

# Caractérisation des sous-dynamiques et applications

(École CIMPA Bobo-Dioulasso)

M. Sablik

LATP, Université Aix-Marseille

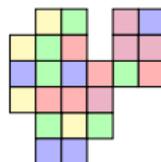
Novembre 2012

# Rappel de l'épisode précédent

# Sous-shifts défini par des motifs interdits



$\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$  fini



motif  $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$

Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de motifs, on définit le sous-shift de motifs interdits  $\mathcal{F}$ :

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : \text{Aucun motif de } \mathcal{F} \text{ n'apparaît dans } x\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$$

## Quelques classes de sous-shifts:

$$\mathbf{T} \text{ fullshift } (\mathcal{FS}) \iff \mathcal{F} = \emptyset \text{ et } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d},$$

$$\mathbf{T} \text{ sous-shift de type fini } (\mathcal{SFT}) \iff \text{il existe un ensemble fini de motifs } \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$$

# Opérations dynamiques sur les sous-shift

# Finite Type operation: **FT**

## Définition

Soit  $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift et  $\mathcal{F}$  une famille de motif, on définit:

$$\mathbf{FT}_{\mathcal{F}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \setminus \left( \bigcup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^d, u \in \mathcal{F}} \sigma^i([u]) \right).$$

# Finite Type operation: **FT**

## Définition

Soit  $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift et  $\mathcal{F}$  une famille de motif, on définit:

$$\mathbf{FT}_{\mathcal{F}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \setminus \left( \bigcup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^d, u \in \mathcal{F}} \sigma^i([u]) \right).$$

Remarque : Par définition, on a:

$$\mathcal{C}l_{\mathbf{FT}}(\mathcal{FS}) = S\mathcal{FT}$$

# Opération de facteur: **Fact**

## Definition

Soit  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift et  $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  un morphisme (continue et  $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ ),  $\mathbf{Fact}_\pi(\mathbf{T}) = \pi(\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  est un facteur de  $\mathbf{T}$ .

# Opération de facteur: **Fact**

## Definition

Soit  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift et  $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  un morphisme (continue et  $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ ),  $\mathbf{Fact}_\pi(\mathbf{T}) = \pi(\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  est un facteur de  $\mathbf{T}$ .

## Exemple :

On considère:

►  $\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$

►  $\Sigma = \mathbf{T}_{\mathcal{A}, \{\blacksquare\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \blacksquare\blacksquare\}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

►  $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  morphisme tel que  $\pi : \begin{cases} \square \rightarrow \square \\ \blacksquare \rightarrow \blacksquare \\ \blacksquare \rightarrow \blacksquare \end{cases}$

$\dots \square \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \dots \in \Sigma$

$\downarrow \pi$

$\dots \square \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \dots \in \pi(\Sigma)$

$\pi(\Sigma) = \{x \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}} / \text{les blocs de } \blacksquare \text{ ont une longueur paire}\}$

Ainsi  $SFT \not\subset Cl_{Fact}(SFT)$

# Opération de facteur: **Fact**

## Definition

Soit  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift et  $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  un morphisme (continue et  $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ ),  $\mathbf{Fact}_\pi(\mathbf{T}) = \pi(\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$  est un facteur de  $\mathbf{T}$ .

## Exemple :

On considère:

$$\bullet \mathcal{A} = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$$

$$\bullet \Sigma = \mathbf{T}_{\mathcal{A}, \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

$$\bullet \pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}} \text{ morphisme tel que } \pi : \begin{cases} \square \rightarrow \square \\ \blacksquare \rightarrow \blacksquare \\ \blacksquare \rightarrow \blacksquare \end{cases}$$

$$\dots \square \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \blacksquare \dots \in \Sigma$$

$$\downarrow \pi$$

$$\dots \square \blacksquare \blacksquare \square \square \square \blacksquare \square \square \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \blacksquare \dots \in \pi(\Sigma)$$

$$\pi(\Sigma) = \{x \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}} / \text{les blocs de } \blacksquare \text{ ont une longueur paire}\}$$

Ainsi  $SFT \not\subset Cl_{Fact}(SFT)$

$Cl_F(SFT)$  est la classe des *sous-shifts soifiques*.

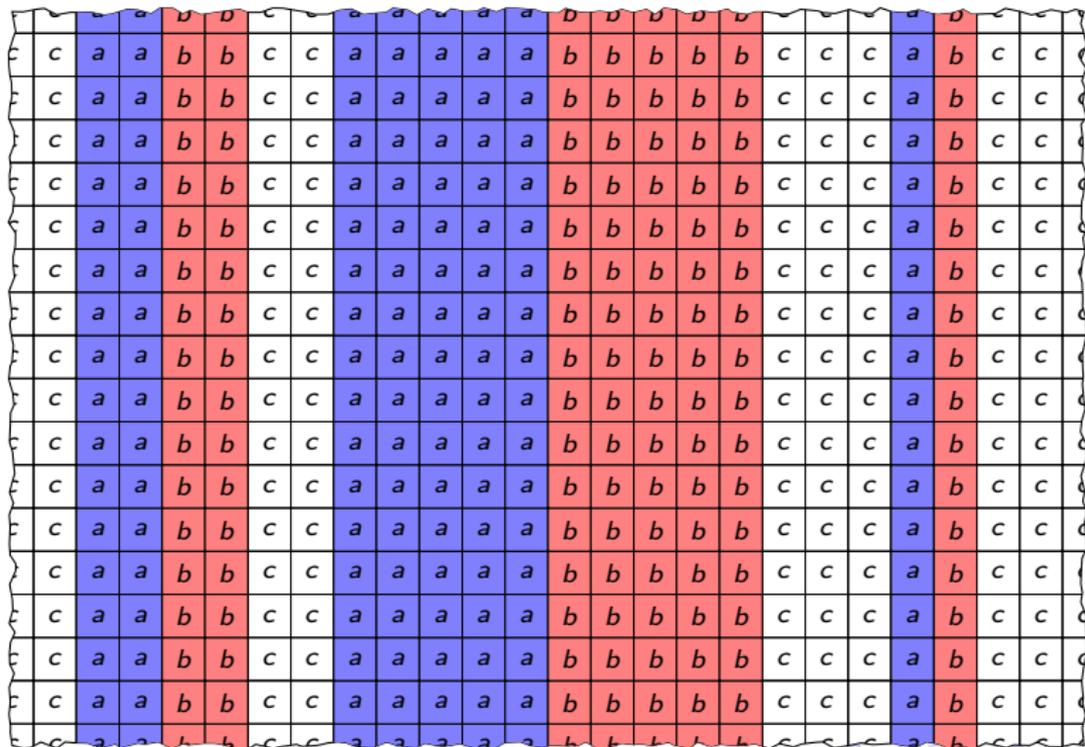
## Théorème (Weiss)

En dimension 1, un sous-shift est sofique si et seulement si l'ensemble des mots interdits est rationnel (i.e. décrit par un automate fini)

## Sous-shift réalisé comme sous action d'un sous-shift?

Soit  $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$  on considère le sous-shift

$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z})\}$$



## Sous-shift réalisé comme sous action d'un sous-shift?

Soit  $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$  on considère le sous-shift

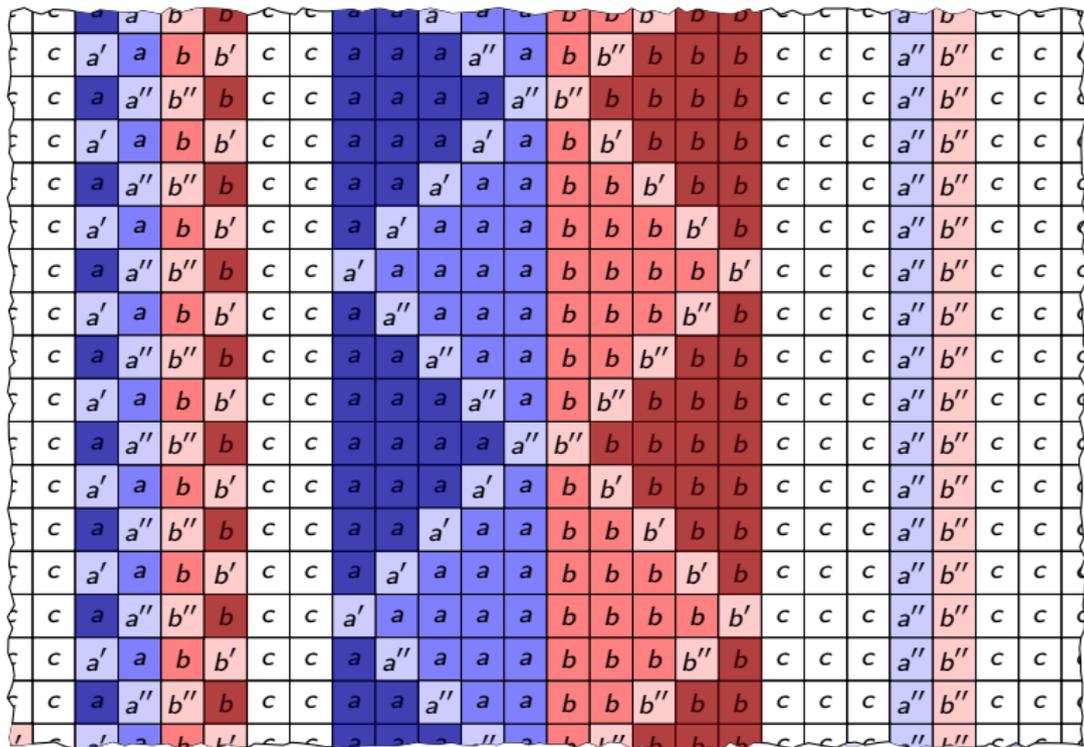
$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2}) : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$

c	a	a'	b	b'	c	c	a	a	a	a''	a	b	b''	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a	a	a''	b''	b	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a	a	a'	a	b	b'	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a'	a	a	b	b	b'	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a'	a	a	a	b	b	b	b'	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a'	a	a	a	a	b	b	b	b'	c	c	c	a''	b''	c	c	
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a''	a	a	a	b	b	b	b''	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a''	a	a	b	b	b''	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a	a	a''	a	b	b''	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a	a	a''	b''	b	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a	a	a'	a	b	b'	b	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a'	a	a	b	b	b'	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a'	a	a	a	b	b	b	b'	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a	a	a	b	b	b	b'	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a'	a	b	b'	c	c	a	a''	a	a	a	b	b	b	b''	b	c	c	c	a''	b''	c	c
c	a	a''	b''	b	c	c	a	a	a''	a	a	b	b	b''	b	b	c	c	c	a''	b''	c	c

## Sous-shift réalisé comme sous action d'un sous-shift?

Soit  $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$  on considère le sous-shift

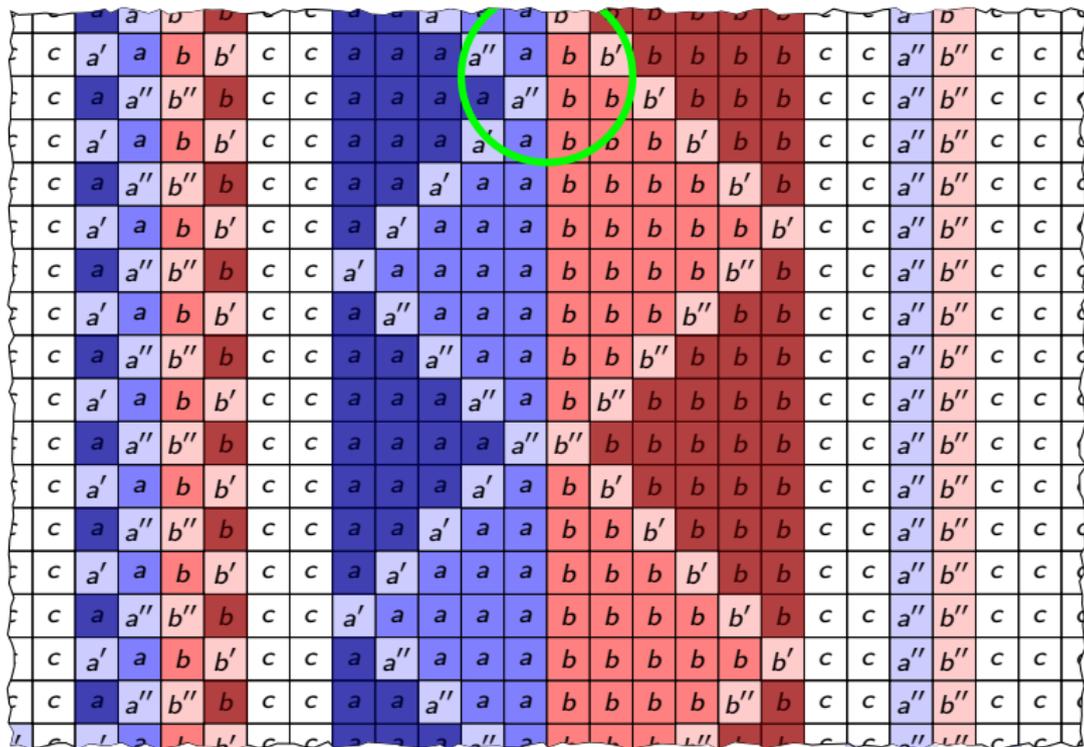
$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2}) : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



## Sous-shift réalisé comme sous action d'un sous-shift?

Soit  $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$  on considère le sous-shift

$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2}) : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



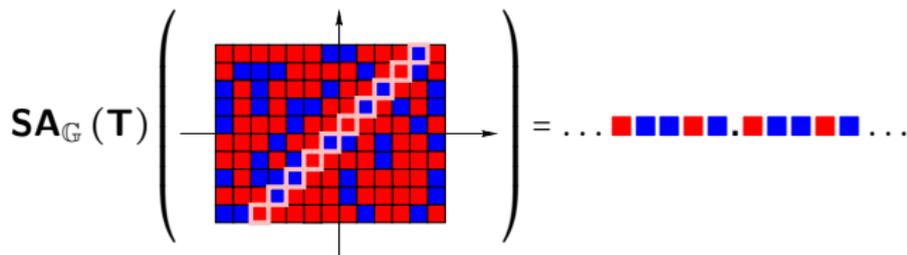
# Sous-action projective: SA

## Définition

Soit  $\mathbb{G}$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^d$  engendré par  $u_1, u_2, \dots, u_{d'}$  ( $d' \leq d$ ). Soit  $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  un sous-shift :

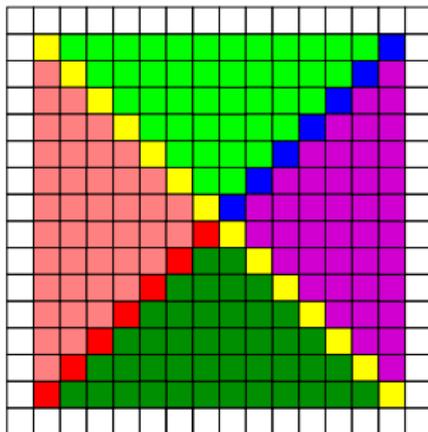
$$\mathbf{SA}_{\mathbb{G}}(\mathbf{T}) = \left\{ y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^{d'}} : \exists x \in \mathbf{T} \text{ tel que } \forall i_1, \dots, i_{d'} \in \mathbb{Z}^{d'}, \right. \\ \left. y_{i_1, \dots, i_{d'}} = x_{i_1 u_1 + \dots + i_{d'} u_{d'}} \right\}.$$

Soit  $\mathbb{G} = \{(i, i) : i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$ .



