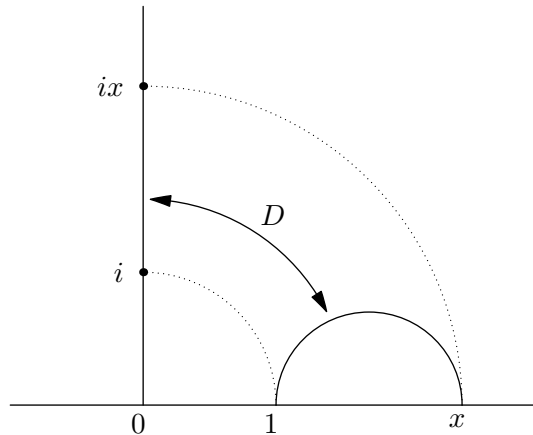
$$\frac{1}{\cosh^2 a} + \frac{1}{\cosh^2 b} = 1.$$

Revenons à nos birapports. La convention a été prise ici de sorte que $[\infty, 0, 1, x] = x$ (attention, il y a d'autres conventions dans la littérature).

Un calcul direct indique que le birapport est préservé par $PSL(2, \mathbb{R})$. Les distances le sont aussi. Nous pouvons donc supposer que $(a, b, c, d) = (\infty, 0, 1, x)$.

L'hypothèse que les géodésiques ne se croisent pas équivaut à : $x > 0$. Donc $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Supposons d'abord $x > 1$. On se convaincra sans peine qu'il existe une unique perpendiculaire commune aux axes $(0, \infty)$ et $(1, x)$, et qu'un unique segment perpendiculaire à chacune de ces géodésiques réalise la distance entre ces deux géodésiques. La figure est alors la suivante.



C'est la longueur D de ce segment que nous recherchons.

Dans la figure ci-dessus, le segment qui nous intéresse borde deux quadrilatères à trois angles droits et un angle nul. Il en découle que le point p est à mi-distance (hyperbolique) entre les points i et ix . Donc $p = i\sqrt{x}$. Il s'en suit que

$$\frac{1}{\cosh^2 D} = \frac{1}{\cosh^2(\ln \sqrt{x})},$$

qui se simplifie en :

$$\cosh D = \frac{x+1}{x-1}.$$

Si, en revanche, $x \in]0, 1[$, le même raisonnement (ou mieux, l'inversion selon le cercle de centre 0 et de rayon 1) conduit à remplacer x par $1/x$ dans cette expression, ce qui donne : $\cosh D = \frac{x+1}{1-x}$.

Ainsi, dans les deux cas de figure, nous avons :

$$\cosh D = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

Finalement, toute isométrie de \mathbb{H}^2 envoie des géodésiques sur des géodésiques, et préserve les distances entre elles. On en déduit qu'une isométrie directe définit un homéomorphisme du bord $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ préservant l'orientation et le birapport, donc $Isom^+(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$.

Exercice 8 (*toutes les isométries*)

1) Remarquons d'abord que si on note \bullet l'action projective de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, alors, pour toute matrice $A \in GL(2, \mathbb{R})$ de déterminant ± 1 , nous avons ainsi défini : $A \cdot z = A \bullet c^{\det A}(z)$, où $c: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la conjugaison complexe. L'action \cdot est donc définie en composant deux actions qui commutent entre elles (nos matrices sont à coefficients réels), donc c'est bien une action du groupe multiplicatif $PGL(2, \mathbb{R})$.

Remarquons ensuite que

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{(a\bar{z} + b)(cz + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + ad\bar{z} + bcz}{|cz + d|^2},$$

donc $Im\left(\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}\right) = \frac{Imz}{|cz + d|^2}$: cette action préserve \mathbb{H}^2 .

Puis l'équation $\frac{az + b}{cz + d} = x$ est une équation polynomiale de degré 2 (si $c \neq 0$), dont le discriminant, cette fois-ci, est $(tr(A))^2 + 4$. Donc A fixe exactement deux points de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (dont ∞ si et seulement si $c = 0$). Quitte à conjuguer A par un élément de $SL(2, \mathbb{R})$, on peut supposer que A fixe ∞ et 0 : autrement dit, A est conjugué à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1/\lambda \end{pmatrix}$. C'est la composée d'une symétrie par rapport à l'axe $(0, \infty)$ et d'une isométrie hyperbolique de même axe, $(0, \infty)$.

Ainsi, toute isométrie renversant l'orientation de \mathbb{H}^2 est composée d'une inversion par rapport à une géodésique de \mathbb{H}^2 et éventuellement d'une isométrie hyperbolique dont l'axe est cette géodésique.

2) Il suffit de vérifier cet énoncé sur nos éléments elliptiques/paraboliques/hyperboliques préférés.

