# LIMITE ASYMPTOTIQUE DES ÉQUATIONS DE BOLTZMANN À CHAMP FORT : SOLUTION ENTROPIQUE

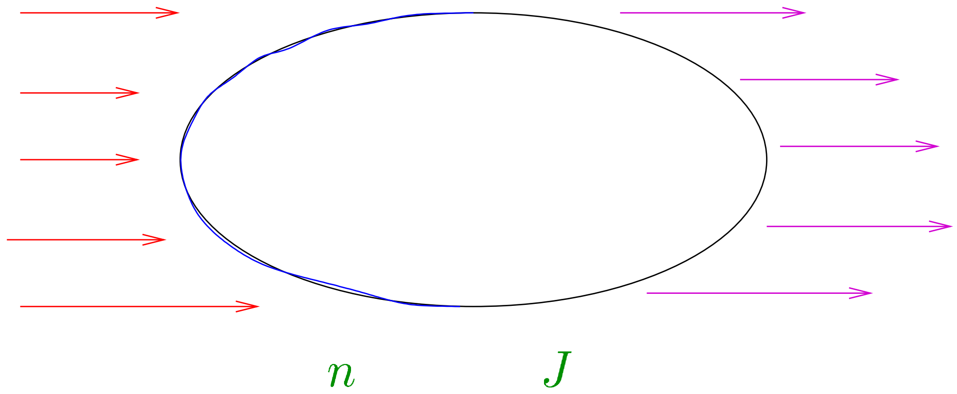
Hédia CHAKER

LABORATOIRE DE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE
DANS LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
ECOLE NATIONALE D'INGÉNIEUR DE TUNIS, TUNISIE

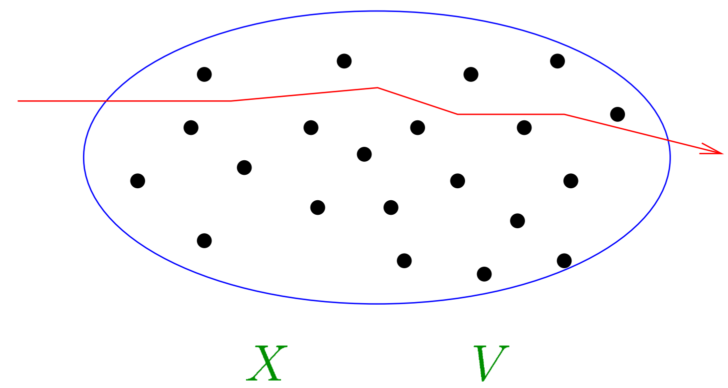
Naoufel Ben Abdallah,
LABORATOIRE MIP DE L'UNIVERSITÉ PAUL-SABATIER DE TOULOUSE.

Christian Schmeiser,

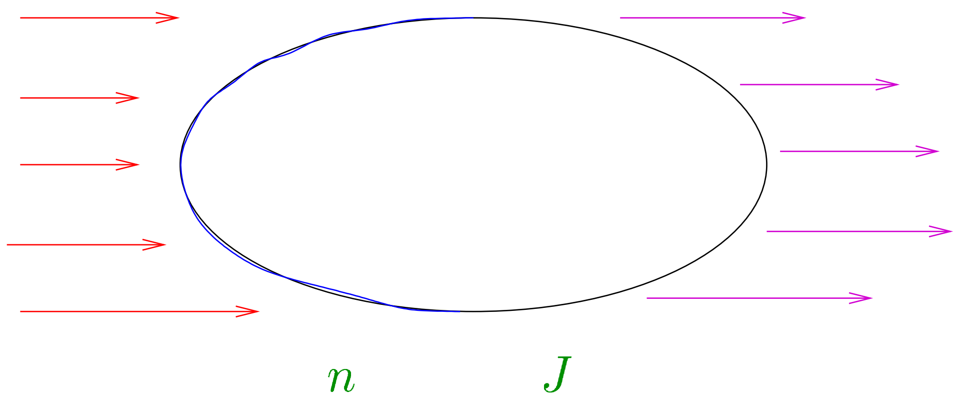
INSTITUTE OF ANALYSIS AND SCIENTIFIC COMPUTING,
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY .

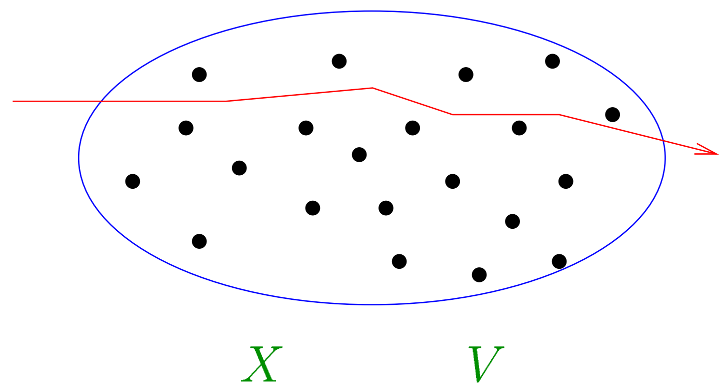



$$\partial_t\, n(t,x) + div J(n)(t,x) = 0$$




$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(s) = V(s) \\ \\ m\dfrac{dV}{dt}(s) = -F(s, X(s)) \end{cases}$$



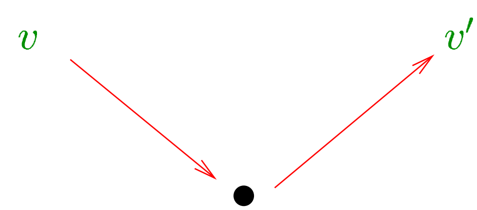



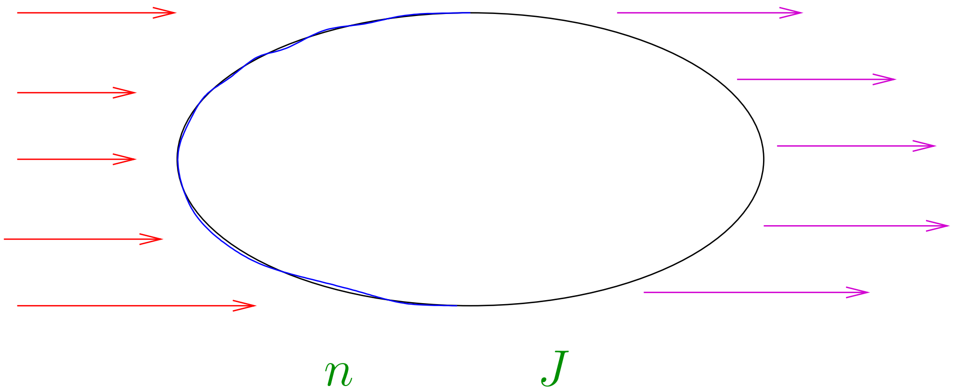

$$\partial_t\, n(t,x) + div J(n)(t,x) = 0$$

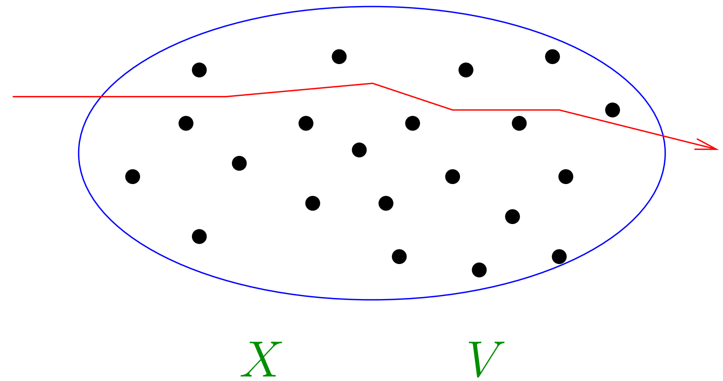
$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(s) = V(s) \\ m\frac{dV}{dt}(s) = -F(s, X(s)) \end{cases}$$

$$f(t, x, v)$$

$$\frac{d}{dt} f\ (t, X(t), V(t)) \ = Q(f)_{X(t),V(t)}$$






$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(s) = V(s) \\[2ex] m\dfrac{dV}{dt}(s) = -F(s, X(s)) \end{cases}$$

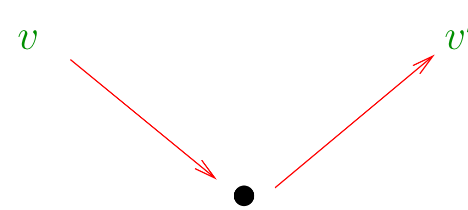
$$\partial_t\, n(t,x) + div J(n)(t,x) = 0$$

$$\uparrow$$

$$\uparrow$$

$$f(t, x, v)$$

$$\frac{d}{dt} f\,(t, X(t), V(t)) \; = Q(f)_{X(t),V(t)}$$



## Limite Asymptotique de l'équation de Boltzmann à champ fort

- Domaine infini

Passage du modèle microscopique au modèle macroscopique.