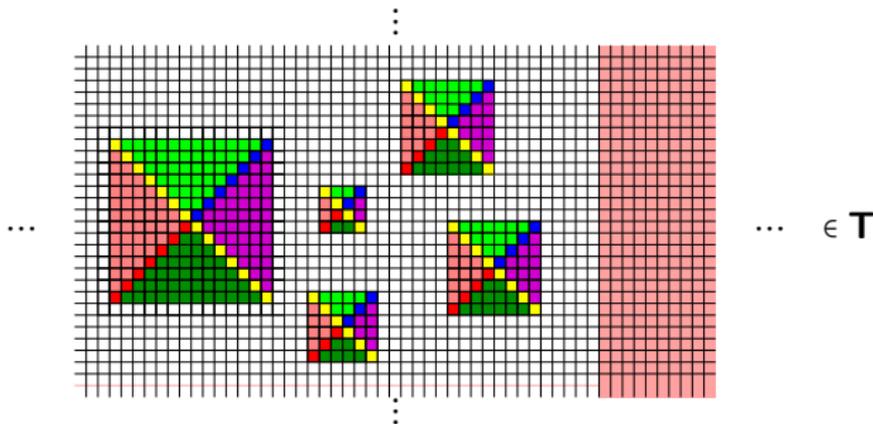
## Exemple de sous-action projective

Soit  $\mathcal{A} = \{\square \text{ (white)}, \blacksquare \text{ (red)}, \blacksquare \text{ (blue)}, \blacksquare \text{ (yellow)}, \blacksquare \text{ (green)}, \blacksquare \text{ (purple)}, \blacksquare \text{ (pink)}, \blacksquare \text{ (dark green)}\}$ , il est possible de définir un SFT  $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$  tel que  $\square$  est un fond et toute composante non  $\square$ -composant a la forme suivante:



## Exemple de sous-action projective

Soit  $\mathcal{A} = \{\square \text{ (red, blue, yellow, green, purple, pink, black)}\}$ , il est possible de définir un SFT  $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$  tel que  $\square$  est un fond et toute composante non  $\square$ -composante a la forme suivante:



Soit  $\mathbb{G} = \{(i, i) : i \in \mathbb{Z}\}$ , on a:

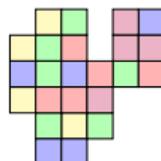
$$\mathbf{SA}_{\mathbb{G}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}(\{\square \text{ (red, blue, yellow, green, purple, pink, black)}\}, 1, \{*\text{red}^n\text{blue}^m*\text{ : } n \neq m\}) \notin \text{Sofic}.$$

Ainsi  $\mathcal{C}l_{\mathbf{SA}}(\text{Sofic}) \neq \text{Sofic}$ .

# Sous-shifts défini par des motifs interdits



$U \subset \mathbb{Z}^d$  fini



motif  $u \in \mathcal{A}^U$

Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de motifs, on définit le sous-shift de motifs interdits  $\mathcal{F}$ :

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : \text{Aucun motif de } \mathcal{F} \text{ n'apparaît dans } x\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$$

## Quelques classes de sous-shifts:

$$\mathbf{T} \text{ fullshift } (\mathcal{FS}) \iff \mathcal{F} = \emptyset \text{ et } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d},$$

$$\mathbf{T} \text{ sous-shift de type } (\mathcal{SFT}) \iff \text{il existe un ensemble fini de motifs } \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$$

$$\mathbf{T} \text{ sous-shift effectif } (\mathcal{RE}) \iff \text{il existe un ensemble récursivement énumérable de motifs } \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}).$$

# Barrière liée à la calculabilité

## Proposition

$$C|_{\text{SA}}(\text{Sofic}) = C|_{\text{Fact,SA}}(\text{SFT}) \subset \mathcal{RE}$$

### Preuve:

Soit  $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{B}, 2, \mathcal{F}))$  un sofique où  $\mathcal{F}$  est fini et  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .

On considère  $\Sigma = \mathbf{SA}_{\mathbb{G}}(\mathbf{T})$  et on souhaite montrer que c'est un sous-shift récursivement énumérable. On a :

$u$  est un motif interdit de  $\Sigma$   $\iff \exists m$  tel qu'aucun motif de support  $[-m, m]^2$  contenant  $u$  au centre satisfasse  $\mathcal{F}$ .

Ainsi pour un mot  $u \in \mathcal{A}^n$  on programme la machine  $\mathcal{M}_u$  qui énumère tout les motifs de taille  $[-m, m]^2$  contenant  $u$  en son centre et satisfaisant  $\mathcal{F}$ . La machine s'arrête si  $\mathcal{M}_u$  ne trouve pas de motif satisfaisant les contraintes.

La machine qui énumère les motifs interdit de  $\Sigma$  fait tourné en parallèle les machine  $\mathcal{M}_u$  et donne  $u$  si  $\mathcal{M}_u$  s'arrête.

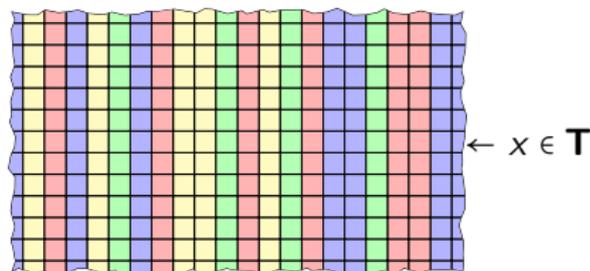
# Théorème de réalisation

**Théorème** (Hochman-2009, Durand-Romashchenko-Shen-2010, Aubrun-Sablik-2010)

Pour tout sous-shift effectif  $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  il existe un sous-shift de type fini  $\mathbf{T}_{\text{Final}} = \mathbf{T}(\mathcal{B}, d+1, \mathcal{F})$  et un facteur  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $x \in \Sigma$  si et seulement si il existe  $y \in \mathbf{T}_{\text{Final}}(\mathcal{B}, d+1, \mathcal{F})$  vérifiant  $\pi(y)_{\mathbb{Z}^d \times \{i\}} = x$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

- $\text{Cls}_{\mathbf{A}}(\text{Sofic}) = \mathcal{RE}$ .
- Tout sous-shift effectif de dimension  $d$  est conjugué à une sous-action d'un sous-shift de type fini de dimension  $d+1$ .

Plus précisément  $x \in \mathbf{T}$  si et seulement si une superposition de  $x$  dans une direction appartient à  $\pi(\mathbf{T}_{\text{Final}})$ .

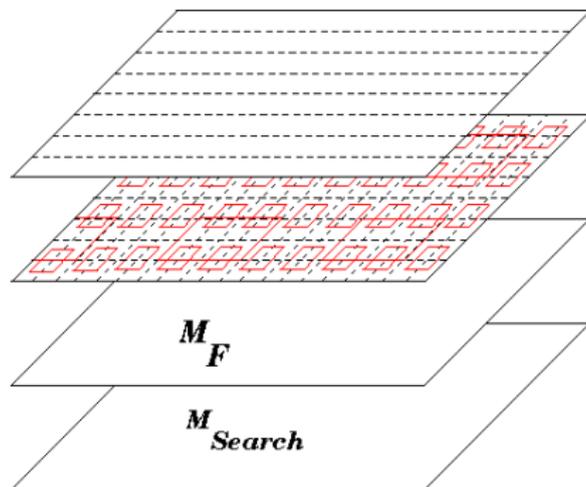


## Très brève idée de preuve

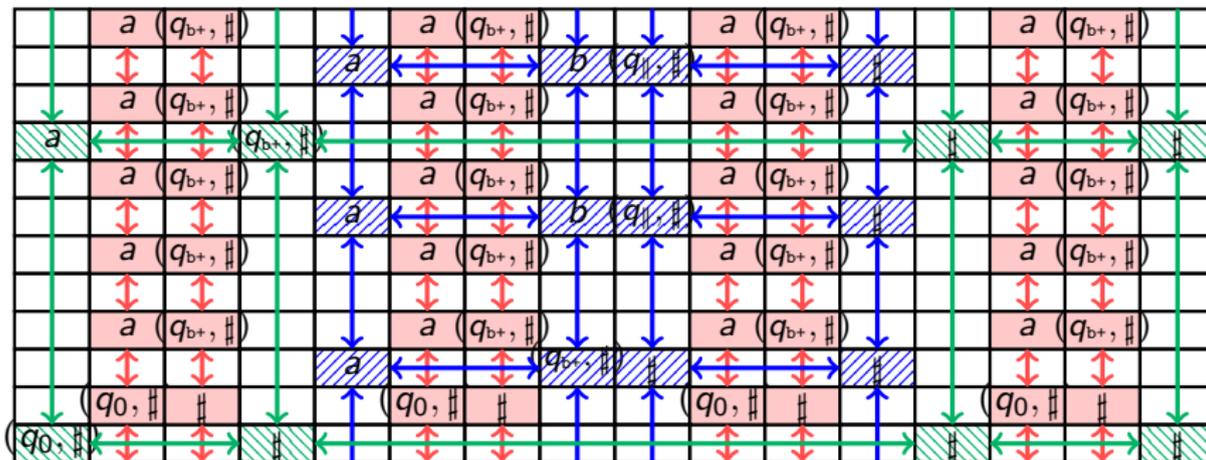
On souhaite simuler un sous-shift effectif  $\Sigma \subseteq \mathcal{A}_\Sigma^{\mathbb{Z}}$  à l'aide d'un SFT de dimension

### 2. Different layers:

- **Couche 1:** Une superposition d'une configuration  $x \in \mathcal{A}_\Sigma^{\mathbb{Z}}$  (le candidat  $x \in \Sigma?$ ),
- **Couche 2:** Zone de calcul pour les machines  $\mathcal{M}_{\text{Forbid}}$  et  $\mathcal{M}_{\text{Search}}$ ,
- **Couche 3:** Une machine de Turing  $\mathcal{M}_{\text{Forbid}}$  qui énumère les motifs interdits
- **Couche 4:** Une machine de Turing  $\mathcal{M}_{\text{Search}}$  qui vérifie si le motif interdit apparaît dans le candidat  $x$ .

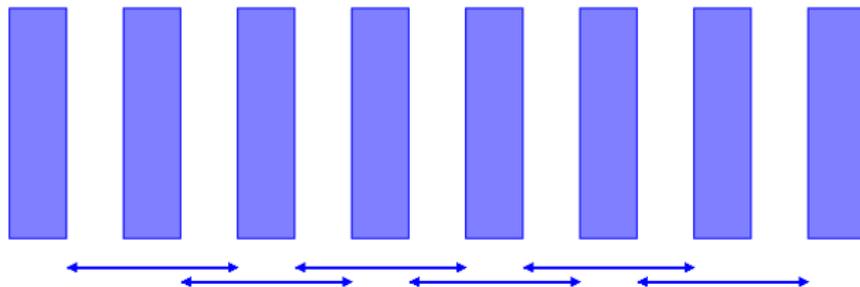
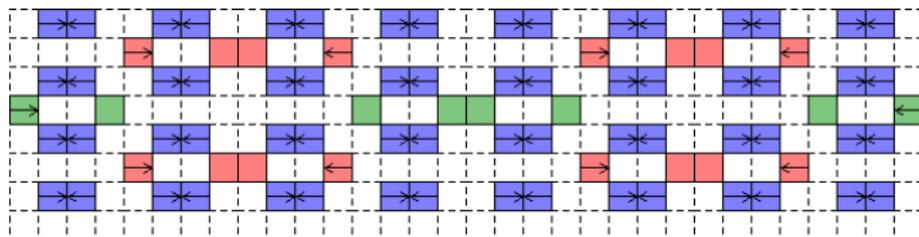


# Simulation d'une machine de Turing



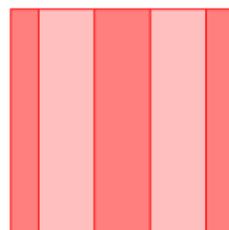
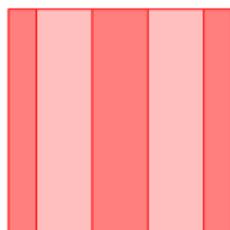
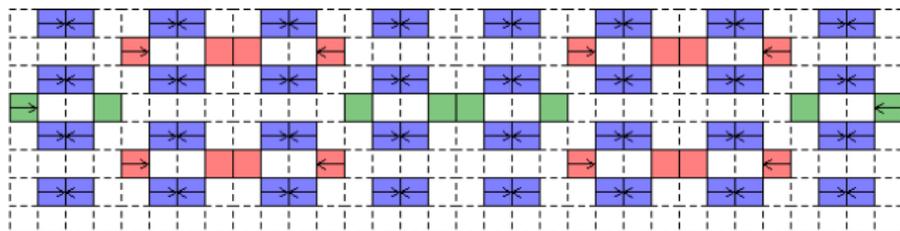
## Zones de responsabilité de $\mathcal{M}_{\text{Forbid}}$

Les zones de responsabilité doivent vérifier toute la configuration, ainsi pour éviter les lignes de fractures, elle doivent se chevaucher ( $\dots x_{-2}x_{-1}x_0 \in \mathcal{L}(\Sigma)$  et  $x_0x_1x_2 \dots \in \mathcal{L}(\Sigma)$  n'implique pas que  $\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots \in \mathcal{L}(\Sigma)$ ).



## Zones de responsabilité de $\mathcal{M}_{\text{Forbid}}$

Les zones de responsabilité doivent vérifier toute la configuration, ainsi pour éviter les lignes de fractures, elle doivent se chevaucher ( $\dots x_{-2}x_{-1}x_0 \in \mathcal{L}(\Sigma)$  et  $x_0x_1x_2 \dots \in \mathcal{L}(\Sigma)$  n'implique pas que  $\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots \in \mathcal{L}(\Sigma)$ ).