La rotation d'angle θ qui fixe $i\mathbb{H}^2$ est obtenue en composant deux inversions par rapport à deux géodésiques qui se rencontrent en formant un angle $\frac{\theta}{2}$.

L'élément parabolique $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la composée des inversions autour des axes $\{Re(z) = c\}$ et $\{Re(z) = c + 1/2\}$, quel que soit $c \in \mathbb{R}$.

L'élément hyperbolique $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ est la composée de deux inversions d'axes orthogonaux à $(0, \infty)$, et de distance $\ln \lambda$.

FEUILLE 3 : Groupes fuchsien

Éléments de correction

Exercice 1 (*le lemme du ping-pong de Felix Klein*)

Nous allons montrer que l'application naturelle $\Gamma_1 \star \Gamma_2 \rightarrow G$ est injective. Cela revient à dire que tout élément sous la forme $a_1 b_1 \cdots a_n b_n$ est différent de 1, dès que $n \geq 1$, $a_i \in \Gamma_1$, $b_i \in \Gamma_2$, et que tous ces éléments sont différents de 1 (sauf peut-être a_1 et b_n (mais pas les deux, si $n = 1$...)).

Considérons donc un élément $w \in G$ sous la forme : $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n$, avec $a_i \in \Gamma_1$, $b_i \in \Gamma_2$, tous distincts de 1. Par hypothèse, il existe un élément $x_0 \in X_2 \setminus X_1$. Alors $w \cdot x_0 \in X_1$ (par récurrence sur n ...), donc $w \cdot x_0 \neq x_0$, donc $w \neq 1$.

Considérons maintenant un élément $w = a_1 b_1 \cdots a_n b_n$, avec $a_i \in \Gamma_1$, $b_i \in \Gamma_2$, tous distincts de 1. Le cardinal de Γ_1 étant au moins 3, il existe $a \in \Gamma_1$ tel que $a \notin \{1, a_1\}$: le cas précédent s'applique alors à $a^{-1} w a$, donc $a^{-1} w a \neq 1$, d'où $w \neq 1$.

Considérons maintenant un élément $w = b_1 a_2 b_2 \cdots a_n$, avec $a_i \in \Gamma_1$, $b_i \in \Gamma_2$, tous distincts de 1. Alors le cas précédent s'applique à w^{-1} . Donc $w^{-1} \neq 1$, d'où $w \neq 1$.

Enfin, considérons un élément $w = b_1 a_2 \cdots a_n b_n$, avec $a_i \in \Gamma_1$, $b_i \in \Gamma_2$, tous distincts de 1. On choisit alors un élément $a \neq 1$ dans Γ_1 , et le premier cas s'applique à awa^{-1} , qui est donc différent de 1, donc $w \neq 1$.

Dans tout ce raisonnement, il est important d'avoir $Card(\Gamma_1) \geq 3$. Dans le groupe G des isométries du plan euclidien, soit Γ_1 le groupe (à deux éléments) engendré par la réflexion selon la droite $\{x = 0\}$ et Γ_2 le groupe engendré par la réflexion selon la droite $\{y = 0\}$. Notons $X_1 = \{(-1, -1), (1, 1)\}$ et $X_2 = \{(-1, 1), (1, -1)\}$. Les hypothèses de l'énoncé s'appliquent, hormis la condition $Card(\Gamma_1) \geq 3$. Le groupe $\Gamma_1 \star \Gamma_2$ est infini, mais Γ_1 et Γ_2 engendrent dans G un groupe à 4 éléments.

Exercice 2 (*groupes de Schottky*)

Notons Γ_1 le groupe engendré par A , et Γ_2 le groupe engendré par B . Ils sont isomorphes à \mathbb{Z} . Notons $X_2 = \Delta_B \cup \Delta'_B$ et $X_1 = \Delta_A \cup \Delta'_A$. Toutes les hypothèses de l'exercice 1 sont satisfaites : A et B engendrent un groupe libre $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$.

Notons x le point d'intersection des axes de A et B . L'orbite de x sous $\langle A, B \rangle$, hormis x , n'a que des points dans $X_1 \cup X_2$, donc x est un point isolé de son orbite. Donc les éléments de $\langle A, B \rangle$ ne s'accroissent pas sur l'identité : $\langle A, B \rangle$ est discret. (Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ est non discret, il y a une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ d'éléments différents de I qui tend vers I : si $x \in \mathbb{H}^2$, pour que x soit un point isolé de son orbite, il faudrait que γ_n soit un élément elliptique de centre x pour tout n assez grand, et, par suite, que tout élément de Γ fixe x ; ce n'est pas le cas ici).