*The high field asymptotics for degenerate semiconductors*,

Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol **11**, (2001), pp. 1253-1272 (N. Ben Abdallah, HC).

- Problème de couches limites

Passage des conditions aux limites de l'équation microscopique à l'équation macroscopique.

*The high field asymptotics for degenerate semiconductors : Initial and boundary layer analysis*

Asymptotic Analysis Vol **37**,N2 (2004), pp. 143-174 (N. Ben Abdallah, HC).

- Problème de choc

solution choc pour le problème macroscopique de la densité.

*The high field asymptotics for fermionic Boltzman equation : Entropy solutions ans kinetic shock profiles*

*Collaboration :Christian Schmeiser, Institute of Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology .*

*Collaboration : Naoufel Ben Abdallah, Laboratoire MIP de l'Université Paul-Sabatier de Toulouse.*

$$\begin{cases} \partial_t f + v(k).\nabla_x f + (E(t,x).\nabla_k f - Q(f)) = 0 \\ f(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) \qquad\qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$Q(f)(k) = \int_B \sigma(k,k') \left\{ f(k')(1-f(k))M(k) - f(k)(1-f(k'))M(k') \right\} dk'$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v(k).\nabla_x f_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(E(t,x).\nabla_k f_\varepsilon - Q(f_\varepsilon)) = 0 \\ f_\varepsilon(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) \qquad \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \end{cases}$$

$$Q(f_\varepsilon)(k) = \int_B \sigma(k,k') \left\{ f_\varepsilon(k')(1 - f_\varepsilon(k))M(k) - f_\varepsilon(k)(1 - f_\varepsilon(k'))M(k') \right\} dk'$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v(k).\nabla_x f_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(E(t,x).\nabla_k f_\varepsilon - Q(f_\varepsilon)\right) = 0 \\ f_\varepsilon(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) \qquad\qquad \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \end{cases}$$

$$Q(f_\varepsilon)(k) = \int_B \sigma(k,k') \left\{ f_\varepsilon(k')(1 - f_\varepsilon(k))M(k) - f_\varepsilon(k)(1 - f_\varepsilon(k'))M(k') \right\} dk'$$

$$\Downarrow \qquad f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v(k).\nabla_x f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(E(t,x).\nabla_k f_\varepsilon - Q(f_\varepsilon)\right) = 0 \\ f_\varepsilon(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) \qquad\qquad \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \end{cases}$$

$$Q(f_\varepsilon)(k) = \int_B \sigma(k,k') \left\{ f_\varepsilon(k')(1 - f_\varepsilon(k))M(k) - f_\varepsilon(k)(1 - f_\varepsilon(k'))M(k') \right\} dk'$$

$$\Downarrow \qquad f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

$$E.\nabla_k f_0 - Q(f_0) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v(k).\nabla_x f_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(E(t,x).\nabla_k f_\varepsilon - Q(f_\varepsilon)\right) = 0 & \\ f_\varepsilon(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) & \omega \times \mathrm{R}^n \\ f_\varepsilon(t,x,k) = f_{Inc}(t,x,k) & \mathrm{R}^+ \times \Gamma^- \end{cases}$$

$$Q(f_\varepsilon)(k) = \int_B \sigma(k,k')\left\{f_\varepsilon(k')(1 - f_\varepsilon(k))M(k) - f_\varepsilon(k)(1 - f_\varepsilon(k'))M(k')\right\} dk'$$

$$\Downarrow \qquad f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

$$E.\nabla_k f_0 - Q(f_0) = 0$$

$$\Downarrow \qquad E.\nabla_k f_1 - L_{f_0}(f_1) = -(\partial_t f_0 + v.\nabla_x f_0)$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v(k).\nabla_x f_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(E(t,x).\nabla_k f_\varepsilon - Q(f_\varepsilon)) = 0 \\ f_\varepsilon(0,x,k) = f_{Ini}(x,k) \qquad\qquad \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \end{cases}$$

$$Q(f_\varepsilon)(k) = \int_B \sigma(k,k')\left\{f_\varepsilon(k')(1 - f_\varepsilon(k))M(k) - f_\varepsilon(k)(1 - f_\varepsilon(k'))M(k')\right\} dk'$$

$$\Downarrow \qquad f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

$$E.\nabla_k f_0 - Q(f_0) = 0$$

$$\Downarrow \qquad E.\nabla_k f_1 - L_{f_0}(f_1) = -(\partial_t f_0 + v.\nabla_x f_0)$$

$$\begin{cases} \partial_t n + div_x J(n,E) = 0 \qquad \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^n \\ n(0,x) = n_{Ini}(x) \qquad x \in \mathrm{R}^n \end{cases}$$