# Applications

# Applications

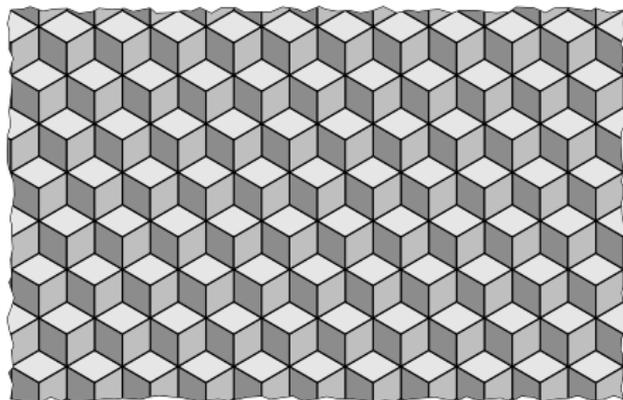
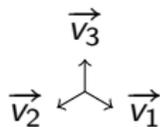
Ce théorème a un rôle central lorsque on cherche à construire un SFT ou pavage par règles locales avec des propriétés particulières. Voici quelques exemples:

- 1 caractérisation de l'entropie d'un SFT multidimensionnel,
- 2 caractérisation des pavages par coupé projection qui admettent des règles locales,
- 3 caractérisation des pavages s-adique multidimensionnel qui admettent des règles locales,
- 4 caractérisation des périodes possible pour un SFT multidimensionnel,
- 5 calculabilité de la fonction de quasi-périodicité...

# Pavages planaires

## $n \rightarrow d$ pavages

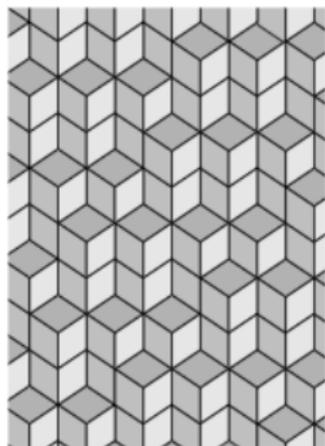
Soit  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  non colinéaire deux à deux avec  $n > d > 0$ .



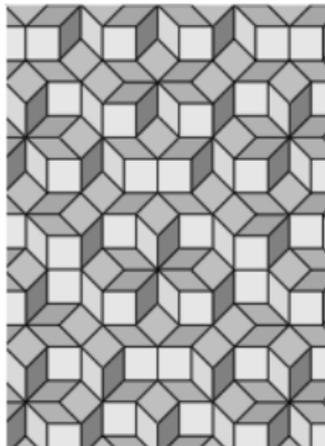
- Une  $n \rightarrow d$  *tuile* est un paralléloèdre engendré par  $d$  des  $\vec{v}_i$  vecteurs, il y a donc  $\binom{n}{d}$  tuiles.
- Un  $n \rightarrow d$  *pavage* est un pavage de  $\mathbb{R}^d$  par des  $n \rightarrow d$  tuiles.
- L'ensemble  $\mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  de tous les pavages de  $\mathbb{R}^d$  par des  $n \rightarrow d$  tuiles, c'est l'espace complet *espace complet des  $n \rightarrow d$  pavages*.

## $n \rightarrow d$ pavages

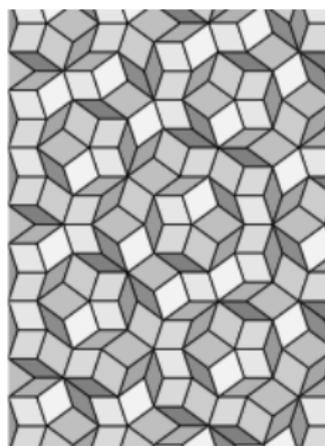
Soit  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  non colinéaire deux à deux avec  $n > d > 0$ .



$3 \rightarrow 2$



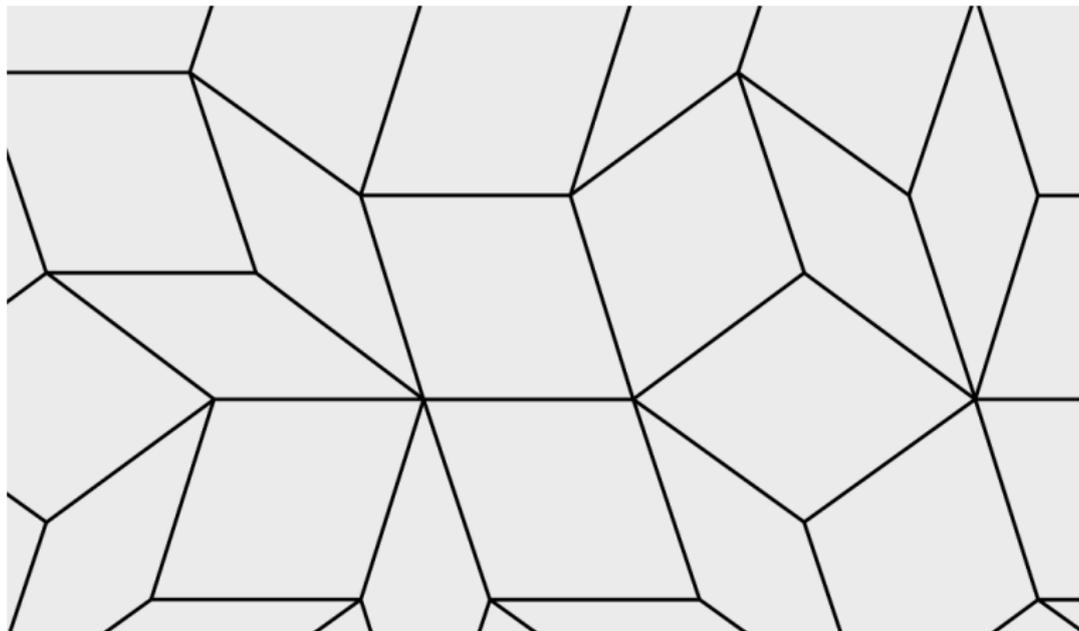
$4 \rightarrow 2$



$5 \rightarrow 2$

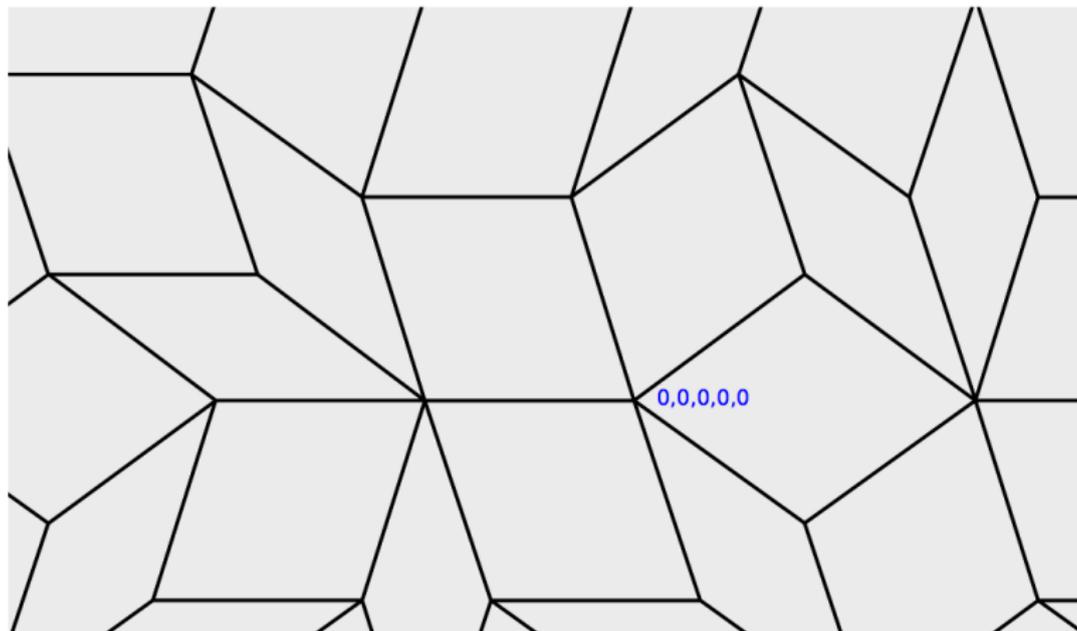
- Une  $n \rightarrow d$  *tuile* est un paralléloépipède engendré par  $d$  des  $\vec{v}_i$  vecteurs, il y a donc  $\binom{n}{d}$  tuiles.
- Un  $n \rightarrow d$  *pavage* est un pavage de  $\mathbb{R}^d$  par des  $n \rightarrow d$  tuiles.
- L'ensemble  $\mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  de tous les pavages de  $\mathbb{R}^d$  par des  $n \rightarrow d$  tuiles, c'est l'espace complet *espace complet des  $n \rightarrow d$  pavages*.

# Surface discrète relevée



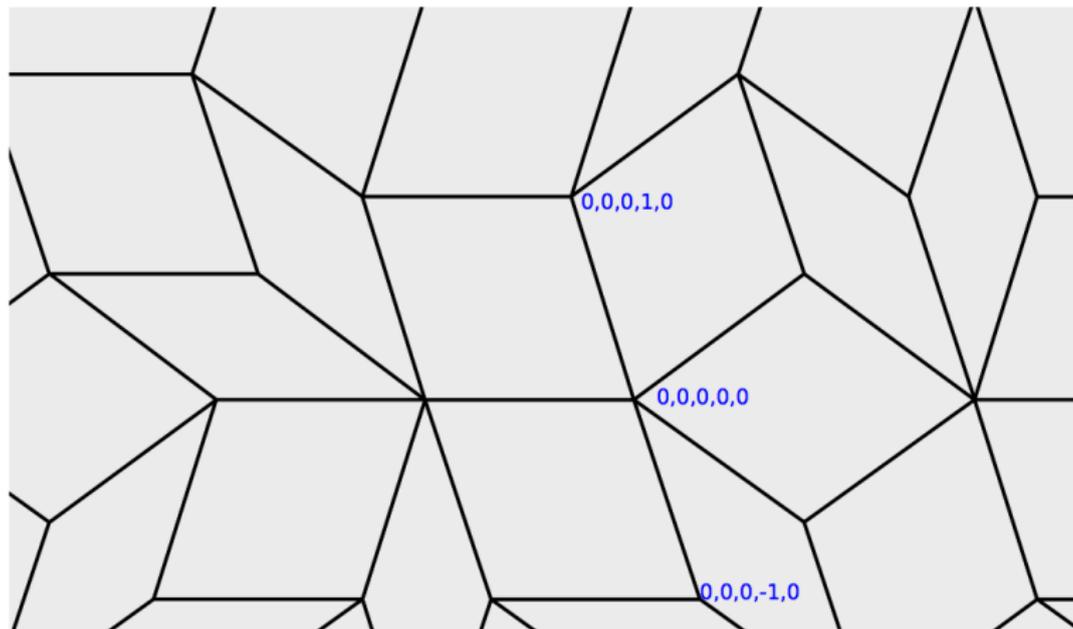
On considère un  $n \rightarrow d$  pavage.

# Surface discrète relevée



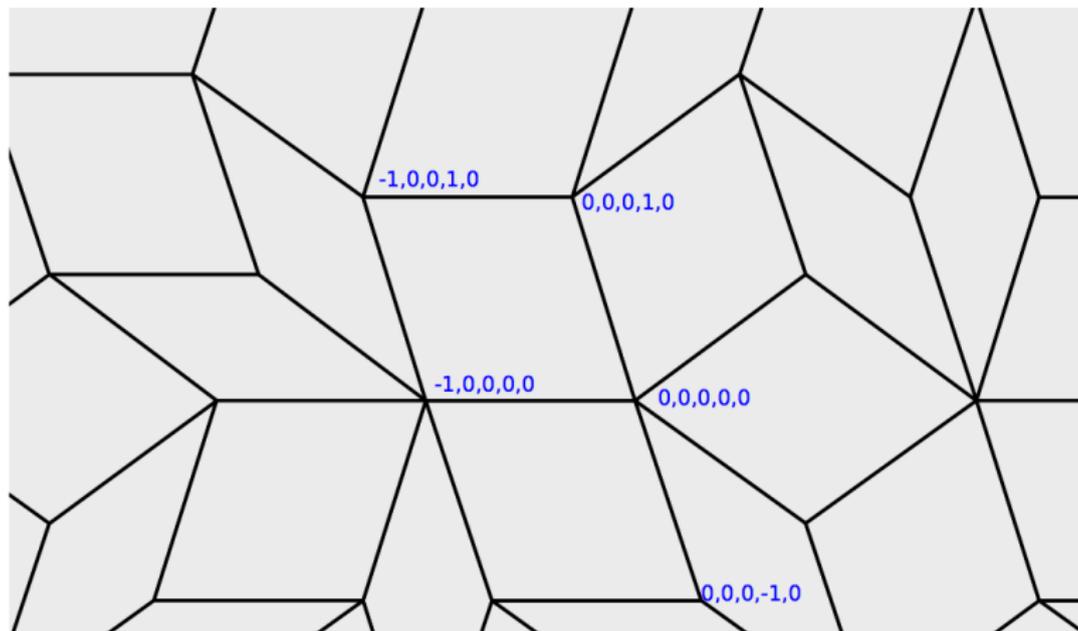
A un sommet du pavage, on associe un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$ .