Exercice 3 (une étude de commutateurs)

1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

Le fait que les axes de A et de B ne se croisent pas dans \mathbb{H}^2 impose que b et c soient non nuls. Les points fixes de B dans \mathbb{R} sont donnés par : $cx^2 + (d-a)x - b = 0$, i.e., $x^2 + \frac{d-a}{c}x - \frac{b}{c} = 0$.

Le terme $-\frac{b}{c}$ est le produit des racines de cette équation : dire que les axes de A et B se croisent équivaut à dire que $-\frac{b}{c} < 0$, donc que $bc > 0$.

2) On calcule gaiement.

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda & b\lambda \\ \frac{c}{\lambda} & \frac{d}{\lambda} \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} \\ -c\lambda & a\lambda \end{pmatrix}$$

donc $tr([A, B]) = ad - bc\lambda^2 - bc\frac{1}{\lambda^2} + ad = 2 - bc(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2)$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $tr([A, B]) \leq 2$. Si λ est proche de 1 (autrement dit, si A est proche de I), $[A, B]$ est un élément elliptique, proche de l'identité. À mesure que λ s'éloigne de 1, $tr([A, B])$ diminue, dans $] -\infty, 2]$: $[A, B]$ est parabolique lorsque cette trace vaut -2 , et $[A, B]$ est hyperbolique lorsque $tr([A, B]) < -2$. Dans ce dernier cas, on peut vérifier qu'on est toujours dans la situation d'un groupe de Schottky, comme dans l'exercice 2 (indication : on pourra commencer par étudier l'orbite d'un point fixe de $[A, B]$ sous $B^{-1}, A^{-1}B^{-1}, BA^{-1}B^{-1}$).

Le cas où $\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$ est un cas où les axes de A et de B se rencontrent de façon orthogonale ; les dessins sont alors un peu plus faciles à réaliser.

DESSINS.

Exercice 4 Soit Γ un sous-groupe non élémentaire, non discret de $PSL(2, \mathbb{R})$. Il existe donc une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ d'éléments tous distincts de I , et qui tend vers I . Si un des γ_n est elliptique, on n'a pas grand chose à faire : supposons donc que pour tout $n \geq 0$, γ_n est hyperbolique ou parabolique.

Quitte à extraire cette suite, on suppose que soit tous les γ_n sont hyperboliques, soit qu'ils sont tous paraboliques.

S'ils sont tous paraboliques, quitte à extraire cette suite, la suite de leurs points fixes tend vers un certain point $r \in \partial\mathbb{H}^2$. Comme Γ n'est pas élémentaire, il existe $\gamma \in \Gamma$ qui ne fixe pas r . En décomposant γ_n et $\gamma^{-1}\gamma_n\gamma$ en produits, chacun, de deux inversions bien adéquates, on se convaincra aisément que $\gamma^{-1}\gamma_n\gamma$ est elliptique, pour n assez grand. Ceux qui n'aiment pas les preuves par dessin pourront calculer que la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

vaut $2 - c^2\varepsilon$. Si n est assez grand, on conjugue simultanément γ et γ_n par une matrice proche de l'identité, pour que γ_n fixe ∞ . Alors γ_n prend une forme parabolique comme ci-dessus, avec ε proche de 1, et γ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $c \neq 0$, proche de la valeur correspondante dans la matrice de γ . Pour

n assez grand, nous trouvons ainsi une matrice de trace légèrement inférieure à 2 : donc Γ contient un élément elliptique.

Reste le cas où les éléments γ_n sont tous hyperboliques.

Commençons par vérifier que, si a, b sont deux éléments de $\partial\mathbb{H}^2$, il existe un élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$ dont les points fixes au bord sont distincts de a et b . Comme Γ n'est pas élémentaire, l'orbite du point fixe attractif de γ_0 est infinie, donc, quitte à le conjuguer, on peut supposer que ce point fixe attractif n'est ni a ni b . Et pour N grand, les deux points fixes de $\gamma_0^{-N}\gamma_1\gamma_0^N$ sont proches du point fixe attractif de γ_0 . Donc ce conjugué convient.

Quitte à extraire la suite (γ_n) , on peut supposer que les points fixes de γ_n tendent vers des points a et b de $\partial\mathbb{H}^2$. Avec peut-être $a \neq b$, mais peut-être pas. D'après ce qu'on vient de vérifier, il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ qui ne fixe ni a ni b . Quitte à conjuguer Γ , on peut supposer que γ fixe 0 et ∞ , donc on écrit γ sous la forme $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, et γ_n s'écrit $\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, avec $a_n, d_n \rightarrow 1, b_n, c_n \rightarrow 0$. De plus, b_n et c_n ne s'annulent pas pour n assez grand, parce que les points fixes de γ_n tendent vers d'autres points que 0 et ∞ .