# Existence de la solution limite

$$(1) \qquad \begin{cases} E.\nabla_k f - Q(f) = 0 \\ \int_B f(k)dk = n \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} E.\nabla_k f - Q(f) = 0 \\ \int_B f(k)dk = n \end{cases}$$

**Théorème** *Soit $E$ un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{R}^+$, il existe une unique fonction $f \in L^1(B)$ telle que $E.\nabla_k f \in L^1(B)$, $0 \leq f \leq 1$ solution de (1). Cette unique solution est notée par $f = F(n, E)$.*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} E.\nabla_k f - Q(f) = 0 \\ \int_B f(k)dk = n \end{array} \right.$$

**Théorème** *Soit $E$ un vecteur fixé dans $\mathrm{R}^d$. Alors, pour chaque $n \in \mathrm{R}^+$, il existe une unique fonction $f \in L^1(B)$ telle que $E.\nabla_k f \in L^1(B)$, $0 \leq f \leq 1$ solution de (1). Cette unique solution est notée par $f = F(n, E)$.*

$$(1) \quad \begin{cases} E.\nabla_k f - Q(f) = 0 \\ \int_B f(k)dk = n \end{cases}$$

**Théorème** *Soit* $E$ *un vecteur fixé dans* $\mathbb{R}^d$*. Alors, pour chaque* $n \in \mathbb{R}^+$*, il existe une unique fonction* $f \in L^1(B)$ *telle que* $E.\nabla_k f \in L^1(B)$*,* $0 \leq f \leq 1$ *solution de (1). Cette unique solution est notée par* $f = F(n, E)$*.*

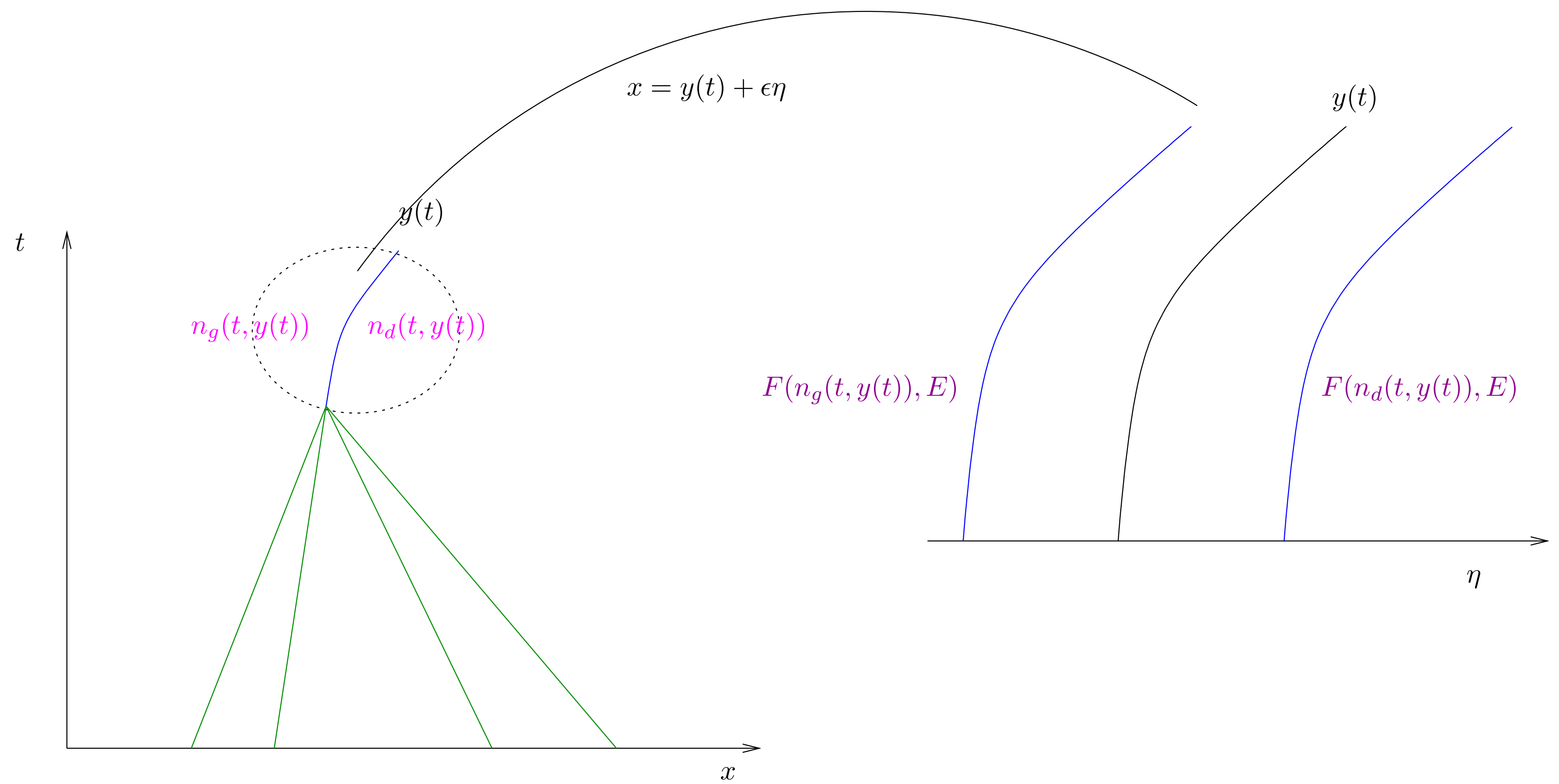
$$H_E = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times D_E & \to & \mathbb{R} \times L^{1,0}(B) \\ (n, f) & \mapsto & (\int_B f(k)dk - n, E.\nabla_k f - Q(f)) \end{pmatrix}$$

