

# Minimal Orbits, effective Hamiltonian and combustion models

Dietmar Kröner, Martin Nolte

Abteilung für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg

## Outline:

- Effective Hamiltonian
- Applications of the effective Hamiltonian:
  - Minimal orbits
  - Homogenization
  - Front propagation
- Computations of the effective Hamiltonian
  - $\lambda$ -regularization
    - \* Numerics
    - \* Double pendulum
  - Evans method
  - Representation formula

# Effective Hamiltonian

Assumptions for  $H$ :

- $H$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .
- $H$  has superlinear growth, i.e.

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(x, t, p)}{|p|} \rightarrow \infty \text{ uniformly in } x \text{ and } t. \quad (1)$$

- $H(x, t, \cdot)$  is strictly convex for all  $x$  and  $t$ .
- $|\nabla_x H(x, t, p)| \leq C_x(1 + |p|)$ .

**Theorem 1** <sup>1 2</sup> *For all  $c \in \mathbb{R}$  there exists a uniquely defined  $\bar{H}(c)$  such that there exists a viscosity solution  $u$  of*

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (2)$$

*and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .*

---

<sup>1</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal., 157, 1-33, 2001

<sup>2</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics II. Arch. Rational Mech. Anal., 161, 271-305, 2002

**Theorem 2**<sup>3 4</sup> *For all  $c \in \mathbb{R}$  there exists a uniquely defined  $\bar{H}(c)$  such that there exists a viscosity solution  $u$  of*

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (3)$$

*and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .*

**Remark 3** •  $\bar{H}(c)$  *is called the effective Hamiltonian*

- *Equation (3) can be considered as a nonlinear eigenvalue problem for  $u$  and  $\bar{H}(c)$ .*
- *$\bar{H}(c)$  encodes substantial information of  $H$ .*

---

<sup>3</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal., 157, 1-33, 2001

<sup>4</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics II. Arch. Rational Mech. Anal., 161, 271-305, 2002

## Outline:

- Effective Hamiltonian
- Applications of the effective Hamiltonian:
  - Minimal orbits
  - Homogenization
  - Front propagation
- Computation of the effective Hamiltonian
  - $\lambda$ -regularization
    - \* Numerics
    - \* Double pendulum
  - Evans method
  - Representation formula

## Applications of the effective Hamiltonian: Minimal orbits

**Problem:** For given  $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$  and  $L(s, y, p)$ , 1-periodic in  $s, y$  find absolutely continuous  $\gamma : ] - \infty, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  such that  $\gamma(t) = x$  and  $\gamma$  minimizes the functional

$$J(x, t, \gamma) := \int_{-\infty}^t L(\tau, \gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau.$$

**Example for L: Double pendulum:**

$$\begin{aligned} L(\phi, \phi') : &= (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2 \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\phi_1'^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\phi_2'^2 + m_2l_1l_2\phi_1'\phi_2'\cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

If  $\gamma$  is sufficiently smooth then  $\gamma$  satisfies the Euler–Lagrange equations:

$$\frac{d}{d\tau}L_v(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) - L_x(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) = 0. \quad (4)$$

## Characterization of the minimizer via Hamilton Jacobi equations:

### Definition of the Hamilton function:

$$H(t, x, p) := \sup\{p \cdot v - L(t, x, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

**Theorem 4** <sup>5</sup> *For all  $c \in \mathbb{R}$  there exists a uniquely defined  $\bar{H}(c)$  such that there exists a viscosity solution  $u$  of*

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \tag{5}$$

*and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .*

Define  $p(t, x) := c + \nabla u(t, x)$ .

---

<sup>5</sup>Evans, Gomes 2002



Define  $p(t, x) := c + \nabla u(t, x)$ .

**Lemma 5** *For given  $(t, x)$  let  $\gamma$  be the solution of*

$$\begin{aligned}\gamma'(\tau) &= \partial_p H(\tau, \gamma(\tau), p(\tau, \gamma(\tau))) \\ \gamma(t) &= x.\end{aligned}\tag{6}$$

*Then we have: If  $\gamma$  is sufficiently smooth then  $\gamma$  satisfies the Euler–Lagrange equations:*

$$\frac{d}{d\tau} L_v(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) - L_x(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) = 0\tag{7}$$

*and the Hamilton system:*

$$\begin{aligned}\gamma'(\tau) &= \partial_p H(\tau, \gamma(\tau), p(\tau)) \\ p'(\tau) &= -\partial_x H(\tau, \gamma(\tau), p(\tau))\end{aligned}\tag{8}$$

*with initial conditions  $\gamma(t) = x$  and  $p(t) = c + \nabla u(t, x)$ .*

**Remark**

- (8) has lower order than (7).
- (8) can be solved if (5) is solved.

- **Difficulties:** for solving:  $\partial_t u + H(t, x, P + \nabla u) = \bar{H}(P)$ 
  - In general the solution is not differentiable.
  - For fixed  $\bar{H}(P)$  several solution can exist.
  - There exist  $\bar{H}(P)$  such that no viscosity solution exists<sup>6</sup>.
  - The constant  $\bar{H}(P)$  makes the problem much harder than

$$\partial_t u + H(t, x, \nabla u) = 0$$

- Existence of a solution  $(\bar{H}(P), u)$ 
  - \* in 1D: Jauslin, Kreiss, Moser (1999, using conservation laws)
  - \* for the stationary case: Lions, Papanicolao et al.
  - \* nonstationary case: here
  - \* This result is the bases for the numerics.

---

<sup>6</sup>Gomes

**Remark 6 ( Relation to conservation laws in 1-D)**

$$\partial_t u + H(t, c + \partial_x u) = \bar{H}(c) \quad (9)$$

*Let  $v := \partial_x u$  (formally) and obtain*

$$\partial_t v + \partial_x H(t, c + v) = 0 \quad (10)$$

*or*

$$\partial_t v + \partial_x f(v) = 0 \quad (11)$$

*Note: For solving (8) we only need  $p = c + \partial_x u$ .*

## Summary of the first part:

$$J(x, \gamma) := \int_{-\infty}^t L(\tau, \gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau.$$

---

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (12)$$

$u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .

Define  $p(t, x) := c + \nabla u(t, x)$ .

---

For given  $(t, x)$  let  $\gamma$  be the solution of

$$\begin{aligned} \gamma'(\tau) &= \partial_p H(\tau, \gamma(\tau), p(\tau, \gamma(\tau))) \\ \gamma(t) &= x. \end{aligned} \quad (13)$$

---

Then we have: If  $\gamma$  is sufficiently smooth then  $\gamma$  satisfies the Euler–Lagrange equations:

$$\frac{d}{d\tau} L_v(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) - L_x(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) = 0 \quad (14)$$

---

# Applications of the effective Hamiltonian: Homogenization

$$\begin{aligned}\partial_t u &= a(x)|Du| \\ \partial_t u^\varepsilon &= a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|Du^\varepsilon|\end{aligned}$$

More general:

$$\partial_t w^\varepsilon = H\left(\frac{x}{\varepsilon}, w_x^\varepsilon\right)$$

Question:  $w^\varepsilon \rightarrow ???$

Answer:

$$\partial_t u(t, x) + H(x, c + \partial_x u(t, x)) = \bar{H}(c)$$

**Theorem 7** <sup>7</sup>  $w^\varepsilon \rightarrow w^0$  and  $w^0$  is a solution of

$$\partial_t w^0 + \bar{H}(w_x^0) = 0$$

A similar result is also available in nD <sup>8</sup>.