On calcule alors :

$$[\gamma, \gamma_n] = \begin{pmatrix} a_n d_n - \lambda^2 b_n c_n & a_n b_n (1 - \lambda^2) \\ c_n d_n (1/\lambda^2 - 1) & -\frac{b_n c_n}{\lambda^2} + a_n d_n \end{pmatrix}$$

donc, pour n assez grand, si $b_n c_n > 0$ on a un élément elliptique dans Γ . Supposons donc que pour tout n assez grand, $b_n c_n < 0$. On a $a_n b_n c_n d_n = b_n c_n (1 + b_n c_n)$: donc pour n assez grand, $a_n b_n c_n d_n < 0$, et donc $[\gamma, [\gamma, \gamma_n]]$ est elliptique pour n assez grand, d'après le calcul qu'on vient de faire.

Exercice 5 (*covolume*)

A FAIRE.

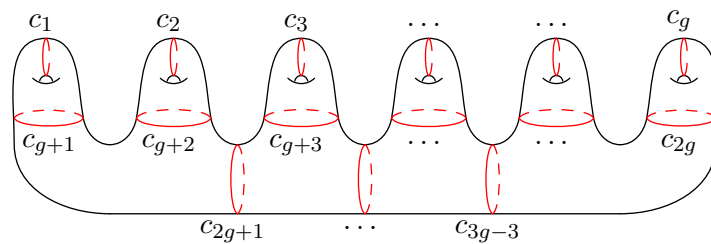
Exercice 6 (*groupes de surfaces, groupes triangulaires*)

A FAIRE.

FEUILLE 4 : Coordonnées de Fenchel-Nielsen Éléments de correction

Exercice 1

Si $g \geq 4$:



(si $g = 2$ ou 3 , certaines des courbes ci-dessus n'ont pas lieu d'être).

Pour chacune de ces courbes C_i , on peut choisir un élément $\gamma_i \in \pi_1 \Sigma_g$ représentant une courbe librement homotope à C_i . On a alors :

$$\ell(C_i) = 2 \operatorname{arccosh} \left(\frac{|\operatorname{tr}(\rho(\gamma_i))|}{2} \right).$$

Quant à la topologie sur \mathcal{X}_g : on munit $\operatorname{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}))$ de la topologie de la convergence simple. Il n'y a pas d'autre choix raisonnable. En effet, si on y mettait par exemple la topologie de la convergence uniforme, toutes les représentations non élémentaires seraient des points isolés (considérer des puissances !). La fonction Φ est donc définie déjà au niveau de $\operatorname{Hom}(\pi_1 \Sigma_g, \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}))$, elle y est continue, et elle est constante sur les classes de conjugaison : donc elle passe au quotient en une fonction continue.

Dans la majeure partie de cette feuille, on utilisera un système générateur "standard" :

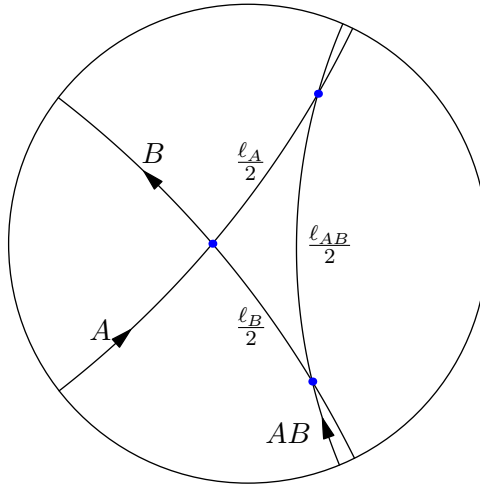
$$\pi_1 \Sigma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

Dans le dessin ci-dessus, si $1 \leq i \leq g$ on peut prendre $\gamma_i = a_i$, $\gamma_{g+i} = [a_i, b_i]$, et $\gamma_{2g+i} = \prod_{k=1}^{i+1} [a_k, b_k]$ si $1 \leq i \leq g - 3$.

Exercice 2 (*produits d'isométries hyperboliques*)

1) Toute isométrie hyperbolique γ , de distance de déplacement ℓ_γ , est la composée de deux isométries elliptiques d'angle π , et de centres sur l'axe de γ , espacés de $\frac{\ell_\gamma}{2}$.

Si A et B sont deux isométries hyperboliques dont les axes se croisent, on les réalise comme produits de symétries centrales, comme suit :



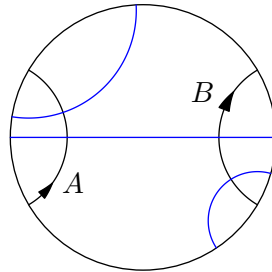
On en déduit que AB est une isométrie hyperbolique, dont l'axe et la distance de déplacement sont indiqués sur la figure ci-dessus.