$$D_E = \left\{ f \in L^1(B); \;\; E.\nabla_k f \in L^1(B) \right\}$$

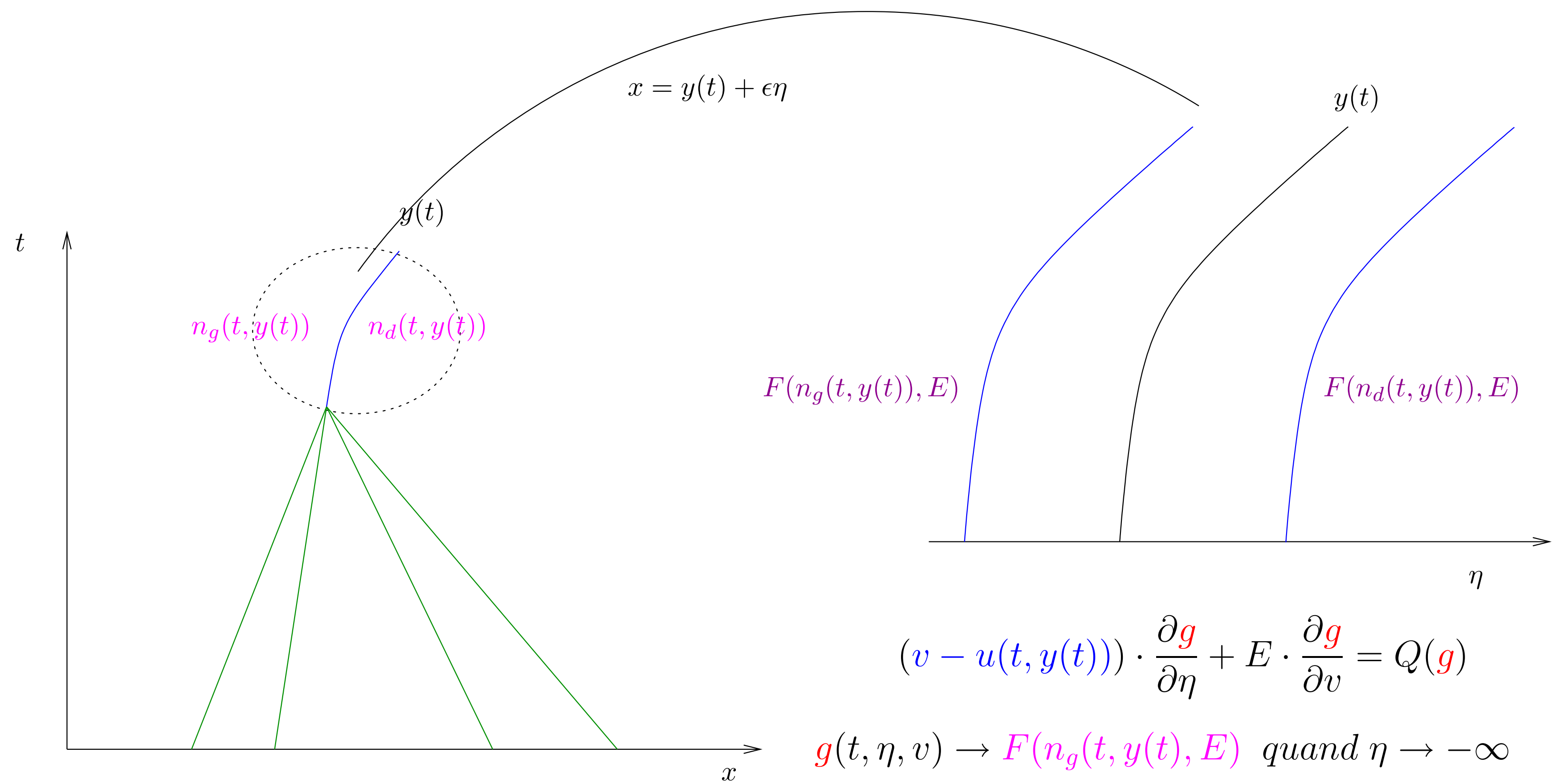
$$H_E(n, f) = (0, 0)$$

F. Poupaud, *Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductor kinetic theory*, Z. Angew. Math. Mech. **72**,(1992), pp. 359-372.

# Solution choc



# Solution choc




$$(v - u(t, y(t))) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = Q(g)$$

$$g(t, \eta, v) \to F(n_g(t, y(t), E) \ \ quand\ \eta \to -\infty$$

$$g(t, \eta, v) \to F(n_d(t, y(t), E) \ \ quand\ \eta \to +\infty$$

## Existence du profil de choc

$$(v - u) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = Q(g), \quad \text{on } \mathrm{R} \times \mathrm{R}, \tag{1}$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} g(\eta, v) = F(n_1, E)(v), \tag{2}$$

$$\lim_{\eta \to +\infty} g(\eta, v) = F(n_2, E)(v). \tag{3}$$

$$(v - u) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = Q(g), \quad \text{on} \;\; \mathrm{R} \times \mathrm{R}, \tag{4}$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} g(\eta, v) = F(n_1, E)(v), \tag{5}$$

$$\lim_{\eta \to +\infty} g(\eta, v) = F(n_2, E)(v). \tag{6}$$

**Théorème**

*Soit* $n^* \in \mathrm{R}^+$ *tel que* $j$ *est une fonction strictement convexe par rapport à* $n$ *sur* $[0, n^*]$.