# Surface discrète relevée



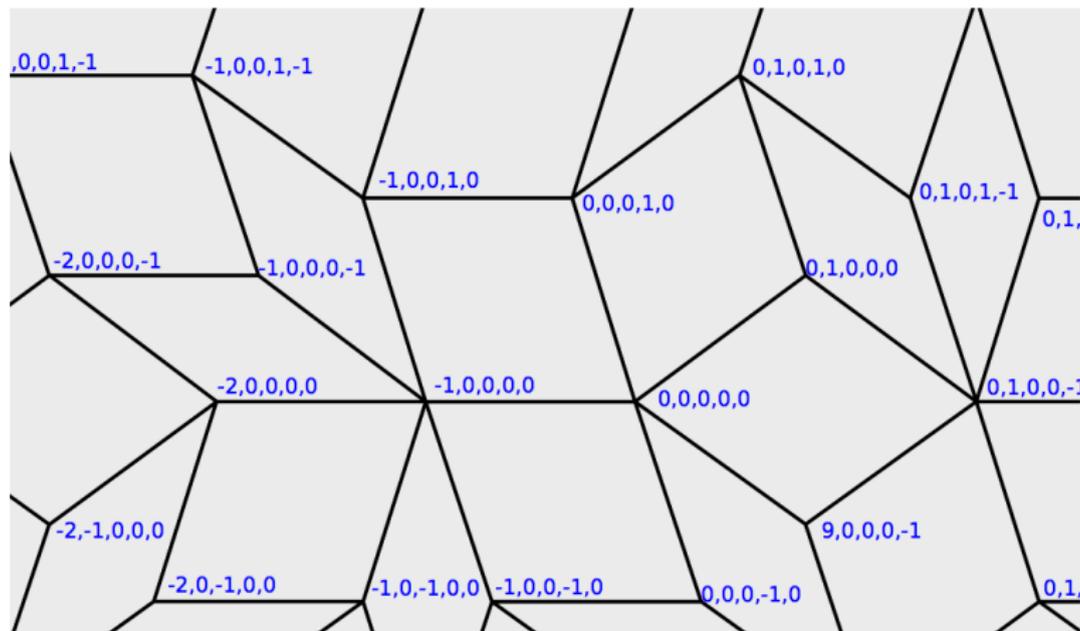
Puis on modifie la  $k^{\text{ème}}$  coordonnée lorsqu'on se déplace suivant le  $k^{\text{ème}}$  vecteur.

# Surface discrète relevée



Les sommets de la  $n \rightarrow d$  tuiles sont donc envoyés sur les sommets de  $[0, 1]^n$ .

# Surface discrète relevée

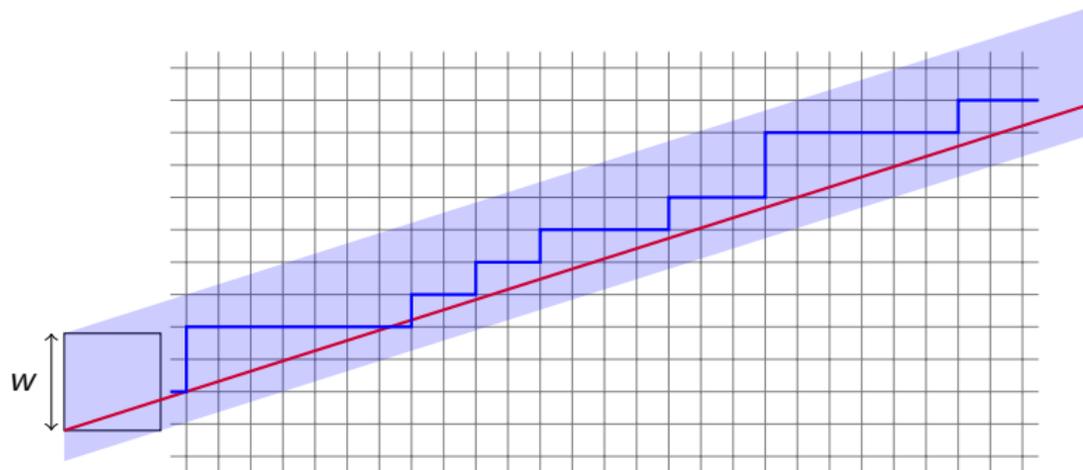


Ainsi, le  $n \rightarrow d$  pavage est envoyé sur une surface discrète  $\mathbb{R}^n$ :  
c'est la *surface relevée* du pavage.

# Planar tilings

## Définition

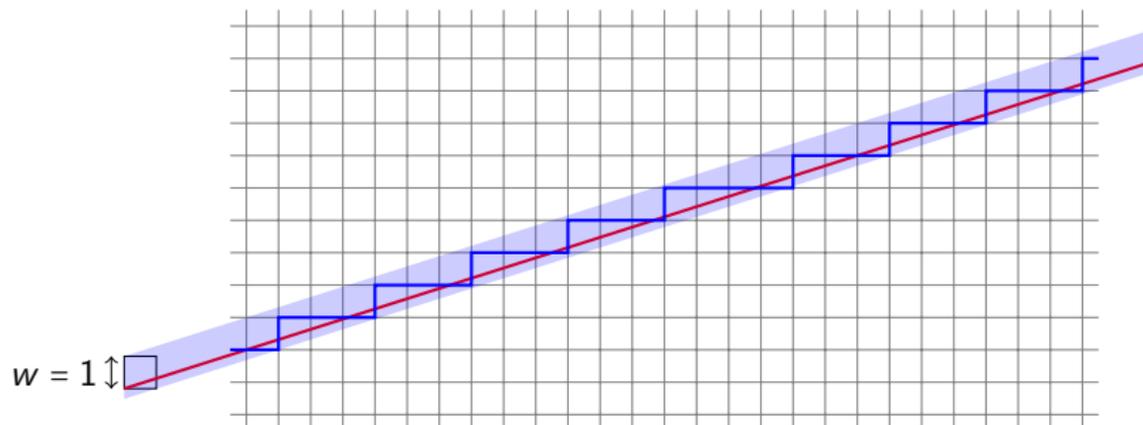
Un espace de  $n \rightarrow d$  pavage  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est un *espace plantaire de pavages* si il existe un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V \subset \mathbb{R}^n$ , la *pen*te et un entier positif  $w$ , l'*épaisseur*, tel que le pavage  $t \in \mathbf{T}$  peut être relevé dans l'ensemble  $V + [0, w)^n$ .



# Planar tilings

## Définition

Un espace de  $n \rightarrow d$  pavage  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est un *espace plantaire de pavages* si il existe un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V \subset \mathbb{R}^n$ , la *pente* et un entier positif  $w$ , l'*épaisseur*, tel que le pavage  $t \in \mathbf{T}$  peut être relevé dans l'ensemble  $V + [0, w)^n$ .

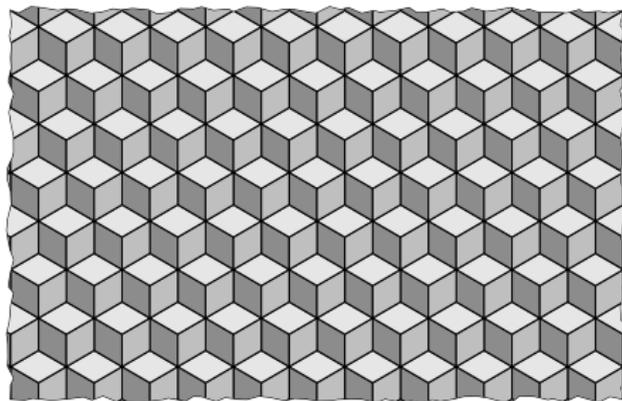


Le cas  $w = 1$  correspond au *pavage planaire parfait*.

# Pavages planaires

## Definition

Un espace de  $n \rightarrow d$  pavage  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est un *espace planaire de pavages* si il existe un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V \subset \mathbb{R}^n$ , la *penne* et un entier positif  $w$ , l'*épaisseur*, tel que le pavage  $t \in \mathbf{T}$  peut être relevé dans l'ensemble  $V + [0, w]^n$ .

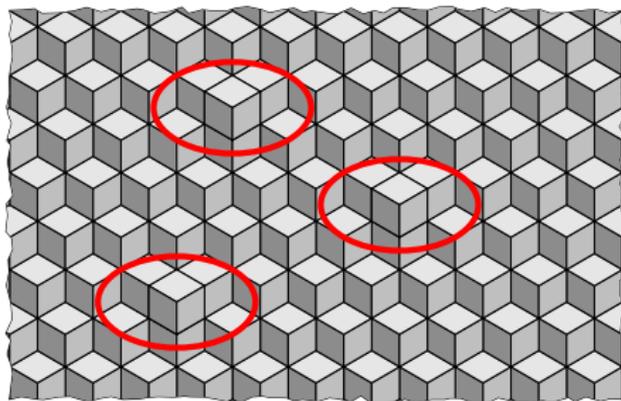


Le cas  $w = 1$  correspond au *pavage planaire parfait*.

# Pavages planaires

## Definition

Un espace de  $n \rightarrow d$  pavage  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est un *espace planaire de pavages* si il existe un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V \subset \mathbb{R}^n$ , la *pen*t*e* et un entier positif  $w$ , l'*épaisseur*, tel que le pavage  $t \in \mathbf{T}$  peut être relevé dans l'ensemble  $V + [0, w)^n$ .

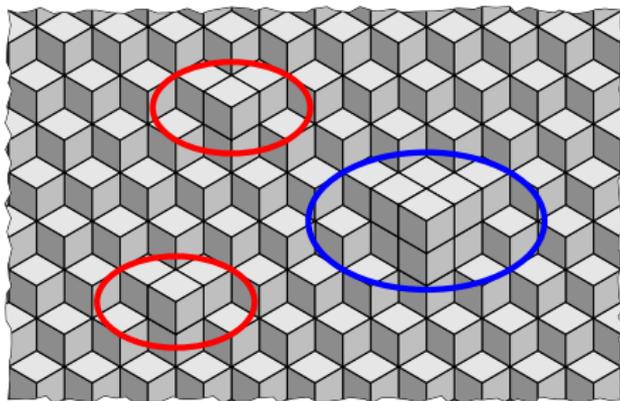


Ici  $w = 2$ , si  $w \geq 2$ , cela correspond au *pavage planaire faible*.

# Pavages planaires

## Definition

Un espace de  $n \rightarrow d$  pavage  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est un *espace planaire de pavages* si il existe un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V \subset \mathbb{R}^n$ , la *pen*t*e* et un entier positif  $w$ , l'*épaisseur*, tel que le pavage  $t \in \mathbf{T}$  peut être relevé dans l'ensemble  $V + [0, w]^n$ .



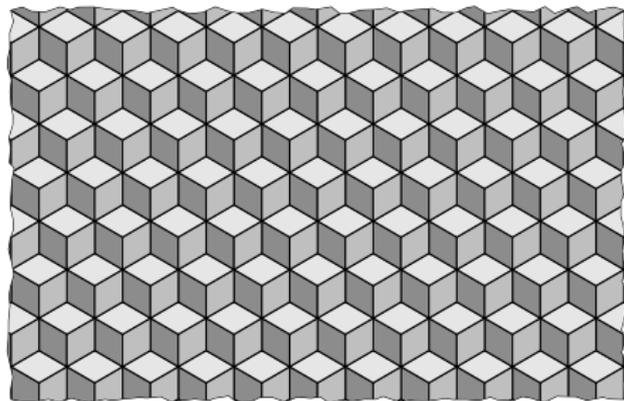
Ici  $w = 3$ , si  $w \geq 2$ , cela correspond au *pavage planaire faible*.

# Règles locales

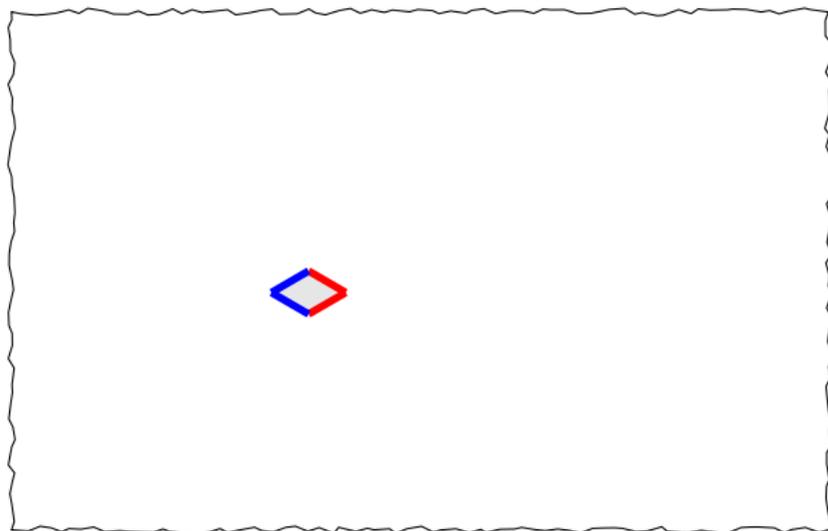
- Un  $n \rightarrow d$ -*motif de taille*  $r$  d'un pavage  $t \in \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$  est l'ensemble des tuiles contenues dans une boule de rayon  $r > 0$ . Pour  $\mathbf{T} \subset \mathcal{X}_{n \rightarrow d}$ , on note  $\mathcal{P}_r(\mathbf{T})$  l'ensemble des  $n \rightarrow d$ -motifs de taille  $r$  de chaque pavage de  $\mathbf{T}$ .
- L'ensemble des pavage dont les  $n \rightarrow d$ -motifs  $\mathcal{F}$  sont interdits est:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \{t \in \mathcal{X}_{n \rightarrow d} : \text{aucun motif de } \mathcal{F} \text{ apparait dans } t\}$$

- $\mathbf{T}$  est *un espace de pavage de type fini* si il existe  $\mathcal{F}$  fini tel que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ .

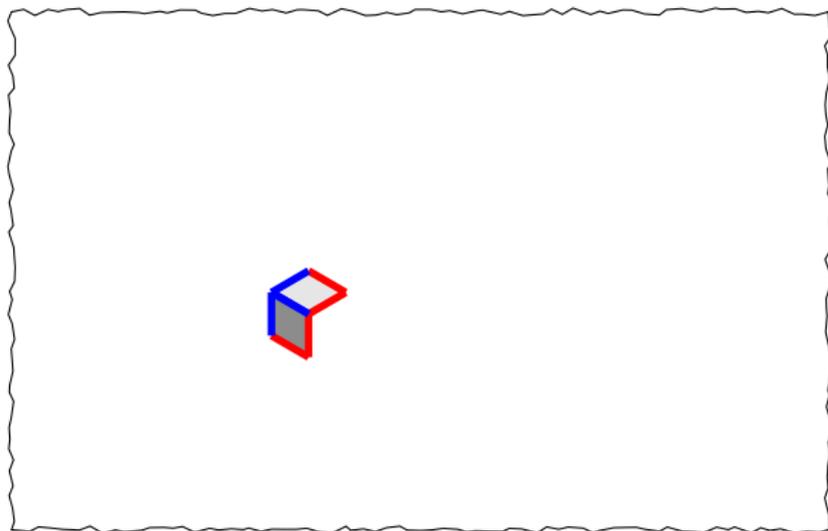


## Règles locale avec décoration



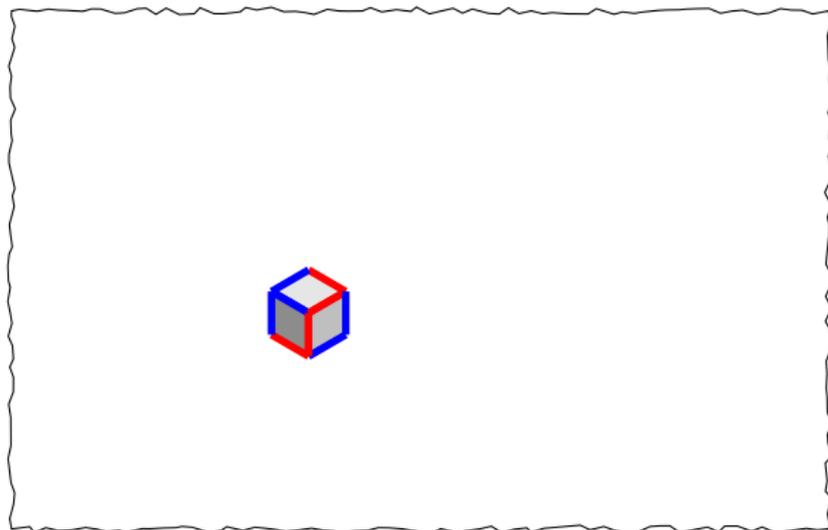
On considère les  $3 \rightarrow 2$  tuiles coloriées  $\left\{ \begin{array}{c} \text{blue/red} \\ \text{red/blue} \\ \text{red/blue} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



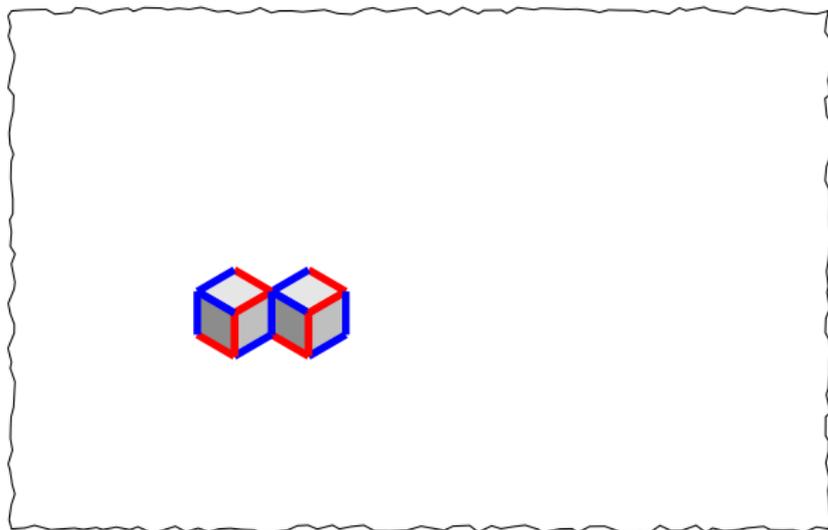
On considère les  $3 \rightarrow 2$  tuiles coloriées  $\left\{ \begin{array}{c} \text{blue/red} \\ \text{blue/red} \\ \text{grey} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



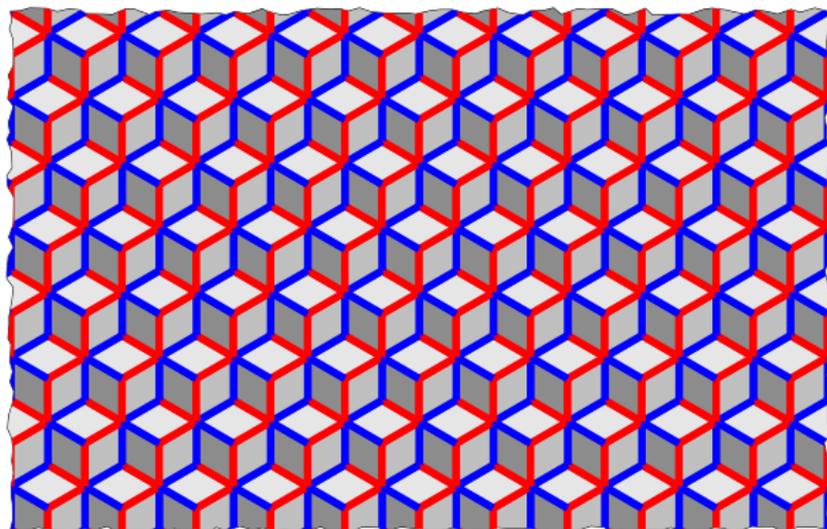
On considère les  $3 \rightarrow 2$  tuiles coloriées  $\left\{ \begin{array}{c} \text{blue/red} \\ \text{blue/red} \\ \text{gray/red} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



On considère les  $3 \rightarrow 2$  tuiles coloriées  $\left\{ \begin{array}{c} \text{blue/red} \\ \text{blue/red} \\ \text{gray} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

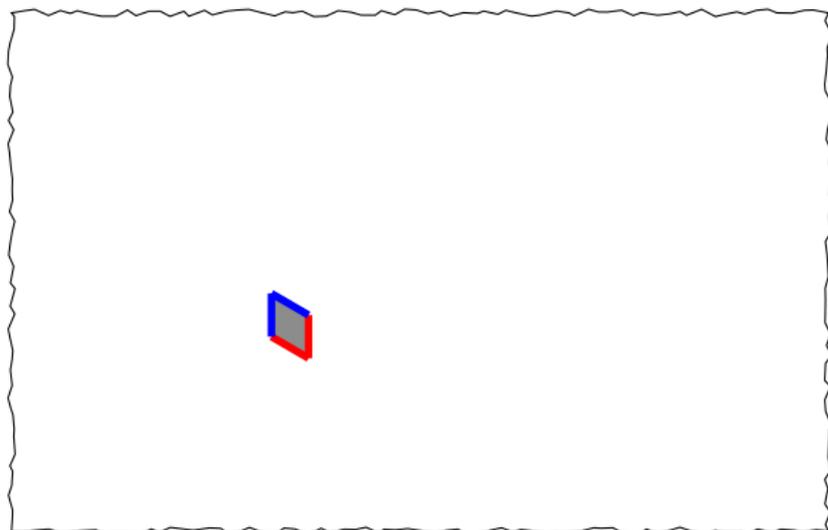
## Règles locale avec décoration



On considère les  $3 \rightarrow 2$  tuiles coloriées  $\left\{ \begin{array}{l} \text{rhombus à arêtes rouges} \\ \text{rhombus à arêtes bleues} \\ \text{rhombus à arêtes rouges et bleues} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

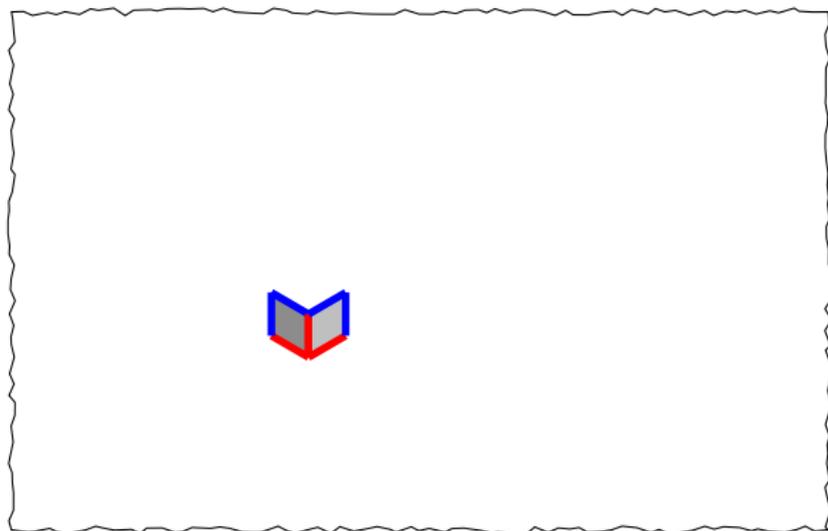
Un ensemble de pavages admet des *règles locales avec décoration* si le fait de colorier les tuiles permet de le décrire complètement.

## Règles locale avec décoration



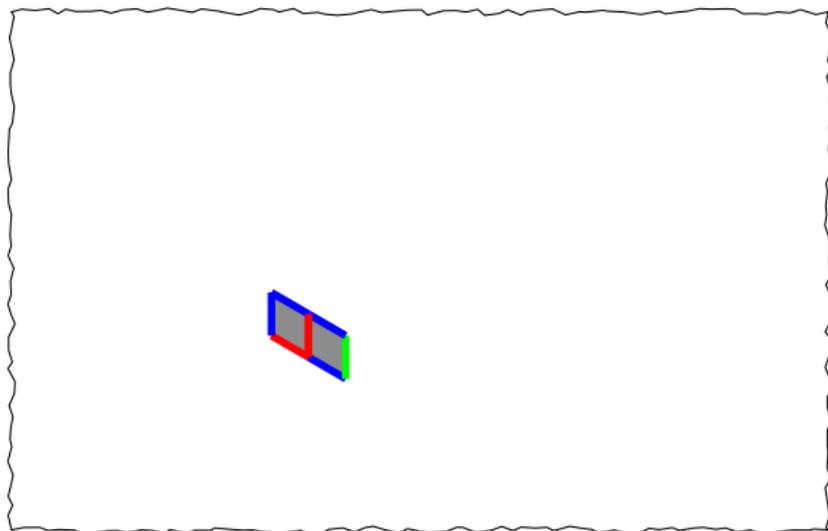
Considérons les  $3 \rightarrow 2$  tuiles suivantes:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{diamond with red top/bottom and blue left/right edges} \\ \text{diamond with blue top/bottom and red left/right edges} \\ \text{diamond with green top/bottom and blue left/right edges} \\ \text{diamond with red top/bottom and green left/right edges} \\ \text{diamond with red top/bottom and red left/right edges} \\ \text{diamond with blue top/bottom and blue left/right edges} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



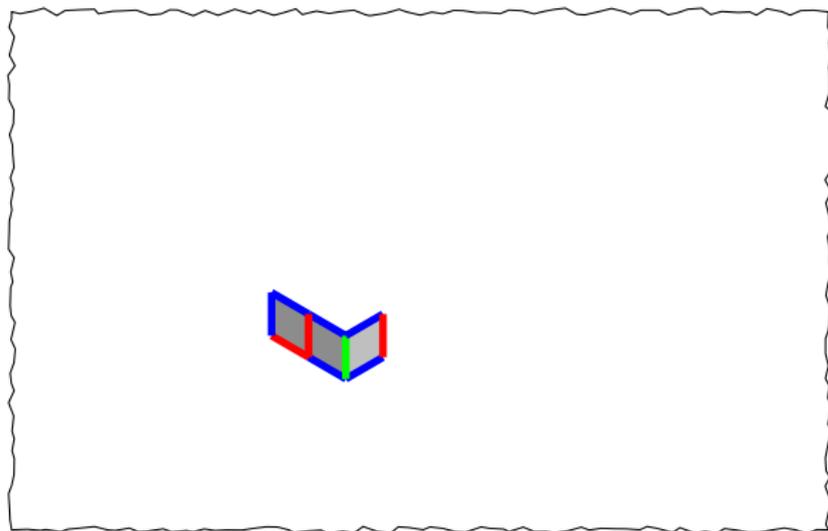
Considérons les  $3 \rightarrow 2$  tuiles suivantes:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{blue/red} \\ \text{blue/red/green} \\ \text{blue/red/green} \\ \text{blue/red/green} \\ \text{blue/red/green} \\ \text{blue/red/green} \\ \text{blue/red/green} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



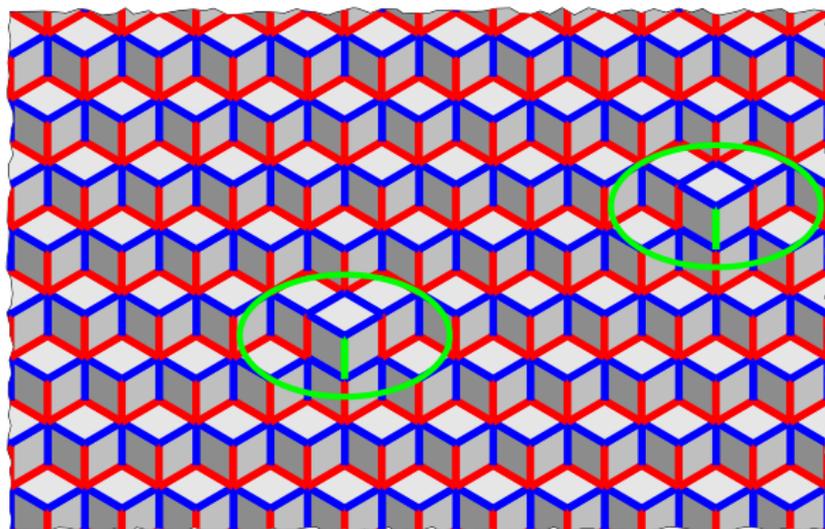
Considérons les  $3 \rightarrow 2$  tuiles suivantes:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{[red top, blue bottom, blue left, red right]} \\ \text{[blue top, red bottom, red left, blue right]} \\ \text{[green top, blue bottom, blue left, green right]} \\ \text{[red top, blue bottom, green left, red right]} \\ \text{[blue top, red bottom, red left, blue right]} \\ \text{[blue top, blue bottom, blue left, blue right]} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



Considérons les  $3 \rightarrow 2$  tuiles suivantes:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{red-blue} \\ \text{blue-green} \\ \text{green-red} \\ \text{red-blue} \\ \text{blue-green} \\ \text{red-blue} \end{array} \right\}$ , qui peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur.

## Règles locale avec décoration



Considérons les 3  $\rightarrow$  2 tuiles suivantes:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{red-blue} \\ \text{blue-red} \\ \text{green-blue} \\ \text{blue-green} \\ \text{red-blue} \\ \text{blue} \end{array} \right\}$ , qui

peuvent être collées si les deux arêtes correspondantes ont la même couleur. Ces règles autorisent de petites fluctuations et on obtient un pavage planaire faible

# Historique du problème

Quels espaces vectoriels admettent des règles locales coloriées ou pas?

*Pavages à  $n$ -symétries*: on considère le plan  $\mathbb{R}(u_1, \dots, u_n) + \mathbb{R}(v_1, \dots, v_n)$  où

$$u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ and } v_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Pavage	règles locales sans décoration	règles locales avec décoration
5, 10-symétries	forte	forte <sup>(1)</sup>
8-symétries	n'existe pas <sup>(2)</sup>	forte <sup>(3)</sup>
12-symétries	n'existe pas <sup>(3)</sup>	forte <sup>(4)</sup>
$n$ -symétries (avec 4 qui ne divise pas $n$ )	faible <sup>(5)</sup>	forte?
pente quadratique dans $\mathbb{R}^4$	faible <sup>(6)</sup>	forte <sup>(7)</sup>
non algébrique	n'existe pas <sup>(8)</sup>	?