Si θ est l'angle entre les axes de A et B (convenablement orientés...), on a donc :

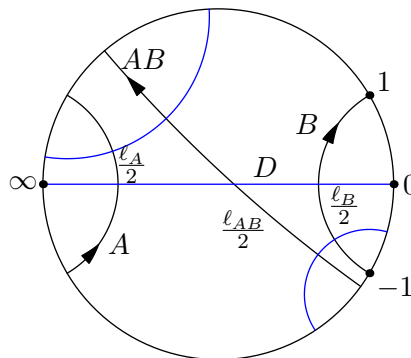
$$\cosh\left(\frac{\ell_{AB}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\ell_A}{2}\right) \cosh\left(\frac{\ell_B}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\ell_A}{2}\right) \sinh\left(\frac{\ell_B}{2}\right) \cos \theta.$$

Dans le cas particulier où les axes de A et B se croisent de façon orthogonale, on a : $2|tr(AB)| = |tr(A)| \cdot |tr(B)|$.

2) Cette fois-ci on décompose A et B en produits de deux inversions, en se servant en commun de la perpendiculaire commune à leurs axes :



On constate que AB est hyperbolique. Si D est la distance entre les axes de A et B , la distance de déplacement de AB est donnée par la figure suivante :



Quitte à conjuguer A et B simultanément, on place des points en ∞ , 0 , 1 et -1 comme ci-dessus (en fait, on est libre de placer trois de ces points, et le quatrième est à l'endroit indiqué parce que les axes concernés sont orthogonaux).

On a alors : $B = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\ell_B}{2} & \sinh \frac{\ell_B}{2} \\ \sinh \frac{\ell_B}{2} & \cosh \frac{\ell_B}{2} \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} e^{D/2} & 0 \\ 0 & e^{-D/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\ell_A}{2} & \sinh \frac{\ell_A}{2} \\ \sinh \frac{\ell_A}{2} & \cosh \frac{\ell_A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-D/2} & 0 \\ 0 & e^{D/2} \end{pmatrix}$.

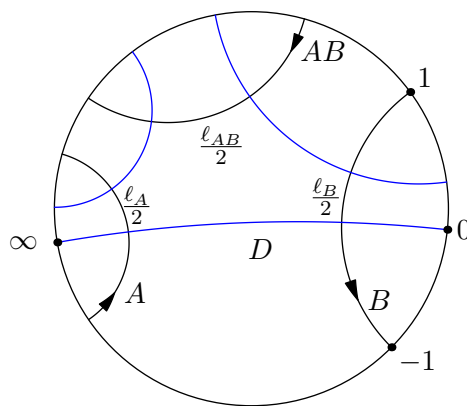
Cela donne

$$|\text{tr}(AB)| = 2 \cosh \frac{\ell_A}{2} \cosh \frac{\ell_B}{2} + 2 \cosh D \sinh \frac{\ell_A}{2} \sinh \frac{\ell_B}{2},$$

d'où, sans ambiguïté de signe,

$$\cosh \frac{\ell_{AB}}{2} = \cosh \frac{\ell_A}{2} \cosh \frac{\ell_B}{2} + \cosh D \sinh \frac{\ell_A}{2} \sinh \frac{\ell_B}{2}.$$

3) L'hypothèse de l'énoncé nous place dans le cas suivant :



On note encore D la distance entre les axes de A et B . Cette fois-ci $B = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\ell_B}{2} & -\sinh \frac{\ell_B}{2} \\ -\sinh \frac{\ell_B}{2} & \cosh \frac{\ell_B}{2} \end{pmatrix}$, et

$$A = \begin{pmatrix} e^{D/2} & 0 \\ 0 & e^{-D/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\ell_A}{2} & \sinh \frac{\ell_A}{2} \\ \sinh \frac{\ell_A}{2} & \cosh \frac{\ell_A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-D/2} & 0 \\ 0 & e^{D/2} \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$\cosh \frac{\ell_{AB}}{2} = \left| \cosh \frac{\ell_A}{2} \cosh \frac{\ell_B}{2} - \cosh D \sinh \frac{\ell_A}{2} \sinh \frac{\ell_B}{2} \right|.$$

Cette formule évolue continûment lorsque D tend vers l'infini : donc en fait,

$$\cosh \frac{\ell_{AB}}{2} = \cosh D \sinh \frac{\ell_A}{2} \sinh \frac{\ell_B}{2} - \cosh \frac{\ell_A}{2} \cosh \frac{\ell_B}{2}.$$

Exercice 3 (*l'espace des pantalons hyperboliques*)

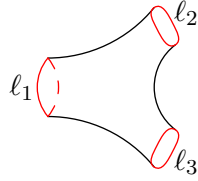
1) (*hegagones droits*)

a) Ça existe.