---

<sup>7</sup>Lions, Papanicolao, Varadhan 1988, Concodel 1995, Qian 2003

<sup>8</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics II. Arch. Rational Mech. Anal., 2002

# Applications of the effective Hamiltonian: Front propagation (Homogenization)

## Isothermal, non premixed turbulent combustion <sup>9</sup>

$u_f(x, t)$  = mass fraction of the unburnt gas (unknown)

$u_o(x, t)$  = mass fraction of the burnt gas, (unknown)

$v_\varepsilon(x, t)$  = (turbulent) velocity of the gas (given)

Ansatz for  $v_\varepsilon(x, t)$ :

$$v_\varepsilon(x, t) = \bar{v}_0(x, t) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Mathematical model for the one step reaction:

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

---

<sup>9</sup>Majda, Souganidis 1999

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

Transformation:  $u := u_f - u_0$ ,  $z := u_f$ :

$$\partial_t z - \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = z(u - z)$$

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

Fast reaction, slow diffusion:

$$\partial_t z - \varepsilon \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = \frac{1}{\varepsilon} z(u - z)$$

$$\partial_t u - \varepsilon \Delta u = 0$$

Fast reaction, slow diffusion:

$$\begin{aligned}\partial_t z - \varepsilon \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z &= \frac{1}{\varepsilon} z(u - z) \\ \partial_t u - \varepsilon \Delta u &= 0\end{aligned}$$

More general:

$$\begin{aligned}\partial_t T + V(x, t, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \nabla T - \varepsilon \kappa \Delta T + \frac{1}{\varepsilon} f(T) &= 0 \\ T(x, 0) &= T_0(x)\end{aligned}\tag{15}$$

with  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\kappa > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  and  $V(x, t, y, \tau)$  1-periodic in  $(y, \tau)$ .

**Example for V:**

$$V(x, t, y, \tau) = \bar{v}(x, t) + \lambda v(y, \tau)$$

V=large scale + intermediate scale.



$$\begin{aligned}\partial_t T + V(x, t, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \nabla T - \varepsilon \kappa \Delta T + \frac{1}{\varepsilon} f(T) &= 0 \\ T(x, 0) &= T_0(x)\end{aligned}\tag{16}$$

**Example for V:**

$$V(x, t, y, \tau) = \bar{v}(x, t) + \lambda v(y, \tau)$$

V=large scale + intermediate scale.

- The intermediate scale velocity field causes the flame front to wrinkle. Qualitatively the increase in flame area due to this wrinkling leads to an overall burning speed enhancement. The objective of the homogenization theory is to predict this enhancement speed of propagation of the flame.
- Flame speed in the laminar case (V=0):  $2 * \sqrt{\kappa f'(0)}$ .
- Influence of  $V(x, t, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})$  ?
- It turns out that the mean front in the asymptotic limit will satisfy a variational inequality that involves the eigenvalue, i.e. the effective Hamiltonian of a cell problem.

**Theorem 8 (Cell problem:)** <sup>10</sup> *For each  $p, x, t \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$  there exists a unique  $\bar{H}(p, x, t)$  and a  $w \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$  1-periodisch in  $(x, t)$ , such that*

$$\partial_\tau w - \kappa |p + \nabla_y w|^2 + V(x, t, y, \tau)(p + \nabla_y w) = \bar{H}(p, x, t)$$

Properties of  $\bar{H}$ :

- $\bar{H}$  is Lipschitz continuous on  $B_L \times \mathbb{R}^N \times [0, \infty[$  for all  $L > 0$ .
- $p \rightarrow \bar{H}(p, x, t)$  is convex for all  $(x, t)$ .
- $\frac{1}{p} \bar{H}(p, x, t) \rightarrow \infty$  for  $|p| \rightarrow \infty$  uniformly in  $(x, t)$ .
- $\kappa |p|^2 - |V|_\infty |p| \leq \bar{H}(p, x, t) \leq \kappa |p|^2 - |V|_\infty |p|$ .

---

<sup>10</sup>Majda, Souganidis 1994

**Theorem 9 (Variational inequality)** <sup>11</sup> For given  $\bar{H}(p, x, t)$  here exists a unique solution of:

$$\max\{\partial_t Z - \bar{H}(\nabla Z, x, t) + f'(0), Z\} = 0 \quad \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} Z(x, 0) &= 0 \text{ for } x \in \text{supp}T_0 \\ Z(x, 0) &= -\infty \text{ for } x \notin \text{supp}T_0. \end{aligned} \tag{17}$$

**Theorem 10** <sup>12</sup> Assumption as before, let  $T^\varepsilon$  be the solution of (15) and  $Z$  be the solution of (17). Then we have

$$\begin{aligned} T^\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \text{in} \quad \{Z < 0\} \\ T^\varepsilon &\rightarrow 1 \quad \text{in} \quad \{Z = 0\} \end{aligned}$$

locally uniformly.

---

<sup>11</sup> Souganidis 1994

<sup>12</sup> Souganidis 1994

$$\max\{\partial_t Z - \bar{H}(\nabla Z, x, t) + f'(0), Z\} = 0 \quad \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} T^\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \text{in} \quad \{Z < 0\} \\ T^\varepsilon &\rightarrow 1 \quad \text{in} \quad \{Z = 0\} \end{aligned}$$

---

**Definition (Front)**

$$\Gamma_t := \partial\{x \in \mathbb{R}^N | Z(x, t) < 0\}$$

**Velocity of the Front:** <sup>13</sup>

$$\inf_{r>0} \frac{f'(0) + \bar{H}(r, x, t)}{r}$$

---

<sup>13</sup>Majda, Souganidis: Large scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales. Nonlinearity 7 (1994), 1-30 Formula (2.5)

## Outline:

- Effective Hamiltonian
- Applications of the effective Hamiltonian:
  - Minimal orbits
  - Homogenization
  - Front propagation
- Computations of the effective Hamiltonian
  - $\lambda$ -regularization
    - \* Numerics
    - \* Double pendulum
  - Evans method
  - Representation formula

# Computation of the effective Hamiltonian

$\lambda$  -regularization

- We have to solve

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (18)$$

and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ . For all  $c \in \mathbb{R}$  there exists a uniquely defined  $\bar{H}(c)$  such that there exists a viscosity solution  $u$  of (18)<sup>14</sup>, <sup>15</sup>.

- Assumptions for  $H$ :
  - $H$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .
  - $H$  has superlinear growth, i.e.

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(x, t, p)}{|p|} \rightarrow \infty \text{ uniformly in } x \text{ and } t. \quad (19)$$

- $H(x, t, \cdot)$  is strictly convex for all  $x$  and  $t$ .
  - $|\nabla_x H(x, t, p)| \leq C_x(1 + |p|)$ .
- $\lambda$ -regularization: Solve for all  $\lambda > 0$ :

$$\partial_t u^\lambda + H(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t). \quad (20)$$

and obtain  $(u^\lambda)$ .