*) Pour qu une solution de (10)- (12) existe,* $u$ *doit vérifi er la condition de Rankine Hugoniot*

$$u = \frac{j(n_2, E) - j(n_1, E)}{n_2 - n_1}.$$

$$(v - u) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = Q(g), \quad \text{on} \ \ \mathrm{R} \times \mathrm{R}, \tag{7}$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} g(\eta, v) = F(n_1, E)(v), \tag{8}$$

$$\lim_{\eta \to +\infty} g(\eta, v) = F(n_2, E)(v). \tag{9}$$

**Théorème** *Soit* $n^* \in \mathrm{R}^+$ *tel que* $j$ *est une fonction strictement convexe par rapport à* $n$ *sur* $[0, n^*]$.

*i) Pour qu une solution de (10)- (12) existe,* $u$ *doit vérifi er la condition de Rankine Hugoniot*

$$u = \frac{j(n_2, E) - j(n_1, E)}{n_2 - n_1}.$$

*ii) Supposons* $n_1 \geq n_2$ *( choc entropique). Alors, pour la valeur de* $u$ *donné au dessus, (10)- (12) a une unique solution à une translation de* $\eta$ *près.*

$$(v - u) \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = Q(g), \quad \text{on } \mathrm{R} \times \mathrm{R}, \tag{10}$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} g(\eta, v) = F(n_1, E)(v), \tag{11}$$

$$\lim_{\eta \to +\infty} g(\eta, v) = F(n_2, E)(v). \tag{12}$$

**Théorème** *Soit* $n^* \in \mathrm{R}^+$ *tel que* $j$ *est une fonction strictement convexe par rapport à* $n$ *sur* $[0, n^*]$*.*