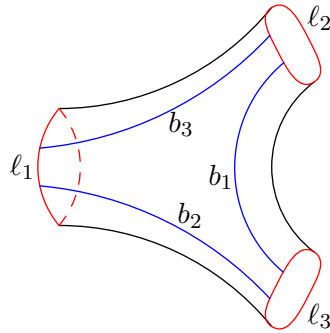
b) Vu dans l'exercice 2, question 3. Une conséquence de cette formule est que les trois côtés alternés a_1 , a_2 , a_3 déterminent les trois autres.

2) (*pantalons hyperboliques*)

Étant donné un pantalon hyperbolique à bord géodésique, de longueurs de bords ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 :



On trace les perpendiculaires communes, deux à deux, aux courbes de bord (on vérifie leur existence en se plaçant au revêtement universel, isométrique à une partie de \mathbb{H}^2); elles sont de longueurs b_1, b_2, b_3 .



Ces trois segments découpent le pantalon en deux hexagones à angles droits, isométriques puisque leurs côtés alternés ont mêmes longueurs b_1, b_2, b_3 . Donc chaque courbe de bord est ainsi découpée en deux segments de mêmes longueurs, $\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}, \frac{\ell_3}{2}$.

Trois réels $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}_+^*$ déterminent un unique hexagone à angles droits de longueurs $\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}, \frac{\ell_3}{2}$. On recolle deux copies de cet hexagone le long des côtés de mêmes longueurs, obtenant ainsi un pantalon dont les trois longueurs des courbes de bord sont ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Cette construction est univoque, et réalise une bijection de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans l'ensemble des pantalons à bords géodésiques. La mesure des trois longueurs de bord est la bijection réciproque.

3) (*hexagones tirebouchonnés*)

Vu dans l'exercice 2, question 2.

Exercice 4 (*tore troué*)

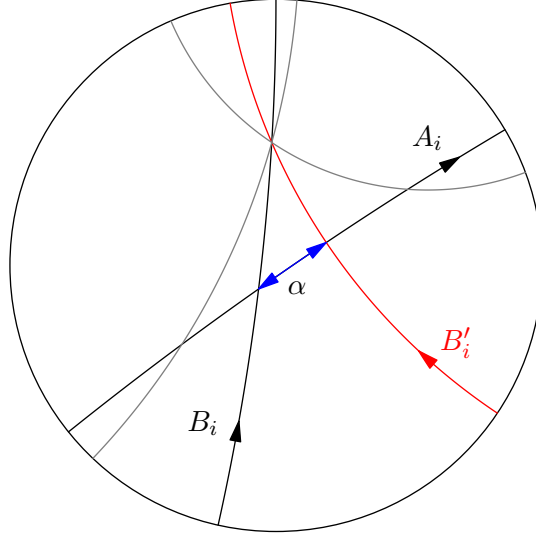
2) $a_1 \mapsto a_1; b_1 \mapsto b_1 a_1^N$. (pour un certain nombre N de twists).

Exercice 5 (*sphère à quatre trous*) 2) $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto (ab)^N c (ab)^{-N}, d \mapsto (ab)^N d (ab)^{-N}$.

$bc \mapsto b(ab)^N c (ab)^{-N}$.

Exercice 6 (*cas du tore troué*)

1) On se réfère ici à la question 1 de l'exercice 2.



Pour minimiser la distance de déplacement de $B_i \cdot {}_t A_i$, il faut prendre le paramètre t tel que l'axe de $B_i \cdot {}_t A_i$ soit orthogonal à celui de A_i .

Notons B'_i cette matrice $B_i \cdot {}_t A_i$. On a alors $B_i = B'_i \cdot {}_{-t} A_i$, et $-t$ est le paramètre de twist α recherché. Comme les axes de B'_i et de ${}_{-t} A_i$ sont orthogonaux, on a : $\cosh\left(\frac{\ell_{B_i}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\ell_{B'_i}}{2}\right) \cosh\left(\frac{\ell_{\alpha A_i}}{2}\right)$, donc $|tr(B_i)| = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) |tr(B'_i)|$.