---

<sup>14</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Rational Mech. Anal., 157, 1-33, 2001

<sup>15</sup> Evans, Gomes: Effective Hamiltonian and averaging for Hamiltonian dynamics II. Arch. Rational Mech. Anal., 161, 271-305, 2002

$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (21)$$

$$\partial_t u^\lambda + H(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t). \quad (22)$$

- **Theorem 11** <sup>16</sup> *Let the solutions  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  of (22) be uniformly Lipschitz continuous. Then there is a constant  $\bar{H} \in \mathbb{R}$  and a subsequence  $\lambda_k \rightarrow 0$  such that  $u_{\lambda_k} - \langle u_{\lambda_k} \rangle \rightarrow u$  in  $C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  for a viscosity solution  $u$  1-periodic in  $x$  and  $t$  of (21) and  $\lambda_k u_{\lambda_k} \rightarrow \text{const}$  which is defined as  $\bar{H}$ .*

- Main ideas of the proof:

$$- \quad u^\lambda(x, t) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ e^{-\lambda\tau} u(\zeta(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda t'} L(\zeta(t'), \zeta'(t')) dt' \right\}.$$

such that  $\zeta'(\tau) = (1, v(\tau))$  and  $\zeta(t) = (t, x)$

– **Definition**

$$T_h u(x, t) := \min_{v \in \mathbb{R}^n} [(1 - \lambda h) u(x - vh, t - h) + h L(x, t, v)].$$

- Show that  $T_h$  is a contraction. Denote the fix point by  $u_h$ .
- Show:  $u_h$  is uniformly Lipschitz continuous.
- Show:  $u_h$  converge uniformly to a viscosity solution  $u$  of (22).



$$\partial_t u + H(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (23)$$

$$\partial_t u^\lambda + H(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t). \quad (24)$$

---

– Error estimate:  $\|\bar{H} + \lambda u_h\|_\infty \leq C(\lambda + h^{\frac{1}{2}})$ .

# Numerics

- For small  $|\lambda|$  solve the equation

$$\partial_t u^\lambda + H(t, x, c + \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

- $u^\lambda(x, t) = \inf_v \{e^{-\lambda\tau} u(\zeta(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda t'} L(\zeta(t'), v(t')) dt'\}.$

such that  $\zeta'(\tau) = (1, v(\tau))$  and  $\zeta(t) = (t, x)$

- Discretization

– Grid:  $x_i := \frac{i}{N}$ ,  $t_k := \frac{k}{N}$ ,  $C_i := [x_i, x_{i+1}]$  and  $C_i^k := C_i \times [t_k, t_{k+1}]$ .

–  $W_N := \{w \in C_{\text{per}}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \mid w|_{C_i^k} \text{ bilinear for all } i, k \in \mathbf{Z}\}.$

– For fixed  $\lambda > 0$  define <sup>17</sup> a discrete operator  $T_h^N : W_N \rightarrow W_N$  by

$$T_h^N w(x_i, t_k) := \min_{v \in \mathbb{R}^n} [(1 - \lambda h)w(x_i - vh, t_k - h) + hL(x_i, t_k, v)] \text{ for all } i, k \in \mathbf{Z}.$$

–  $T_h^N$  is a contraction.

$$T_h u(x, t) := \min_{v \in \mathbb{R}^n} [(1 - \lambda h)u(x - vh, t - h) + hL(x, t, v)].$$

$$T_h^N w(x_i, t_k) := \min_{v \in \mathbb{R}^n} [(1 - \lambda h)w(x_i - vh, t_k - h) + hL(x_i, t_k, v)] \text{ for all } i, k \in \mathbf{Z}.$$

- 
- Error estimate: <sup>18</sup> Let  $u_h$  and  $u_h^N$  be the fixpoints of  $T_h$  and  $T_h^N$  respectively. Then:  $\|u_h - u_h^N\|_\infty \leq \frac{C_u}{\lambda h N}$ .
  - Choosing  $h = N^{-\frac{1}{2}}$  we obtain  $\|\bar{H} + \lambda u_h^N\|_\infty \leq C(\lambda + N^{-\frac{1}{4}})$ .

• **Calculation of  $T_h^N w(x_i, t_k)$  for  $w \in W_N$**

- numerically, we calculate the minimum of

$$(1 - \lambda h)w(x_i - hv, t_k - h) + hL(x_i, t_k, v).$$

over  $\{v \in \mathbb{R} \mid x_i - hv \in C_j\}$ .

- Since  $w(\cdot, t_k - h)$  is linear on  $C_j$ , the unique value  $v_j \in \mathbb{R}$  such that

$$(1 - \lambda h)\partial_x w(x_{j+\frac{1}{2}}, t_k - h) = \partial_v L(x_i, t_k - h, v_j) \tag{25}$$

is a good candidate for our minimizer.

---

<sup>18</sup>Theorem A.1.3 in Bardi:OptimalControl

- numerically, we calculate the minimum of

$$(1 - \lambda h)w(x_i - hv, t_k - h) + hL(x_i, t_k, v).$$

over  $\{v \in \mathbb{R} \mid x_i - hv \in C_j\}$ .

- Since  $w(\cdot, t_k - h)$  is linear on  $C_j$ , the unique value  $v_j \in \mathbb{R}$  such that

$$() (1 - \lambda h) \partial_x w(x_{j+\frac{1}{2}}, t_k - h) = \partial_v L(x_i, t_k - h, v_j) \quad (26)$$

is a good candidate for our minimizer.

---

- If  $x_i - hv_j \notin C_j$ , the minimum lies on the boundary of  $C_j$ , as  $L$  is convex in  $v$ . In this case we have to evaluate (26) in two additional points  $v$ .

## Numerical tests

- $H(x, t, p) = \frac{p^2}{2} + \cos(2\pi x) + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi t)$ .
- The effective Hamiltonian:  $\bar{H}(P) = 1$  for  $P \leq \frac{4}{\pi} \approx 1.27$ .<sup>19</sup>
- For our tests, we use  $P = 1.25$  and  $h = \frac{1}{N}$ .
- Let  $w_{I+1} := T_h^N w_I$

---

<sup>19</sup>Gomes, Computing The Effective Hamiltonian

- The following tables denote the number of iterations  $I$  required to obtain  $\|u_h^N - w_I\| \leq 10^{-3}$ .

|           | $\lambda = 10^{-1}$ | $\lambda = 10^{-2}$ | $\lambda = 10^{-3}$ |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 25 Cells  | 2 509               | 30 845              | 366 006             |
| 50 Cells  | 5 018               | 61 689              | 732 012             |
| 100 Cells | 10 036              | 123 377             | 1 464 024           |
| 200 Cells | 20 071              | 246 753             | 2 928 047           |

Estimated number of iterations

|           | $\lambda = 10^{-1}$ | $\lambda = 10^{-2}$ | $\lambda = 10^{-3}$ |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 25 Cells  | 2 398               | 29 788              | 355 500             |
| 50 Cells  | 4 800               | 59 580              | 711 012             |
| 100 Cells | 9 603               | 119 171             | 1 422 157           |
| 200 Cells | 19 211              | 238 346             | —                   |