*) Pour qu une solution de (10)- (12) existe,* $u$ *doit vérifi er la condition de Rankine Hugoniot*

$$u = \frac{j(n_2, E) - j(n_1, E)}{n_2 - n_1}.$$

*i) Supposons* $n_1 \geq n_2$ *( choc entropique). Alors, pour la valeur de* $u$ *donné au dessus, (10)- (12) a une unique solution à une translation de* $\eta$ *près .*

*ii) Si* $n_2 \geq n_1$ *( choc non entropique), (10)- (12) n a pas de solution.*

Condition d admissibilité

$$\frac{j(n,E)-j(n_1,E)}{n-n_1}-u\geq 0, \quad \text{for all } n\in]n_2,n_1[$$

$$\frac{j(n),E)-j(n_2,E)}{n-n_2}-u\leq 0, \quad \text{for all } n\in]n_2,n_1[$$

$$n = \varphi(g, v) \quad \Leftrightarrow \quad g = F(n)(v)$$

négalité d entropie

$$D(f) = \int (Q(f) - E.\partial_v f)\varphi(f, v)dv \leq 0$$

$$D(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = F(\rho, E)$$

$$-D(f) \geq C(f) \int (f(v) - F(\rho)(v))^2 M(v)dv$$

$$n = \varphi(g, v) \quad \Leftrightarrow \quad g = F(n)(v)$$

négalité d entropie

$$D(f) = \int (Q(f) - E.\partial_v f)\varphi(f, v)dv \leq 0$$

$$D(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = F(\rho, E)$$

$$-D(f) \geq C(f) \int (f(v) - F(\rho)(v))^2 M(v)dv$$

$$\partial_f(\Phi(g, v)) = \varphi(g, v)$$

$$\partial_\eta \int (v - u)\Phi(g, v)dv = \int (Q(g) - E.\partial_v g)\varphi(g, v)dv \leq 0$$

$$n = \varphi(g, v) \quad \Leftrightarrow \quad g = F(n)(v)$$

négalité d entropie

$$D(f) = \int (Q(f) - E.\partial_v f)\varphi(f, v)dv \leq 0$$

$$D(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = F(\rho, E)$$

$$-D(f) \geq C(f) \int (f(v) - F(\rho)(v))^2 M(v)dv$$

$$\partial_f(\Phi(g, v)) = \varphi(g, v)$$

$$\partial_\eta \int (v - u)\Phi(g, v)dv = \int (Q(g) - E.\partial_v g)\varphi(g, v)dv \leq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_1 \geq n_2$$

$$(v - u) \cdot \frac{\partial f_L}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial f_L}{\partial v} = Q(f_L),$$

$$f_L(-L, v) = F(n_1)(v), \qquad v - u > 0,$$

$$f_L(L, v) = F(n_2)(v), \qquad v - u < 0.$$

$$(v-u)\cdot\frac{\partial f_L}{\partial \eta}+E\cdot\frac{\partial f_L}{\partial v}=Q(f_L),$$

$$f_L(-L,v)=F(n_1)(v), \qquad v-u>0,$$

$$f_L(L,v)=F(n_2)(v), \qquad v-u<0.$$

**Lemme** Ce problème a une unique solution $f_L$ dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}=\left\{f\in L^1([-L,L]\times \mathrm{R}); F(n_2)(v)\leq f(\eta,v)\leq F(n_1)(v)\right\}.$$

$$(v - u) \cdot \frac{\partial f_L}{\partial \eta} + E \cdot \frac{\partial f_L}{\partial v} = Q(f_L),$$

$$f_L(-L, v) = F(n_1)(v), \qquad v - u > 0,$$

$$f_L(L, v) = F(n_2)(v), \qquad v - u < 0.$$

**Lemme** Ce problème a une unique solution $f_L$ dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in L^1([-L, L] \times \mathrm{R}); F(n_2)(v) \leq f(\eta, v) \leq F(n_1)(v) \right\}.$$

$$\int_u^{+\infty} F(n_1) dv + \int_{-\infty}^{u} f_L(-L, v) dv \geq \int_u^{+\infty} F(n_1) dv + \int_{-\infty}^{u} F(n_2) dv \geq \int_u^{\infty} f_L(L, v) dv + \int_{-\infty}^{u} F(n_2)) dv$$

$$(v-u)\cdot\frac{\partial f_L}{\partial \eta}+E\cdot\frac{\partial f_L}{\partial v}=Q(f_L),$$

$$f_L(-L,v)=F(n_1)(v), \qquad v-u>0,$$

$$f_L(L,v)=F(n_2)(v), \qquad v-u<0.$$

**Lemme** Ce problème a une unique solution $f_L$ dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}=\left\{f\in L^1([-L,L]\times \mathrm{R});\, F(n_2)(v)\le f(\eta,v)\le F(n_1)(v)\right\}.$$