De même,

$$|tr(B_i A_i)| = \cosh\left(\frac{\alpha + \ell_A}{2}\right) |tr(B'_i)|,$$

donc

$$\left| \frac{tr(B_i A_i)}{tr(B_i)} \right| = \frac{\cosh\left(\frac{\alpha + \ell_A}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{\ell_A}{2}} \cdot e^\alpha + e^{-\frac{\ell_A}{2}}}{e^\alpha + 1}.$$

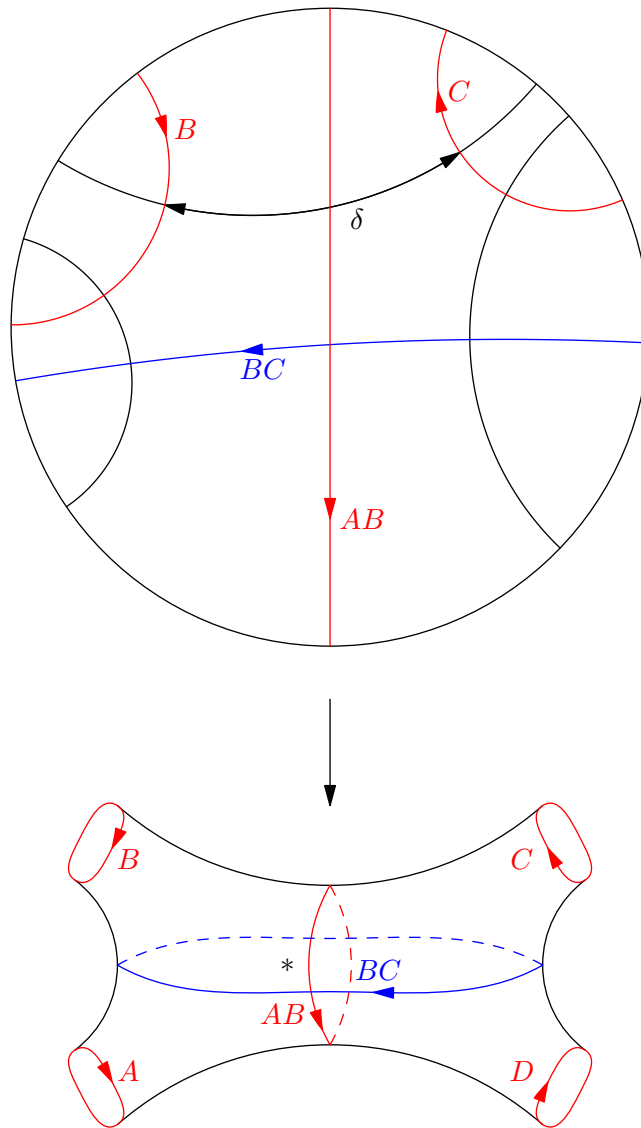
C'est une homographie, inversible, en e^α . Donc $e^\alpha = \frac{1 \cdot \left| \frac{tr(B_i A_i)}{tr(B_i)} \right| - e^{-\frac{\ell_{A_i}}{2}}}{-1 \cdot \left| \frac{tr(B_i A_i)}{tr(B_i)} \right| + e^{-\frac{\ell_{A_i}}{2}}}$. Donc

$$\alpha = \ln \left(\frac{\left| \frac{tr(B_i A_i)}{tr(B_i)} \right| - e^{-\frac{\ell_{A_i}}{2}} \left| tr(B_i) \right|}{-\left| \frac{tr(B_i A_i)}{tr(B_i)} \right| + e^{-\frac{\ell_{A_i}}{2}} \left| tr(B_i) \right|} \right),$$

et $|tr(A_i)| = e^{\frac{\ell_{A_i}}{2}} + e^{-\frac{\ell_{A_i}}{2}}$, ce qui donne $e^{\frac{\ell_{A_i}}{2}} = \frac{|tr(A_i)| + \sqrt{|tr(A_i)|^2 - 4}}{2}$.

Nous avons bien exprimé le paramètre α en fonction de $|tr(A_i)|$, $|tr(B_i)|$ et $|tr(B_i A_i)|$.

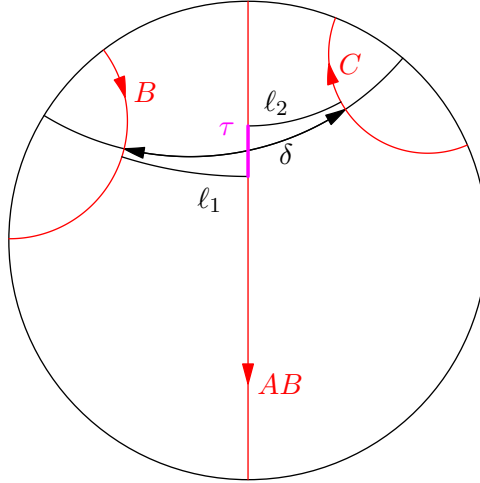
Exercice 7 (cas de la sphère à quatre trous)



C'est la formule trouvée à la question 1)b) de l'exercice 3 qu'on applique ici :

$$\cosh\left(\frac{\ell_{BC}}{2}\right) = \cosh \delta \sinh\left(\frac{\ell_B}{2}\right) \sinh\left(\frac{\ell_C}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\ell_B}{2}\right) \cosh\left(\frac{\ell_C}{2}\right).$$