Actual number of iterations

The following table shows the error  $\|\bar{H}(P) + \lambda w_I\|_\infty$ . Notice that  $\|\lambda w_I - \lambda u_h^N\|_\infty \leq 10^{-3}\lambda$ .

|           | $\lambda = 10^{-1}$   | $\lambda = 10^{-2}$   | $\lambda = 10^{-3}$   | $\lambda = 10^{-4}$   | $\lambda = 10^{-5}$   |
|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 25 Cells  | $2.584 \cdot 10^{-2}$ | $2.570 \cdot 10^{-3}$ | $2.569 \cdot 10^{-4}$ | $2.575 \cdot 10^{-5}$ | $2.574 \cdot 10^{-6}$ |
| 50 Cells  | $2.471 \cdot 10^{-2}$ | $2.453 \cdot 10^{-3}$ | $2.451 \cdot 10^{-4}$ | $2.450 \cdot 10^{-5}$ | —                     |
| 100 Cells | $2.411 \cdot 10^{-2}$ | $2.391 \cdot 10^{-3}$ | $2.389 \cdot 10^{-4}$ | —                     | —                     |
| 200 Cells | $2.370 \cdot 10^{-2}$ | $2.359 \cdot 10^{-3}$ | —                     | —                     | —                     |

Error:  $\|\bar{H}(P) + \lambda w_I\|_\infty$

Despite our error estimate, the error tends to zero for fixed  $h > 0$  and  $\lambda \rightarrow 0$ .

## Double pendulum

$$\begin{aligned} L(\phi, \phi') : &= (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2 \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\phi_1'^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\phi_2'^2 + m_2l_1l_2\phi_1'\phi_2' \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

# Computation of the effective Hamiltonian

## Evans method

Find a minimizer in the class  $C^1$  of

$$I_k(v) := \int_{T^n} e^{kH(x, c + \nabla v)} dx \quad (27)$$

Corresponding Euler–Lagrange–equations:

$$\operatorname{div}(b(u^k) \partial_p H(x, \nabla u^k)) = 0$$

where

$$\begin{aligned} u^k : &= cx + v^k \\ b(u^k) : &= e^{k(H(x, \nabla u^k) - \bar{H}^k(c))} \\ \bar{H}^k(c) : &= \frac{1}{k} \log \int_{T^n} e^{kH(x, \nabla u^k)} dx \end{aligned}$$

is given.

Relation between  $\bar{H}(c)$  and  $\bar{H}^k(c)$  <sup>20</sup>:

$$\bar{H}(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{H}^k(c).$$

---

<sup>20</sup>Evans: Some new PDE methods for weak KAM theory, 2002



# Computation of the effective Hamiltonian

## Representation formula for $\bar{H}(c)$

**Theorem 12** <sup>21</sup> *Let  $H(t, x, p)$  be periodic in  $x$  and  $t$  and convex in  $p$ . Assume that there exists a viscosity solution of*

$$\partial_t u + H(x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \tag{28}$$

*and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .*

*Then*

$$\bar{H} = \inf_{\psi \in C_{per}^1} \sup_x H(x, c + \nabla_x \psi)$$

---

<sup>21</sup>Contreras, Iturriaga, Paternain, Paternain, 1998

End

### Erläuterung zu (P2):

Finde Minimierer in der Klasse  $C^1$  zu

$$I_k(v) := \int_{T^n} e^{kH(x, c + \nabla v)} dx \quad (29)$$

Zugehörige Euler–Lagrange–Gleichungen:

$$\operatorname{div}(b(u^k) \partial_p H(x, \nabla u^k)) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} u^k : &= cx + v^k \\ b(u^k) : &= e^{k(H(x, \nabla u^k) - \bar{H}^k(c))} \\ \bar{H}^k(c) : &= \frac{1}{k} \log \int_{T^n} e^{kH(x, \nabla u^k)} dx \end{aligned}$$

gegeben. Zusammenhang zwischen  $\alpha(c)$  und  $\bar{H}^k(c)$ :

$$\alpha(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{H}^k(c).$$

Doppelpendel:

$$\begin{aligned} L(\phi, \phi') : &= (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2 \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \phi_1'^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \phi_2'^2 + m_2 l_1 l_2 \phi_1' \phi_2' \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

TO DO

sigmas wegmachen

prove  $u_h \rightarrow u$ ,  $\lambda u_h \rightarrow \text{????}$

Gomes Methode

$t \rightarrow \infty$  yyyyyyyyyyyyyyyyyyy

**Effektive Hamilton Funktion**

$$\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

$$\partial_t u(t, x) + H_\sigma(t, x, c + \partial_x u(t, x)) = \alpha(c)$$

**Zusammenhang zur Homogenisierung**

$$\partial_t u = a(x)|Du|$$

$$\partial_t u^\varepsilon = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|Du^\varepsilon|$$

$$\text{Allgemeiner: } \partial_t w^\varepsilon = H\left(\frac{x}{\varepsilon}, w_x^\varepsilon\right)$$

Dann gilt  $w^\varepsilon \rightarrow w^0$  und  $w^0$  ist eine Lösung von

$$\partial_t w^0 + \alpha(w_x^0) = 0$$

## Lösungsweg Teil II:

- We have to solve

$$\partial_t u + H_\sigma(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (30)$$

and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$

**Theorem (Evans, Gomes 2002)** For all  $c \in \mathbb{R}$  there exists a uniquely defined  $\bar{H}(c)$  such that there exists a viscosity solution  $u$  of

$$\partial_t u + H_\sigma(t, x, c + \nabla u) = \bar{H}(c) \quad (31)$$

and  $u$  is 1-periodic in  $x$  and  $t$ .

- Löse für alle  $\lambda > 0$  die Gleichung

$$\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

und erhalte Folge  $(u^\lambda)$ .

- Zeige Kompaktheit der  $(u^\lambda)$  für  $\lambda \rightarrow 0$ .
  - im stationären Fall: Kompaktheit folgt aus Wachstumsbedingungen an  $H_\sigma$ .
  - im zeitabhängigen Fall: adhoc Ansatz liefert Abschätzung mit  $\frac{1}{\lambda}$

– Methoden aus der Kontrolltheorie liefern:

$$\begin{aligned} |u_\sigma^\lambda(t, x)| &\leq \frac{M_\sigma}{\lambda}, & |u_\sigma^\lambda(t, x) - u^\lambda(s, x)| &\leq M_\sigma |t - s| \\ |\nabla u_\sigma^\lambda(t, x)| &\leq \frac{3M_\sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

**THEOREM** Zu jedem  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt ein  $\alpha(c) \in \mathbb{R}$ , eine 1-periodische Funktion  $u_0$  und eine Nullfolge  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass für  $\tilde{u}^\lambda = u^\lambda - \min_{x,t} u^\lambda$  gilt:

$$\tilde{u}^{\lambda_i} \longrightarrow u_0, \quad -\lambda_i u^{\lambda_i} \longrightarrow \alpha(c) \quad \text{gleichmäßig für } i \longrightarrow \infty$$

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

**THEOREM** Zu jedem  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt ein  $\alpha(c) \in \mathbb{R}$ , eine 1-periodische Funktion  $u_0$  und eine Nullfolge  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass für  $\tilde{u}^\lambda = u^\lambda - \min_{x,t} u^\lambda$  gilt:

$$\tilde{u}^{\lambda_i} \longrightarrow u_0, \quad -\lambda_i u^{\lambda_i} \longrightarrow \alpha(c) \quad \text{gleichmäßig für } i \longrightarrow \infty$$

und  $u_0$  ist eine Viskositätslösung von  $\partial_t u(x, t) + H_\sigma(t, x, c + \nabla u(x, t)) = \alpha(c)$ .