$$\int_u^{+\infty}F(n_1)dv+\int_{-\infty}^u f_L(-L,v)dv \ge \int_u^{+\infty}F(n_1)dv+\int_{-\infty}^u F(n_2)dv \ge \int_u^{\infty} f_L(L,v)dv+\int_{-\infty}^u F(n_2))dv$$

$$\eta_k=\eta^{L_k}$$

$$\int f_L(\eta^{L_k},v)dv=\int_u^{+\infty}F(n_1)dv+\int_{-\infty}^u F(n_2)dv$$

$$f_k(\eta, v) = f^{1}_{L_k}(\eta + \eta_k, v)$$

$$n^{*}_{1,2} = \int f_k(0, v)dv = \int_{u}^{+\infty} F(n_1)dv + \int_{-\infty}^{u} F(n_2)dv$$

$$f_k(\eta, v) = f^1_{L_k}(\eta + \eta_k, v)$$

$$n^*_{1,2} = \int f_k(0, v)dv = \int_u^{+\infty} F(n_1)dv + \int_{-\infty}^u F(n_2)dv$$

$$f_k \to f \quad in \quad L^\infty(\mathrm{R} \times \mathrm{R}) \quad weak *$$

$$f_k(\eta, v) = f^1_{L_k}(\eta + \eta_k, v)$$

$$n^*_{1,2} = \int f_k(0, v)dv = \int_u^{+\infty} F(n_1)dv + \int_{-\infty}^u F(n_2)dv$$

$$f_k \to f \quad in \quad L^\infty(\mathrm{R} \times \mathrm{R}) \quad weak *$$

$$\int f(0, v)dv = \int_u^{+\infty} F(n_1)dv + \int_{-\infty}^u F(n_2)dv$$

**Lemme**

) $-L_k - \eta_k$ tend vers $-\infty$ quand $k \to \infty$

$L_k - \eta_k$ tend vers $+\infty$ quand $k \to \infty$

i) Il existe deux suites $\mu_k$ et $\nu_k$ et deux valeurs $\underline{n}$ et $\overline{n}$ tels que

$$\lim_{\nu_k \to -\infty} f(\nu_k, \cdot) = F(\underline{n}, E), \quad v - p.p.$$

$$\lim_{\mu_k \to +\infty} f(\mu_k, \cdot) = F(\overline{n}, E), \quad v - p.p.$$

**Lemme**

Soit $\nu_k$ la suite telle que

$$\lim_{\nu_k \to +\infty} f(\nu_k, v) = F(n_2)(v), \qquad v - a.e.$$

Pour tout $0 < a < \infty$, pour tout $\tilde{\nu_k} \in ]\nu_k - a, \nu_k + a[$,

$$\lim_{\tilde{\nu_k} \to +\infty} f(\tilde{\nu_k}, v) = F(n_2)(v), \qquad v - p.p...$$

## convergence vers la solution entropique

**Théorème**

*Supposons que* $f_{ini}$ *satisfait*

$$0 \leq f_{ini}(x,v) \leq F(n_2) < 1, \quad \nabla_x f_{ini} \in L^1(\mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d). \tag{13}$$

*Alors le probleme a une unique solution* $f_\varepsilon$ *tele que* $0 \leq f_\varepsilon \leq F(n_2) < 1$ *. Cette solution satisfait*

$$f_\varepsilon \to f, \quad L^2(0,T,L^2(\mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d))$$

$$\rho_\varepsilon = \int f_\varepsilon dv \to \rho, \quad L^q(0,T,L^p_{x,loc}(\mathrm{R}^d))$$

$$f = F(\rho)$$

a)

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot j(\rho) = 0\,, \tag{14}$$

b)

$$\partial_t X(\rho) + \nabla_x \cdot G(\rho) \leq 0 \tag{15}$$

où

$$X(\rho) = \int_0^\rho \chi(n) dn$$

avec $\chi$ est une fonction de classe $C^1$ dependant de $n$ et strictement croissante.

$$G'(\rho) = \chi(\rho) j'(\rho)$$

c) La fonction $\rho$ est l'unique solution entropique .

négalité d entropie

$$-\int (Q(f) - E.\partial_v f)\chi(\varphi(f, v))dv \leq C(f) \int (f(v) - F(n_f)(v))^2 M(v) dv$$