Reste à exprimer δ . On le trouve en considérant les perpendiculaires communes entre l'axe de AB , et les axes de B et C :



La formule de la question 3 de l'exercice 3 donne :

$$\cosh \tau \sinh \ell_1 \sinh \ell_2 = \cosh \delta - \cosh \ell_1 \cosh \ell_2.$$

Donc

$$\cosh \left(\frac{\ell_{BC}}{2} \right) = -\cosh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) + \sinh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \sinh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) (\cosh \tau \sinh \ell_1 \sinh \ell_2 + \cosh \ell_1 \cosh \ell_2)$$

i.e.

$$\cosh \left(\frac{\ell_{BC}}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) + \sinh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \sinh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) \cdot \cosh \ell_1 \cosh \ell_2 = \cosh \tau \times C^{te}.$$

Le terme C^{te} ne nous intéresse pas, hormis le fait qu'il est non nul : on va s'en débarrasser exactement comme on s'est débarrassé du terme $|tr B'_i|$ dans l'exercice précédent.

Et $\cosh \ell_1$ est donné par un hexagone à angles droits, dont trois côtés alternés sont $\frac{\ell_B}{2}$, $\frac{\ell_A}{2}$ et $\frac{\ell_{AB}}{2}$ (cf dernier dessin). On en tire l'égalité :

$$\cosh \ell_1 \cdot \sinh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \sinh \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right) = \cosh \left(\frac{\ell_A}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right).$$

De même,

$$\cosh \ell_2 \cdot \sinh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) \sinh \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right) = \cosh \left(\frac{\ell_D}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right).$$

Après un petit calcul, on pose donc

$$X = \frac{\cosh \left(\frac{\ell_A}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_D}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_C}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right) \cdot (\cosh \left(\frac{\ell_B}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_D}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\ell_A}{2} \right) \cosh \left(\frac{\ell_C}{2} \right))}{\sinh^2 \left(\frac{\ell_{AB}}{2} \right)}$$

Cette formule, certes copieuse, n'utilise que des traces de courbes rouges ; c'est la raison pour laquelle on l'a écrite en rouge.

On a donc, avec les mêmes constantes :

$$\begin{cases} C^{te} \cdot \cosh \tau = \cosh \left(\frac{\ell_{BC}}{2} \right) - X \\ C^{te} \cdot \cosh (\tau + \ell_{AB}) = \cosh \left(\frac{\ell_{B(AB)C(AB)^{-1}}}{2} \right) - X, \end{cases}$$

ce qui fait :

$$\frac{e^{\tau+\ell_{AB}} - e^{-\tau-\ell_{AB}}}{e^{\tau} - e^{-\tau}} = \frac{\cosh\left(\frac{\ell_{B(AB)C(AB)^{-1}}}{2}\right) - X}{\cosh\left(\frac{\ell_{BC}}{2}\right) - X}.$$

Encore une fois, cette homographie s'inverse, et donne $e^{2\tau}$ en fonction du membre de droite. Si on note Z le membre de droite dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$e^{2\tau} = \frac{Z - e^{-\ell_{AB}}}{Z - e^{\ell_{AB}}}.$$

On a bien, encore une fois, exprimé τ en fonction de (valeurs absolues de) traces de matrices.

Plaçons ici quelques commentaires.

Le premier : dans cet exercice, comme dans le précédent, on a exprimé les coordonnées de Fenchel-Nielsen en termes des traces des courbes rouges, ainsi que d'une courbe bleue et de son image par un twist de Dehn le long de la courbe rouge qui lui est associée. Au total, on a donc exprimé tous nos paramètres en fonctions de $9g - 9$ paramètres de traces.

Le deuxième : je (l'auteur de ces feuilles) revendique que les signes de chaque coordonnée de twist a été donné ici de manière franchement hasardeuse, ce qui est incontestablement regrettable. Le signe, dans ces paramètres, est choisi au moment où on compare, dans les deux exercices précédents, $\cosh \alpha 2$ ou $\cosh \tau$ avec $\cosh(\alpha + \ell_A 2)$ ou $\cosh(\tau + \ell_{AB})$. Le bon signe à mettre ici devant ℓ_A ou ℓ_{AB} se trouve en orientant correctement chacune de nos courbes (un twist de Dehn n'a pas besoin de l'orientation de la courbe le long de laquelle on twist, en revanche pour l'exprimer on a besoin d'orienter les courbes!). Seulement, les choix de signes, ou de côté duquel on agit, c'est vraiment pas mon truc, alors je laisse ça au lecteur motivé et courageux.

Exercice 8 (*bilan : toutes les coordonnées en termes de traces, en genre 2*)

A FAIRE.

Exercice 9 (*pour $g = 2$, les matrices en fonction des coordonnées*)

A FAIRE.