## Numerik

- Löse für kleine  $|\lambda|$  die Gleichung  $\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, c + \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t)$ .
- $u_\sigma^\lambda(x, t) = \inf_{v \in K_\sigma} \{e^{-\lambda\tau} u(\zeta(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda t'} L(\zeta(t'), v(t')) dt'\}.$
- Diskretisierung
- Fixpunktiteration
- Beispiel Doppelpendel:



## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

- Beispiel Doppelpendel:

$$\begin{aligned} L(\phi, \phi') : &= (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2 \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\phi_1'^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\phi_2'^2 + m_2l_1l_2\phi_1'\phi_2' \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

## Effektive Hamilton Funktion

$$\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

$$\partial_t u(t, x) + H_\sigma(t, x, c + \partial_x u(t, x)) = \alpha(c)$$

## Zusammenhang zur Homogenisierung

$$\partial_t u = a(x)|Du|$$

$$\partial_t u^\varepsilon = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|Du^\varepsilon|$$

$$\text{Allgemeiner:} \quad \partial_t w^\varepsilon = H\left(\frac{x}{\varepsilon}, w_x^\varepsilon\right)$$

Dann gilt  $w^\varepsilon \rightarrow w^0$  und  $w^0$  ist eine Lösung von

$$\partial_t w^0 + \alpha(w_x^0) = 0$$

### **Ziele für die beantragte Projektphase:**

- (P1) Erweiterung der Numerik für Lagrange-Funktionen, die explizit von der Zeit abhängen.
- (P2) Entwicklung eines neuen numerischen Verfahrens zur Berechnung der effektiven Hamilton-Funktion nach einer neuen Idee von Evans (2002).
- (P3) Integration der Programmentwicklung aus (P2) in die Programmierungsumgebung DUNE.
- (P4) Berechnung der effektiven Hamilton-Funktion gemäß Gomes 2002.
- (P5) Vergleich der Verfahren aus (P2) und (P4) mit dem in der ersten Antragsperiode entwickelten Verfahrens.
- (P6) Berechnung eines Beispiels für die Homogenisierung der Hamilton Jacobi-Gleichung.

### **Erläuterung zu (P2):**

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

### Erläuterung zu (P2):

Finde Minimierer in der Klasse  $C^1$  zu

$$I_k(v) := \int_{T^n} e^{kH(x, c + \nabla v)} dx \quad (32)$$

Zugehörige Euler–Lagrange–Gleichungen:

$$\operatorname{div}(b(u^k) \partial_p H(x, \nabla u^k)) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} u^k : &= cx + v^k \\ b(u^k) : &= e^{k(H(x, \nabla u^k) - \bar{H}^k(c))} \\ \bar{H}^k(c) : &= \frac{1}{k} \log \int_{T^n} e^{kH(x, \nabla u^k)} dx \end{aligned}$$

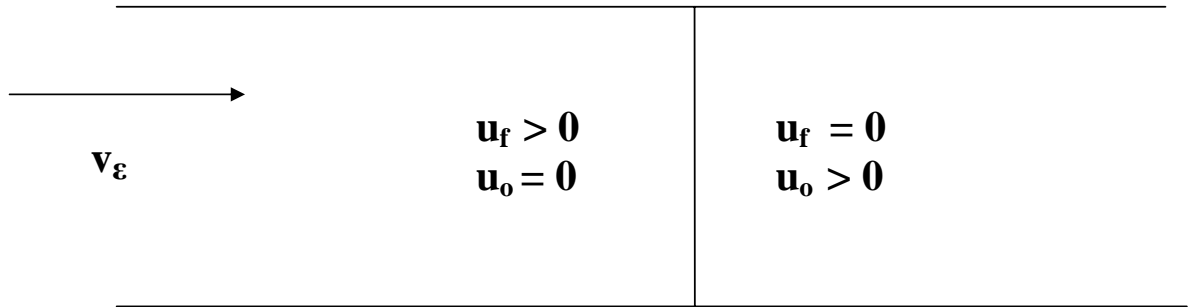
gegeben. Zusammenhang zwischen  $\alpha(c)$  und  $\bar{H}^k(c)$ :

$$\alpha(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{H}^k(c).$$

### Erläuterung zu (P6):

## Beispiel: Isothermale, nicht vorgemischte, turbulente Verbrennung

$t=0$



$u_f(x,t)$  = Massenbruch des unverbrannten Gases (gesucht)

$u_o(x,t)$  = Massenbruch des verbrannten Gases (gesucht)

$v_\epsilon(x,t)$  = (turbulente) Geschwindigkeit des Gases (gegeben)

## Beispiel: Isothermale, nicht vorgemischte, turbulente Verbrennung Majda, Souganidis 1999

$u_f(x, t)$  = Massenbruch des unverbrannten Gases (gesucht)

$u_o(x, t)$  = Massenbruch des verbrannten Gases (gesucht)

$v_\varepsilon(x, t)$  = (turbulente) Geschwindigkeit des Gases (gegeben)

Ansatz für  $v_\varepsilon(x, t)$ :

$$v_\varepsilon(x, t) = \bar{v}_0(x, t) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Mathematisches Modell für Einschnitt-Chemie:

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

Transformation:  $u := u_f - u_0$ ,  $z := u_f$ :

$$\partial_t z - \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = z(u - z)$$

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

Schnelle Reaktion, langsame Diffusion:

$$\partial_t z - \varepsilon \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = \frac{1}{\varepsilon} z(u - z)$$

$$\partial_t u - \varepsilon \Delta u = 0$$

More general:

$$\partial_t T + V(x, t, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \nabla T - \varepsilon \kappa \Delta T + \frac{1}{\varepsilon} f(t) = 0 \quad (33)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad (34)$$

$$(35)$$

with  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\kappa > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  and  $V(x, t, y, \tau)$  1-periodic in  $(y, \tau)$ .

**Example for V:**

$$V(x, t, y, \tau) = \bar{v}(x, t) + \lambda v(y, \tau)$$

V=large scale + intermediate scale.

- The intermediate scale velocity field causes the flame front to wrinkle. Qualitatively the increase in flame area due to this wrinkling leads to an overall burning speed enhancement. The objective of the homogenization theory is to predict this enhancement speed of propagation of the flame.
- Flame speed in the laminar case (V=0):  $2 * \sqrt{\kappa f'(0)}$ .
- Influence of  $V(x, t, \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})$  ?



- It turns out that the mean front in the asymptotic limit will satisfy a variational inequality that involves the eigenvalue, i.e. the effective Hamiltonian of a cell problem.