- (1): *Penrose 1974*   (2): *Burkov 1988*   (3): *Le 1992*   (4): *Socolar 1989*  
(5): *Socolar 1990*   (6): *Levitov 1988*   (7): *Le & al. 1992*   (8): *Le 1997*

# Résultats principaux

- Un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est *calculable* si il existe une fonction calculable  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^n$  tel que  $\|\vec{v} - f(n)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Un espace vectoriel  $V \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $d$  est *calculable* si il existe un ensemble de  $d$  vecteurs calculables qui engendre  $V$ .

## Théorème (Fernique & S. 2012)

Un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V$  admet des  $n \rightarrow d$ -règles locales colorées faibles (d'épaisseur 3) pour  $n > d$  si et seulement si il est calculable.

## Theorem (Fernique & S. 2012)

Un espace vectoriel  $d$ -dimensionnel  $V$  admet des  $n \rightarrow d$ -règles locales faibles (d'épaisseur 4) pour  $n > d$  si et seulement si il est calculable.

# Historique du problème

Quels espaces vectoriels admettent des règles locales coloriées ou pas?

*Pavages à  $n$ -symétries*: on considère le plan  $\mathbb{R}(u_1, \dots, u_n) + \mathbb{R}(v_1, \dots, v_n)$  où

$$u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ and } v_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Pavage	règles locales sans décoration	règles locales avec décoration
5, 10-symétries	forte	forte <sup>(1)</sup>
8-symétries	n'existe pas <sup>(2)</sup>	forte <sup>(3)</sup>
12-symétries	n'existe pas <sup>(3)</sup>	forte <sup>(4)</sup>
$n$ -symétries (avec 4 qui ne divise pas $n$ )	faible <sup>(5)</sup>	forte?
pente quadratique dans $\mathbb{R}^4$	faible <sup>(6)</sup>	forte <sup>(7)</sup>
non algébrique	n'existe pas <sup>(8)</sup>	?

- (1): *Penrose 1974*    (2): *Burkov 1988*    (3): *Le 1992*    (4): *Socolar 1989*  
(5): *Socolar 1990*    (6): *Levitov 1988*    (7): *Le & al. 1992*    (8): *Le 1997*

# Historique du problème

Quels espaces vectoriels admettent des règles locales coloriées ou pas?

*Pavages à  $n$ -symétries*: on considère le plan  $\mathbb{R}(u_1, \dots, u_n) + \mathbb{R}(v_1, \dots, v_n)$  où

$$u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ and } v_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Pavage	règles locales sans décoration	règles locales avec décoration
5, 10-symétries	forte	forte <sup>(1)</sup>
8-symétries	n'existe pas <sup>(2)</sup>	forte <sup>(3)</sup>
12-symétries	n'existe pas <sup>(3)</sup>	forte <sup>(4)</sup>
$n$ -symétries (avec 4 qui ne divise pas $n$ )	faible <sup>(5)</sup>	forte?
pente quadratique dans $\mathbb{R}^4$	faible <sup>(6)</sup>	forte <sup>(7)</sup>
non algébrique	n'existe pas <sup>(8)</sup>	?

## Notion de règles locales naturelles

Des règles locales sont dites *naturelle* si elles sont vérifiées par les  $n \rightarrow d$ -pavages à distance 1 de l'espace vectoriel considéré.

# Barrière liée à la calculabilité

# Métrique sur l'ensemble des espaces vectoriels $d$ -dimensionnel

Soit  $\mathbf{S} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_\infty = 1\}$ , étant donné  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ , on définit la distance

$$\tilde{d}(V, W) = \max \left\{ \sup_{\vec{v} \in \mathbf{S} \cap V} \inf_{\vec{w} \in W} \|\vec{v} - \vec{w}\|_\infty ; \sup_{\vec{w} \in \mathbf{S} \cap W} \inf_{\vec{v} \in V} \|\vec{v} - \vec{w}\|_\infty \right\}.$$

$V$  est *calculable* si il existe une machine de Turing qui sur l'entrée  $n \in \mathbb{N}$  donne une base rationnelle qui définit  $W_n$  un espace vectoriel de dimension  $d$  tel que  $\tilde{d}(V, W_n) \leq \frac{1}{n}$ .

# Algorithme pour obtenir la pente

**Entrée:** Règles locales de l'espace de pavages planaire  $\mathbf{T}$ , l'épaisseur  $w$  et un entier  $n$ .

**Algorithme:**

- $r := 2wn$  et  $d := 1$
- Tant que  $d \geq \frac{1}{2n}$  faire:
  - on énumère  $\mathcal{P}_r(\mathbf{T})$ , l'ensemble des motifs autorisés par ces règles locales de diamètre  $r$  centré sur 0 (ceci prend un temps fini mais exponentiel en  $r$ )
  - on énumère  $\mathbb{X}_r$ , l'ensemble des espaces vectoriels de dimension  $d$  associé au sommets du bord lorsqu'on relève  $P_r$  et on calcule

$$d = \max_{W_1, W_2 \in \mathbb{X}_r} \tilde{d}(W_1, W_2)$$

- Sortie: un élément de  $W \in \mathbb{X}_r$

**Cet algorithme s'arrête:** Pour un  $r$  suffisamment grand, tous les espaces vectoriels de  $\mathbb{X}_r$  sont proches de  $V$ . Sinon, par compacité on obtient au moins deux pentes pour le pavage planaire  $\mathbf{T}$ .

**L'algorithme fonctionne:** Il existe  $W' \in \mathbb{X}_r$  tel que  $\tilde{d}(W', V) \leq \frac{w}{r}$ , ainsi

$$\tilde{d}(W, V) \leq \tilde{d}(W, W') + \tilde{d}(W', V) \leq \frac{1}{2n} + \frac{w}{r} \leq \frac{1}{n}$$

# Réalisation d'un pavage planaire calculable $3 \rightarrow 2$ avec des règles locales

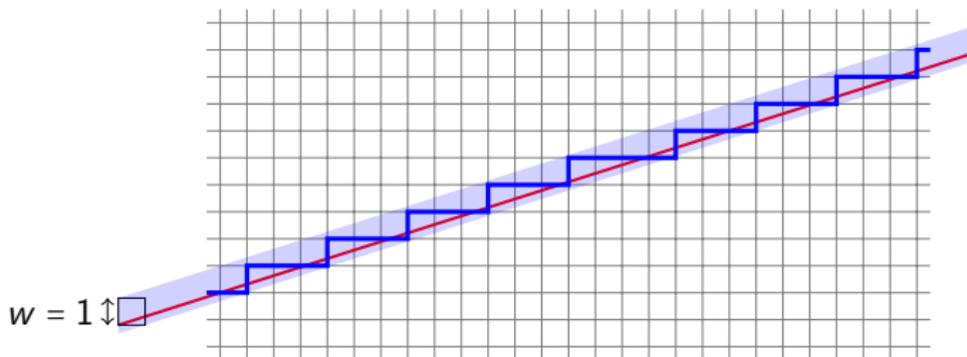
# Mots Quasi-Sturmien

► On définit le *mot sturmien*  $s_{\rho,\alpha} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  de pente  $\alpha \in [0,1]$  et d'origine  $\rho$  par

$$s_{\rho,\alpha}(n) = 0 \Leftrightarrow (\rho + n\alpha) \bmod 1 \in [0, 1 - \alpha).$$

► Pour  $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  on définit  $d(x, y) := \sup_{p \leq q} ||x_p x_{p+1} \dots x_q|_0 - |y_p y_{p+1} \dots y_q|_0|$ .

**Fact:** Deux mots sturmiens de même pente sont à distance au plus égal à 1



$s_{\rho,\alpha}$ : ...0010001000100010001000010001000100010...

# Mots Quasi-Sturmien

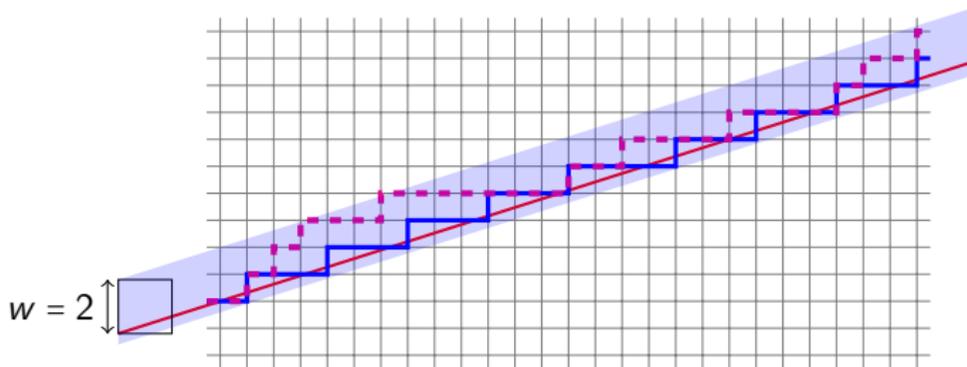
► On définit le *mot sturmien*  $s_{\rho,\alpha} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  de pente  $\alpha \in [0,1]$  et d'origine  $\rho$  par

$$s_{\rho,\alpha}(n) = 0 \Leftrightarrow (\rho + n\alpha) \bmod 1 \in [0, 1 - \alpha).$$

► Pour  $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  on définit  $d(x, y) := \sup_{p \leq q} ||x_p x_{p+1} \dots x_q|_0 - |y_p y_{p+1} \dots y_q|_0|$ .

**Fact:** Deux mots sturmiens de même pente sont à distance au plus égal à 1

►  $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  est un *mot quasi-sturmien de pente  $\alpha$*  si  $d(x, s_{\rho,\alpha}) \leq 1$ .



$s_{\rho,\alpha}$ :    ... 0010001000100010001000010001000100010 ...  
 Quasi-Sturmian: ... 00101010000100000001001000001001001010 ...



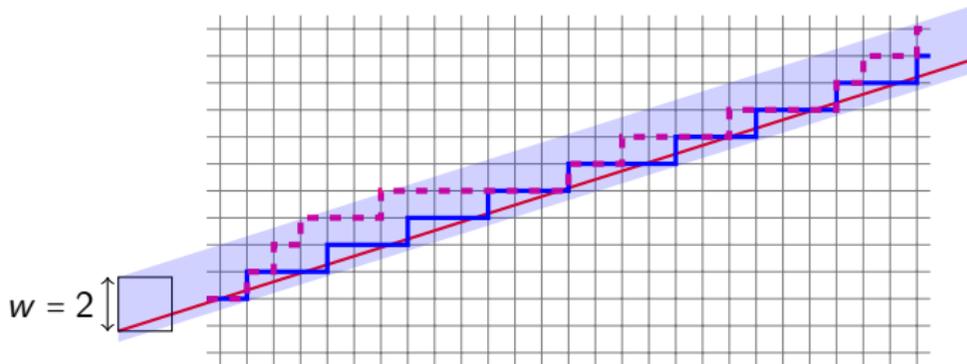
# Mots Quasi-Sturmien

► On définit le *mot sturmien*  $s_{\rho,\alpha} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  de pente  $\alpha \in [0,1]$  et d'origine  $\rho$  par

$$s_{\rho,\alpha}(n) = 0 \Leftrightarrow (\rho + n\alpha) \bmod 1 \in [0, 1 - \alpha).$$

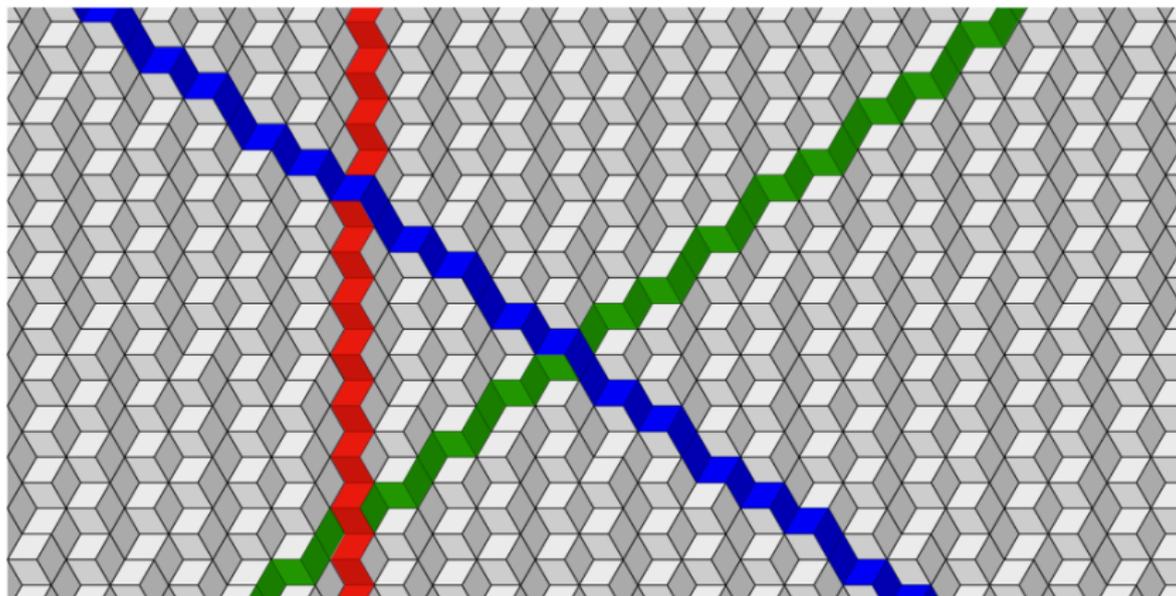
►  $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  est un *mot quasi-sturmien de pente  $\alpha$*  si  $d(x, s_{\rho,\alpha}) \leq 1$ .

**Fact:**  $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  vérifient  $d(x, y) \leq 1$  si et seulement si on peut obtenir  $x$  en modifiant  $y$  par les remplacements de lettres  $0 \rightarrow 1$  ou  $1 \rightarrow 0$ , de tel sorte qu'il y ait une alternance des types de remplacement.