**Theorem (Cell problem, Majda, Souganidis 1994)** For each  $p, x, t \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$  there exists a unique  $\bar{H}(p, x, t)$  and a  $w \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$  1-periodisch in  $(x, t)$ , such that

$$\partial_\tau w - \kappa|p + Dw|^2 + V(x, t, y, \tau)(p + Dw) = \bar{H}(p, x, t)$$

Properties of  $\bar{H}$ :

- $\bar{H}$  is Lipschitz continuous on  $K_L \times \mathbb{R}^N \times [0, \infty[$  for all  $L > 0$ .
- $p \rightarrow \bar{H}(p, x, t)$  is convex for all  $(x, t)$ .
- $\frac{1}{p}\bar{H}(p, x, t) \rightarrow \infty$  for  $|p| \rightarrow \infty$  uniformly in  $(x, t)$ .
- $\kappa|p|^2 - |V|_\infty|p| \leq \bar{H}(p, x, t) \leq \kappa|p|^2 - |V|_\infty|p|$ .

**Theorem (Variational inequality, Souganidis 1994)** For given  $\bar{H}(p, x, t)$  there exists a unique solution of:

$$\max\{\partial_t Z - \bar{H}(DZ, x, t) + f'(0), Z\} = 0 \quad \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} Z(x, 0) &= 0 \text{ for } x \in \text{supp} T_0 \\ Z(x, 0) &= -\infty \text{ for } x \notin \text{supp} T_0. \end{aligned} \tag{36}$$

**Theorem (Majda, Souganidis 1994)** Assumption as before, let  $T^\varepsilon$  be the solution of (37) and  $Z$  be the solution of (36) Then we have

$$\begin{aligned} T^\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \text{in} \quad \{Z < 0\} \\ T^\varepsilon &\rightarrow 1 \quad \text{in} \quad \{Z = 0\} \end{aligned}$$

locally uniformly.

**Definition (Front)**

$$\Gamma_t := \partial\{x \in \mathbb{R}^N | Z(x,t) < 0\}$$

# Velocity of the Front: <sup>22</sup>

$$\inf_{r>0} \frac{f'(0) + H(r)}{r}$$

XX

---

<sup>22</sup>Majda, Souganidis: Large scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales. Nonlinearity 7 (1994), 1-30 Formula (2.5)

**Schwache KAM Theorie:** Welche Mengen  $G$  sind unter dem durch (8) gegebenen Fluss rückwärts invariant?

$$G_u := \{(x, c + \partial_x u(x)) \mid u \text{ ist differenzierbar in } x\}$$

besitzt diese Eigenschaft.

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

**Lösungsweg Teil I:** Finde zu gegebenem  $c$  ein  $\alpha(c)$  und ein  $u$ , so dass

$$\begin{aligned}\partial_t u + H_\sigma(t, x, c + \nabla u) &= \alpha(c) \\ p(t, x) &:= c + \nabla u(t, x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma'(\tau) &= \partial_p H_\sigma(\tau, \gamma(\tau), p(\tau)) \\ p'(\tau) &= -\partial_x H_\sigma(\tau, \gamma(\tau), p(\tau))\end{aligned}$$

mit Anfangswerten  $\gamma(t) = x$  und  $p(t) = c + \nabla u(t, x)$ .

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

**Difficulties:** for solving:  $\partial_t u + H_\sigma(t, x, c + \nabla u) = \alpha(c)$

- In general the solution is not differentiable.
- For fixed  $\bar{H}(P)$  several solution can exist.
- There exists  $\bar{H}(P)$  such that no viscosity solution exists. (Gomes).
- The constant  $\bar{H}(P)$  makes the problem much harder than

$$\partial_t u + H(t, x, \nabla u) = 0$$

- Existence of a solution  $(\bar{H}(P), u)$ 
  - in 1D: Jauslin, Kreiss, Moser (1999, using conservation laws)
  - for the stationary case: Lions, Papanicolao et al.
  - nonstationary case: here
  - This result is the bases for he numerics.

## Lösungsweg Teil II:

- Löse für alle  $\lambda > 0$  die Gleichung

$$\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

und erhalte Folge  $(u^\lambda)$ .

- Zeige Kompaktheit der  $(u^\lambda)$  für  $\lambda \rightarrow 0$ .
  - im stationären Fall: Kompaktheit folgt aus Wachstumsbedingungen an  $H_\sigma$ .
  - im zeitabhängigen Fall: adhoc Ansatz liefert Abschätzung mit  $\frac{1}{\lambda}$
  - Methoden aus der Kontrolltheorie liefern:

$$\begin{aligned} |u_\sigma^\lambda(t, x)| &\leq \frac{M_\sigma}{\lambda}, & |u_\sigma^\lambda(t, x) - u^\lambda(s, x)| &\leq M_\sigma |t - s| \\ |\nabla u_\sigma^\lambda(t, x)| &\leq \frac{3M_\sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

**THEOREM** Zu jedem  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt ein  $\alpha(c) \in \mathbb{R}$ , eine 1-periodische Funktion  $u_0$  und eine Nullfolge  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass für  $\tilde{u}^\lambda = u^\lambda - \min_{x,t} u^\lambda$  gilt:

$$\tilde{u}^{\lambda_i} \longrightarrow u_0, \quad -\lambda_i u^{\lambda_i} \longrightarrow \alpha(c) \quad \text{gleichmäßig für } i \longrightarrow \infty$$

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

**THEOREM** Zu jedem  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt ein  $\alpha(c) \in \mathbb{R}$ , eine 1-periodische Funktion  $u_0$  und eine Nullfolge  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass für  $\tilde{u}^\lambda = u^\lambda - \min_{x,t} u^\lambda$  gilt:

$$\tilde{u}^{\lambda_i} \longrightarrow u_0, \quad -\lambda_i u^{\lambda_i} \longrightarrow \alpha(c) \quad \text{gleichmäßig für } i \longrightarrow \infty$$

und  $u_0$  ist eine Viskositätslösung von  $\partial_t u(x, t) + H_\sigma(t, x, c + \nabla u(x, t)) = \alpha(c)$ .

## Numerik

- Löse für kleine  $|\lambda|$  die Gleichung  $\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, c + \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t)$ .
- $u_\sigma^\lambda(x, t) = \inf_{v \in K_\sigma} \{e^{-\lambda\tau} u(\zeta(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda t'} L(\zeta(t'), v(t')) dt'\}$ .
- Diskretisierung
- Fixpunktiteration
- Beispiel Doppelpendel:



## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

- Beispiel Doppelpendel:

$$\begin{aligned} L(\phi, \phi') : &= (m_1 + m_2)gl_1 \cos \phi_1 + m_2gl_2 \cos \phi_2 \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\phi_1'^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\phi_2'^2 + m_2l_1l_2\phi_1'\phi_2' \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

## Effektive Hamilton Funktion

$$\partial_t u^\lambda + H_\sigma(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t).$$

$$\partial_t u(t, x) + H_\sigma(t, x, c + \partial_x u(t, x)) = \alpha(c)$$

## Zusammenhang zur Homogenisierung

$$\partial_t u = a(x)|Du|$$

$$\partial_t u^\varepsilon = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|Du^\varepsilon|$$

$$\text{Allgemeiner:} \quad \partial_t w^\varepsilon = H\left(\frac{x}{\varepsilon}, w_x^\varepsilon\right)$$

Dann gilt  $w^\varepsilon \rightarrow w^0$  und  $w^0$  ist eine Lösung von

$$\partial_t w^0 + \alpha(w_x^0) = 0$$

**Ziele für die beantragte Projektphase:**

- (P1) Erweiterung der Numerik für Lagrange-Funktionen, die explizit von der Zeit abhängen.
- (P2) Entwicklung eines neuen numerischen Verfahrens zur Berechnung der effektiven Hamilton-Funktion nach einer neuen Idee von Evans (2002).
- (P3) Integration der Programmentwicklung aus (P2) in die Programmierungsumgebung DUNE.
- (P4) Berechnung der effektiven Hamilton-Funktion gemäß Gomes 2002.
- (P5) Vergleich der Verfahren aus (P2) und (P4) mit dem in der ersten Antragsperiode entwickelten Verfahrens.
- (P6) Berechnung eines Beispiels für die Homogenisierung der Hamilton Jacobi-Gleichung.

**Erläuterung zu (P2):**

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

### Erläuterung zu (P2):

Finde Minimierer in der Klasse  $C^1$  zu

$$I_k(v) := \int_{T^n} e^{kH(x, c + \nabla v)} dx \quad (37)$$

Zugehörige Euler–Lagrange–Gleichungen:

$$\operatorname{div}(b(u^k) \partial_p H(x, \nabla u^k)) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} u^k : &= cx + v^k \\ b(u^k) : &= e^{k(H(x, \nabla u^k) - \bar{H}^k(c))} \\ \bar{H}^k(c) : &= \frac{1}{k} \log \int_{T^n} e^{kH(x, \nabla u^k)} dx \end{aligned}$$

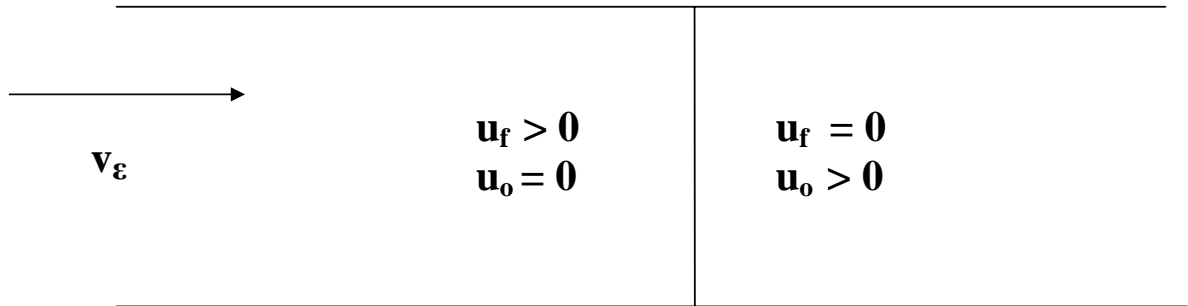
gegeben. Zusammenhang zwischen  $\alpha(c)$  und  $\bar{H}^k(c)$ :

$$\alpha(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{H}^k(c).$$

### Erläuterung zu (P6):

## **Beispiel: Isothermale, nicht vorgemischte, turbulente Verbrennung**

**$t=0$**



**$u_f(x,t)$  = Massenbruch des unverbrannten Gases (gesucht)**

**$u_o(x,t)$  = Massenbruch des verbrannten Gases (gesucht)**

**$v_\epsilon(x,t)$  = (turbulente) Geschwindigkeit des Gases (gegeben)**

## Beispiel: Isothermale, nicht vorgemischte, turbulente Verbrennung Majda, Souganidis 1999

$u_f(x, t)$  = Massenbruch des unverbrannten Gases (gesucht)

$u_o(x, t)$  = Massenbruch des verbrannten Gases (gesucht)

$v_\varepsilon(x, t)$  = (turbulente) Geschwindigkeit des Gases (gegeben)

Ansatz für  $v_\varepsilon(x, t)$ :

$$v_\varepsilon(x, t) = \bar{v}_0(x, t) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Mathematisches Modell für Einschnitt-Chemie:

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_f - \Delta u_f + v_\varepsilon \partial_x u_f = -u_f u_0$$

$$\partial_t u_0 - \Delta u_0 + v_\varepsilon \partial_x u_0 = -u_f u_0$$

Transformation:  $u := u_f - u_0$ ,  $z := u_f$ :

$$\partial_t z - \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = z(u - z)$$

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

Schnelle Reaktion, langsame Diffusion:

$$\partial_t z - \varepsilon \Delta z + v_\varepsilon \partial_x z = \frac{1}{\varepsilon} z(u - z)$$

$$\partial_t u - \varepsilon \Delta u = 0$$

Transformation:  $z = \exp \frac{w}{\varepsilon}$

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon - (\partial_x w_\varepsilon)^2 = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon)$$

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon - (\partial_x w_\varepsilon)^2 = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon)$$

oder mit  $H(x, t, y, \tau, p) := (\bar{v}(x, t) + v_1(y, \tau))p - p^2$ :

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + H(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}, \partial_x w_\varepsilon) = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon).$$



## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon - (\partial_x w_\varepsilon)^2 = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon)$$

oder mit  $H(x, t, y, \tau, p) := (\bar{v}(x, t) + v_1(y, \tau))p - p^2$ :

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + H(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}, \partial_x w_\varepsilon) = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon).$$

Frage:  $w_\varepsilon \rightarrow ?$  if  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + v_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon - (\partial_x w_\varepsilon)^2 = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon)$$

oder mit  $H(x, t, y, \tau, p) := (\bar{v}(x, t) + v_1(y, \tau))p - p^2$ :

$$\partial_t w_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon + H(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}, \partial_x w_\varepsilon) = q(y_\varepsilon, w_\varepsilon).$$

Frage:  $w_\varepsilon \rightarrow ?$  if  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

THEOREM (Majda, Souganidis) Man erhält:

$$w_\varepsilon \rightarrow w^0$$

und  $w^0$  ist Viskositätslösung von

$$\max\{\partial_t w^0 + \bar{H}(x, t, \partial_x w^0) - \bar{q}(y^0, w^0), w^0\} = 0$$

wobei  $\bar{H}$  definiert ist durch: Für alle  $c, x, t$  gibt es eine Lösung  $w_1$  von

$$\partial_\tau w_1 + H(x, t, y, \tau, c + \partial_y w_1) = \bar{H}(c, x, t)$$

## B.2 Minimale Orbits und Hamilton-Jacobi Gleichungen

## Ergänzungen

Voraussetzungen an  $L$ : Im Rahmen unseres Projektes betrachten wir Lagrange Funktionen  $L(t, x, u)$  mit den folgenden Eigenschaften.

- $L$  ist in  $C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  und  $L$  ist 1-periodisch in  $t, x$ .  $L$  ist strikt konvex in  $v$  und superlinear in  $v$ . Es existiert ein  $\sigma > 0$  so dass  $M := \mathbb{R}^{n+1} \times B_\sigma(0) \subset \mathbb{R}^{1+2n}$  unter dem Euler-Fluss zu  $L$  invariant ist.  $L$  ist Lipschitz stetig und beschränkt bzgl.  $x \in \mathbb{R}^n$  gleichmäßig bzgl.  $v$  auf kompakten Teilmengen.