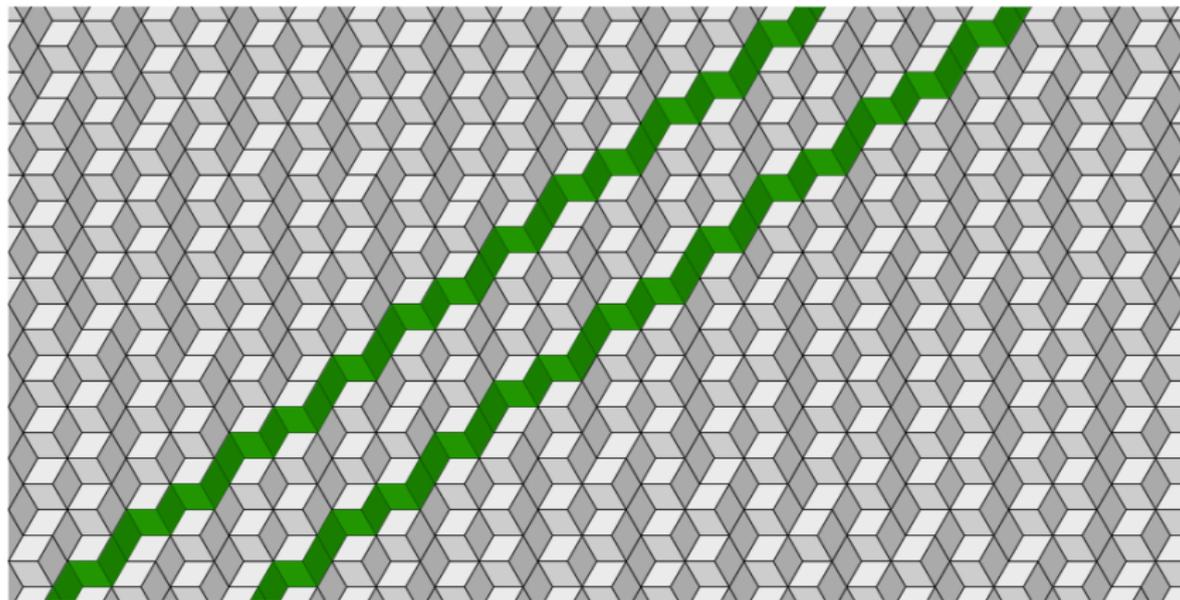
$s_{\rho,\alpha}$ :    ... 00100010001000100010001000100010001000100010 ...  
 Quasi-Sturmien: ... 0010101010001000000010010000100010001001010 ...  
 Coding:    ... 00000111111111100000001100010001000100111 ...

## Bandes d'un pavage planaire $3 \rightarrow 2$ parfait



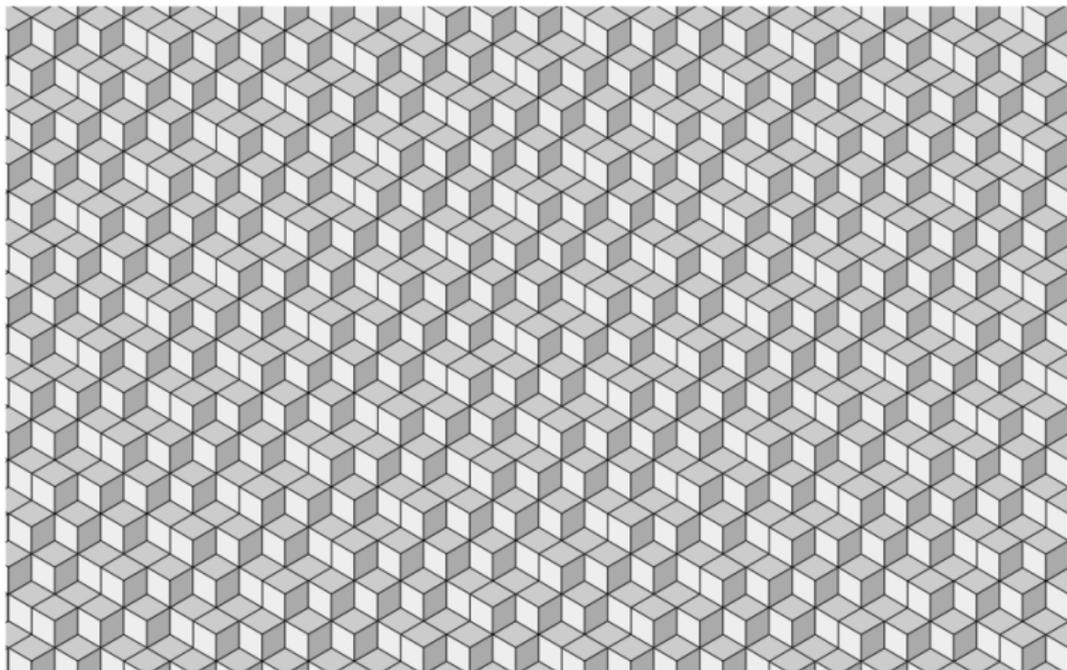
Pour un pavage  $3 \rightarrow 2$  planaire parfait, il y a des bandes codant des mots sturmiens qui se croisent.

## Bandes d'un pavage planaire 3 $\rightarrow$ 2 parfait



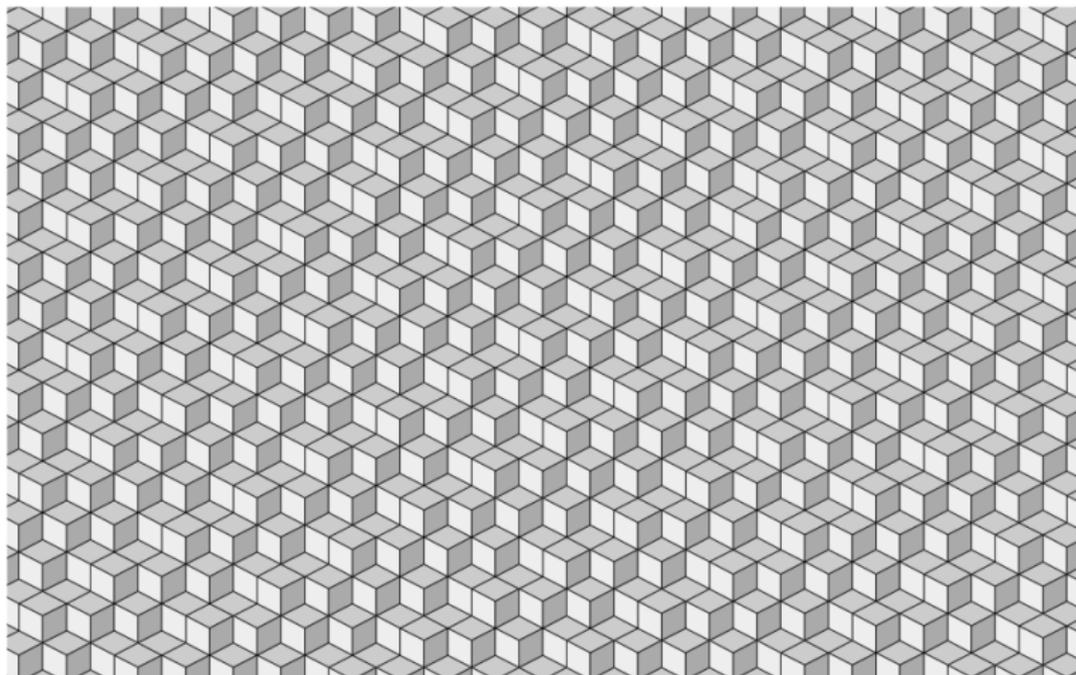
Deux lignes parallèles codent deux mots sturmiens de même pente.

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



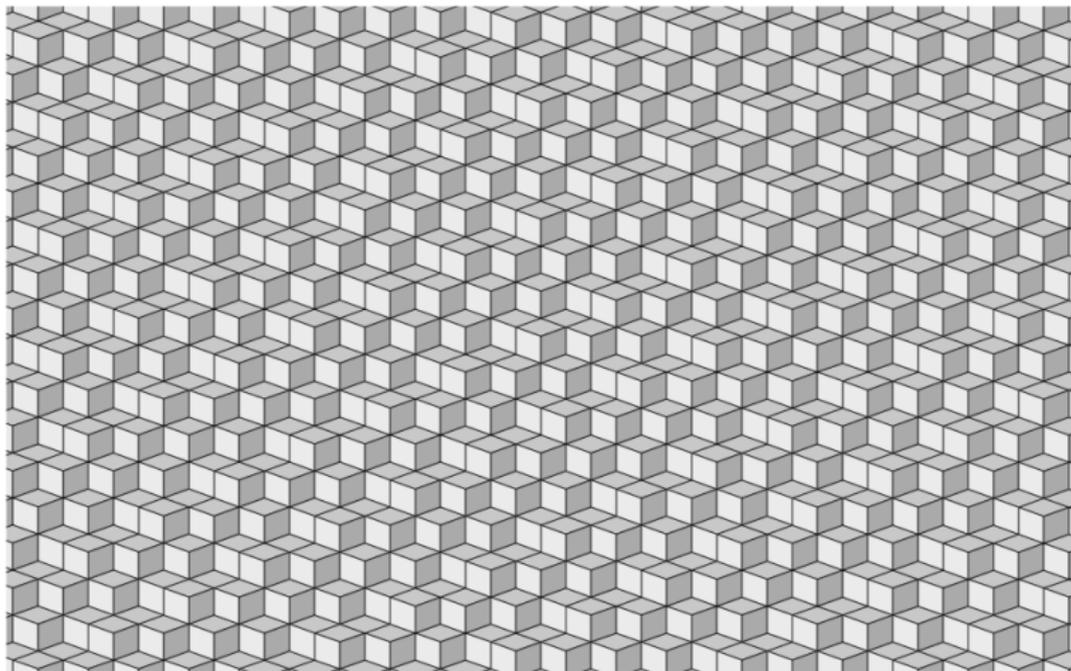
$$\mathbf{T} \quad \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot,m)} = s_{\rho,\alpha} \right\}}_{\text{Sous-shift sturmien}} \subset \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot,m)}, s_{\rho,\alpha}) \leq 1 \right\}}_{\text{Sous-shift quasi-sturmien}}$$

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



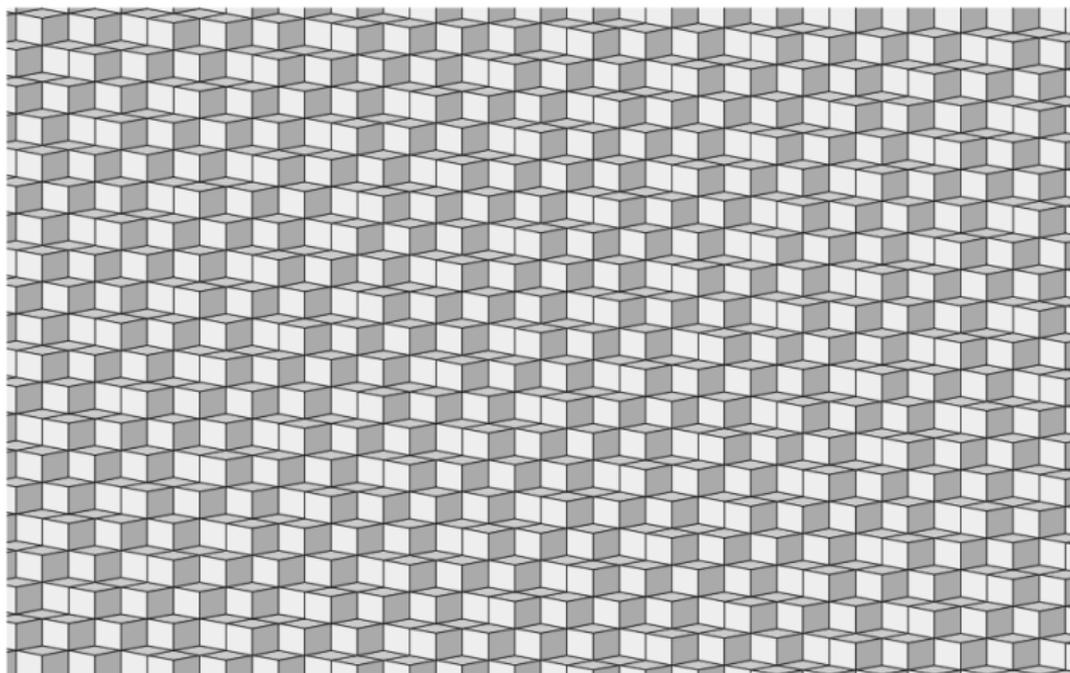
$$\mathbf{T} \quad \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot, m)} = s_{\rho, \alpha} \right\}}_{\text{Sous-shift sturmien}} \subset \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot, m)}, s_{\rho, \alpha}) \leq 1 \right\}}_{\text{Sous-shift quasi-sturmien}}$$

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



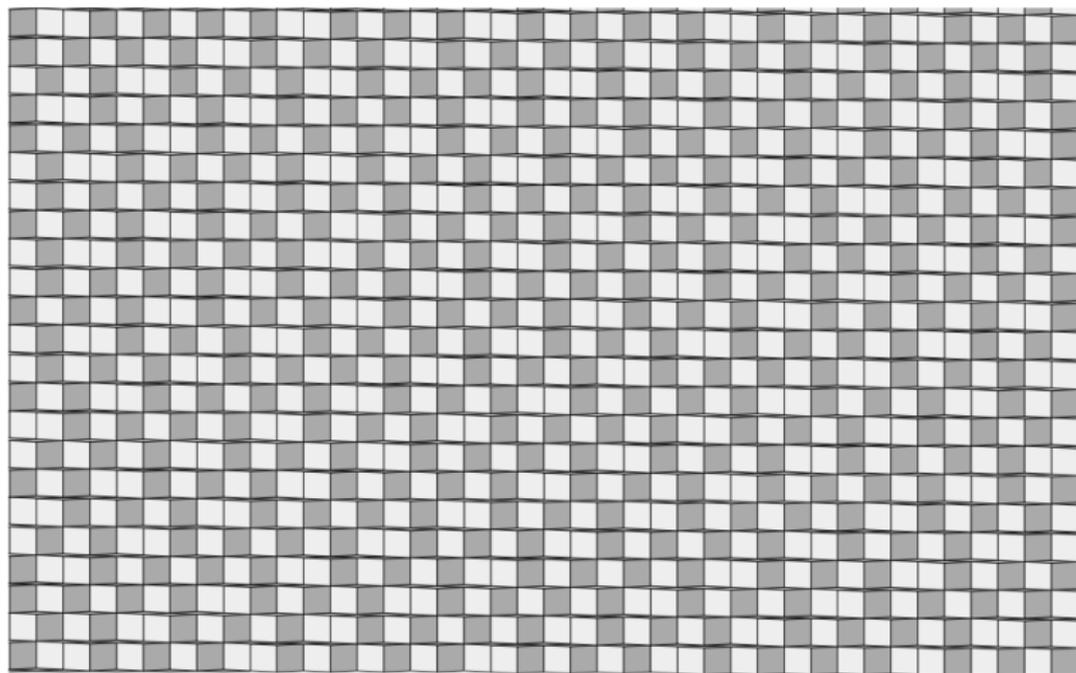
$$\mathbf{T} \quad \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot,m)} = s_{\rho,\alpha} \right\}}_{\text{Sous-shift sturmien}} \subset \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot,m)}, s_{\rho,\alpha}) \leq 1 \right\}}_{\text{Sous-shift quasi-sturmien}}$$