Als ein wichtiges Hilfsmittel stellt sich heraus, dass sich die Viskositätslösung von (37) auch als Minimum eines Funktionals darstellen läßt. Sei

$$J(x, t, v) := \int_0^t L(\zeta(\tau), v(\tau)) e^{-\lambda\tau} d\tau \quad (38)$$

mit  $v \in K_\sigma := \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v \text{ beschränkte Borel-Funktion mit } |v(\tau)| \leq s\}$  und  $\zeta(\tau) = \zeta_{z,v}(\tau)$  ist Lösung von

$$\zeta'_{zv}(\tau) = (1, v(\tau)) \quad (39)$$

$$\zeta_{zv}(0) = z. \quad (40)$$

Setze  $u^\lambda(x, t) := u^\lambda_\sigma(x, t) := \inf_{v \in K_\sigma} J(x, t, v)$ . und erhalte:  $u^\lambda_\sigma(x, t)$  ist 1-periodisch in  $x$  und  $t$ , Viskositätslösung von (37) und  $u^\lambda_\sigma(x, t)$  erfüllt für alle  $z = (t, x)$  und für alle  $\tau > 0$ :

$$u^\lambda_\sigma(x, t) = \inf_{v \in K_\sigma} \{e^{-\lambda\tau} u(\zeta(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda t'} L(\zeta(t'), v(t')) dt'\}. \quad (41)$$

Der wesentliche Baustein der Methode besteht nun darin, den Grenzübergang bzgl.  $\lambda \rightarrow 0$  in (37) zu kontrollieren. Relativ einfach erhält man die Aussage, dass  $u^\lambda_\sigma(x, t)$  Lipschitzstetig ist auf  $K \times [0, T]$  für alle kompakten Teilmengen  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Dies reicht aber leider nicht aus, die Kompaktheit zu garantieren, da die Aussage sich auf feste  $\lambda, \sigma$  bezieht. Eine genauere Analyse liefert aber

die Lipschitzstetigkeit und damit die Kompaktheit der Lösungen  $u_\lambda$  von (37) gleichmässig bzgl.  $\lambda$  in  $t, x$  für festes  $\sigma$ . Man kann zeigen, dass es ein  $M_\sigma$  gibt, so dass für alle  $\lambda > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

$$|u_\sigma^\lambda(t, x)| \leq \frac{M_\sigma}{\lambda}, \quad |u_\sigma^\lambda(t, x) - u^\lambda(s, x)| \leq M_\sigma |t - s| \quad (42)$$

$$||\nabla u_\sigma^\lambda(t, x)|| \leq \frac{3M_\sigma}{\sigma}. \quad (43)$$

Auf der Basis dieser Abschätzungen können wir jetzt den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  der Lösung  $u_\sigma^\lambda$  von (37) für festes  $\sigma$  kontrollieren. Wir zeigen, dass ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , eine 1-periodische Funktion  $u_0$  und eine Nullfolge  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  existieren, so dass für  $\tilde{u}^\lambda = u^\lambda - \min_{x,t} u^\lambda$  gilt:

$$\tilde{u}^{\lambda_i} \longrightarrow u_0, \quad -\lambda_i u^{\lambda_i} \longrightarrow \alpha \quad \text{gleichmäßig für } i \longrightarrow \infty \quad (44)$$

und  $u_0$  ist eine Viskositätslösung von  $\partial_t u(x, t) + H_\sigma(t, x, \nabla u(x, t)) = \alpha$ . Für jedes  $i$  sei  $v_i$  der Minimierer des infinite-horizon Kostenfunktional, d.h. für  $z = (x, t)$

$$u^{\lambda_i}(z) = J^{\lambda_i}(z, v_i) = \inf_{v \in K_\sigma} J^{\lambda_i}(z, v). \quad (45)$$

Aus der Beschränktheit der Kontrollen  $v_i$  folgt dann auch die Konvergenz der  $\zeta_i$  und  $v_i$ : Es existiert ein  $v_\infty$  in  $K_\sigma$  und eine Teilfolge  $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so dass für alle

$t' > 0$  gilt:

$$\begin{array}{lll} \zeta_{zv_{i_k}} & \longrightarrow \zeta_{zv_\infty} & \text{in } C^0([-t', 0], \mathbb{R}^n) \\ v_{i_k} & \longrightarrow v_\infty & \text{in } L^\infty([-t', 0], \mathbb{R}^n) \quad \text{schwach *} \end{array}$$

Sei  $\zeta_\infty(\cdot) := \zeta_{zv_\infty}(\cdot + t)$  dann ist  $\zeta_\infty|_{(-\infty, t]}$  minimal.

Dies alles gilt für festes  $\sigma$ . Unter der Voraussetzung, dass

$$\partial_t u^\lambda + H(t, x, \nabla u^\lambda(x, t)) = -\lambda u^\lambda(x, t). \quad (46)$$

eine Lösung besitzt kann man zeigen (Beachte: Dies ist die Gleichung (37) mit  $H$  anstelle von  $H_\sigma$ ), dass  $u_\sigma^\lambda$  für große  $\sigma$  unabhängig von  $\sigma$  ist.

Wellenfunktion eines Teilchens in einem Potential  $V$ :

$$i\nu\partial_t\psi - \frac{\nu^2}{2}\psi'' - V(x)\psi = 0$$

$\psi_k$ : Fourierkoeffizienten von  $\psi$  und  $w$  definiert durch  $\psi_k(x) = \exp(-w(x)/\nu)$   
dann:

$$\frac{\nu}{2}w'' - \frac{1}{2}w'^2 - V(x) = E \quad (47)$$

Lagrange-Funktion:  $L(x, v) := \frac{1}{2}v^2 - V(x)$

Hamilton-Funktion  $H(x, p) := \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ .

Dann erfüllt  $w$ :

$$\partial_t w - \frac{\nu^2}{2}w_{xx} + H(x, w_x) + E = 0. \quad (48)$$

In [?] ist nun für  $n = 1$  gezeigt worden, dass es eine Konstante  $E_\nu$  und ein  $\xi \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für die Lösung  $w_\nu(x, t)$  von (48) mit  $E_\nu$  anstelle von  $E$  gilt:

$$w_\nu(x, t) \rightarrow h_0^\infty(x, t, \xi) =: w(x, t)$$



für  $\nu \rightarrow 0$  mit

$$h_c^\infty(x, t, \xi) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \min \left\{ \int_t^n [L(q(s), q'(s)) - cq'(s) + \alpha(c)] ds \mid q \in AC(t, n, x, \xi) \right\}$$

und  $AC(t, n, x, \xi) := \{q : [t, n] \rightarrow S^1 \mid q \text{ ist absolut stetig, } q(t) = x, q(n) = \xi\}.$

und  $w$  ist eine Lösung der Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$\partial_t w + H(x, w_x) + E = 0. \quad (49)$$

Das heißt, dass das globale Minimum des Wirkungsintegrals (49) auch Viskositätslösung ösung der Hamilton–Jacobi–Gleichung (49) und damit i.allg. nur Lipschitz stetig ist. Ausserdem folgt aus [?] für  $n = 1$ , dass  $\xi$  das Minimum von  $V$  mit der kleinsten zweiten Ableitung ist und

$$w(x) = \frac{(x - \xi)^2}{2} \sqrt{V''(\xi)} + \text{higher order terms}. \quad (50)$$