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



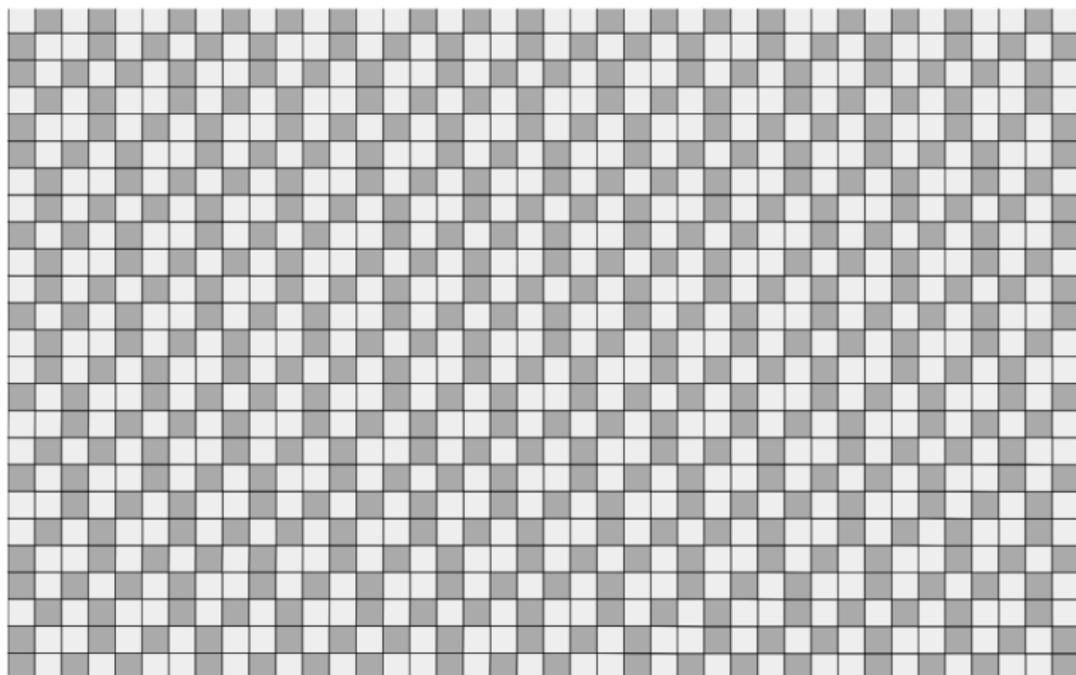
$$\mathbf{T} \quad \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot, m)} = s_{\rho, \alpha} \right\}}_{\text{Sous-shift sturmien}} \subset \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot, m)}, s_{\rho, \alpha}) \leq 1 \right\}}_{\text{Sous-shift quasi-sturmien}}$$

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



$$\mathbf{T} \quad \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot, m)} = s_{\rho, \alpha} \right\}}_{\text{Sous-shift sturmien}} \subset \underbrace{\left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot, m)}, s_{\rho, \alpha}) \leq 1 \right\}}_{\text{Sous-shift quasi-sturmien}}$$

# D'un plan discret $3 \rightarrow 2$ vers un sous-shift quasi-Sturmian



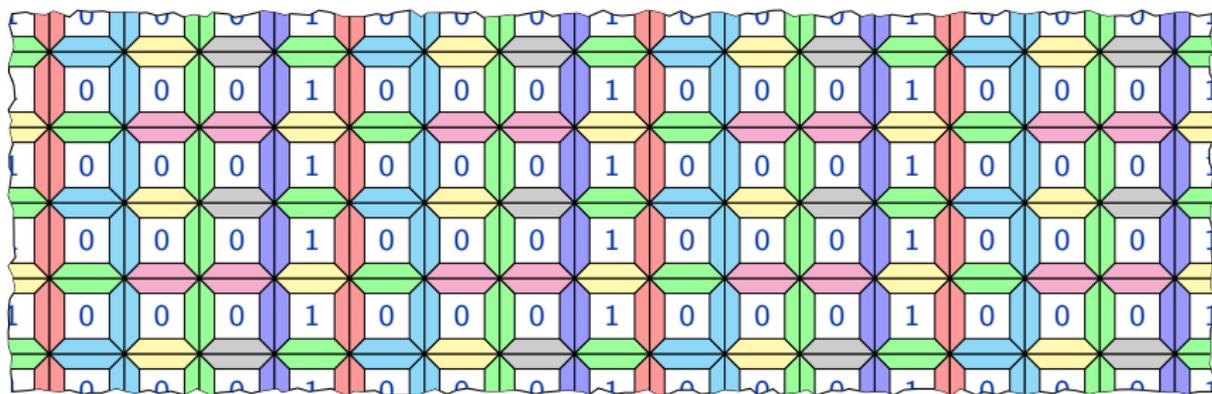
$$\mathbf{T} \quad \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \exists \rho \ x_{(\cdot,m)} = s_{\rho,\alpha} \right\} \subset \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall m \ d(x_{(\cdot,m)}, s_{\rho,\alpha}) \leq 1 \right\}$$

Sous-shift sturmien Sous-shift quasi-sturmien

## Le sous-shift quasi-sturmien de pente $\alpha$ est sofique

Si  $\alpha$  est calculable alors  $\{s_{\alpha,\rho} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \rho \in \mathbb{R}\}$  est un sous-shift effectif. Ainsi il existe un SFT  $\mathbf{T}_{\{0,1\} \times \mathcal{B}, \mathcal{F}} \subset (\{0,1\} \times \mathcal{B})^{\mathbb{Z}^2}$  tel que:

$$\pi_1(\mathbf{T}_{\{0,1\} \times \mathcal{B}, \mathcal{F}}) = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}, \exists \rho \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, w_{\cdot, m} = s_{\alpha, \rho} \right\}.$$

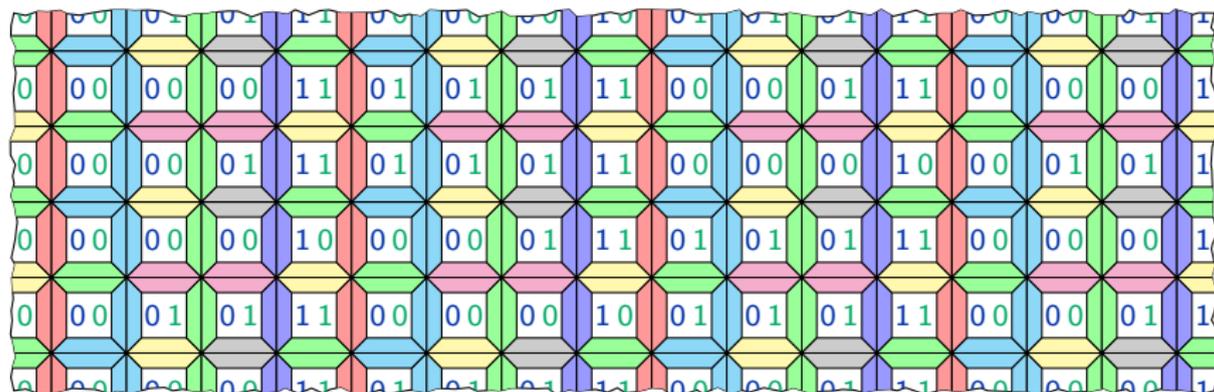


Chaque ligne est le même mot sturmien  $s_{\alpha,\rho}$

# Le sous-shift quasi-sturmien de pente $\alpha$ est sofique

On considère SFT  $\tilde{Q}_\alpha \subset (\{0,1\} \times \mathcal{B} \times \{0,1\})^{\mathbb{Z}^2}$  tel que:

$$x \in \tilde{Q}_\alpha \iff \begin{cases} \pi_{12}(x) \in \mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}, \\ \pi_3(x_{m,n}) = 0 \text{ and } \pi_3(x_{m,n+1}) = 1 \Rightarrow \pi_1(x_{m,n}) = 0, \\ \pi_3(x_{m,n}) = 1 \text{ and } \pi_3(x_{m,n+1}) = 0 \Rightarrow \pi_1(x_{m,n}) = 1. \end{cases}$$

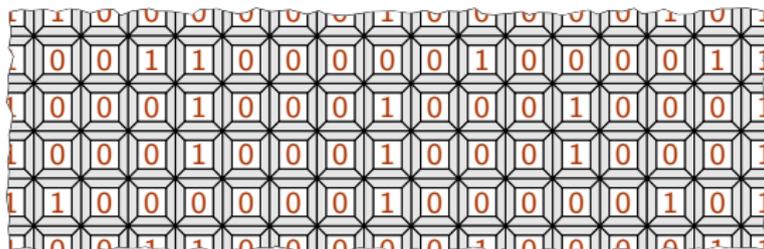
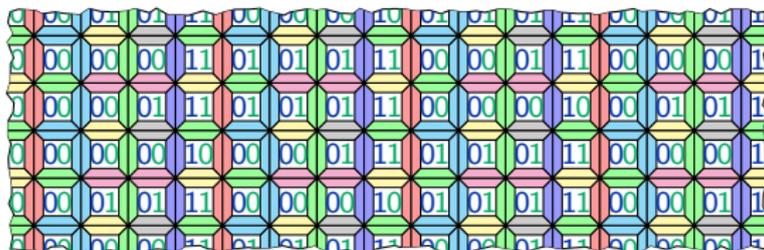


Sur chaque ligne on rajoute un codage valide de manière indépendante.

## Le sous-shift quasi-sturmien de pente $\alpha$ est sofique

On définit  $\pi(x)_{m,n} = \begin{cases} \pi_1(x_{m,n}) & \text{si } \pi_3(x_{m,n}) = \pi_3(x_{m,n+1}), \\ 1 - \pi_1(x_{m,n}) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$

$$\pi(\tilde{Q}_\alpha) = Q_\alpha = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}, \forall m \in \mathbb{Z}, d(x_{(\cdot,m)}, s_{\alpha,0}) \leq 1 \right\}$$

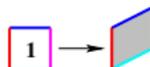
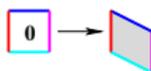
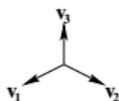


Après projection du facteur  $\pi$ , chaque ligne est un mot quasi-sturmien

# Transformation de tuiles de $\tilde{Q}_\alpha$ en tuiles $3 \rightarrow 2$

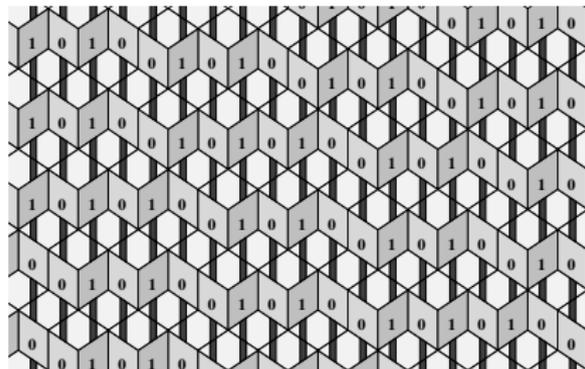
Chaque tuile de  $\tilde{Q}_\alpha$  peut être vu comme un tuile de Wang.

On construit l'ensemble  $\tau_{\alpha}^{\vec{v}_3}$  de tiles  $3 \rightarrow 2$  coloriées de la manière suivante:



```

                                0 1 0 1 0
1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0
1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0
1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0
0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0
    
```

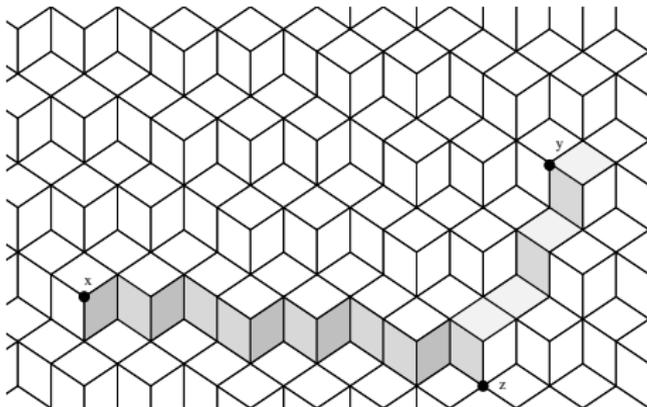


On appelle  $\vec{v}_j$ -*bande* d'un pavage  $3 \rightarrow 2$  une suite de tuiles adjacentes suivant l'arrête  $\vec{v}_j$ .

Ainsi,  $\tau_{\alpha}^{\vec{v}_3}$  force exactement des  $\vec{v}_3$ -bandes de pente  $\alpha$ .

## Épaisseur d'un pavage planaire

Comme précédemment, on construit les jeux de tuiles  $\tau_{\beta}^{\vec{v}_2}$  et  $\tau_{\alpha/\beta}^{\vec{v}_1}$  et on considère le pavage  $3 \rightarrow 2$  formé avec  $\tau_{1,\alpha,\beta} = \tau_{\alpha/\beta}^{\vec{v}_1} \times \tau_{\beta}^{\vec{v}_2} \times \tau_{\alpha}^{\vec{v}_3}$ .



Deux sommets de ce pavage sont reliés par un chemin formé par deux de ces bandes: on a donc un pavage planaire de pente orthogonale à  $(1, \alpha, \beta)$  et d'épaisseur au plus 3.

### Théorème (Fernique & S.)

Un espace vectoriel  $V$  de dimension  $d$  avec  $n > d$  admet des règles locales faibles colorées  $n \rightarrow d$  (d'épaisseur 3) si et seulement si il est calculable.

# Comment supprimé les couleurs?

Étant donné une pente, il est possible de substitué chaque tuile par une "meta" tuile arbitrairement large. Ainsi les décorations peuvent être codé par des fluctuation et l'épaisseur n'augmente pas plus de 1.

## Théorème (*Fernique & S.*)

Un espace vectoriel  $V$  de dimension  $d$  avec  $n > d$  admet des règles locale  $n \rightarrow d$  si et seulement si il est calculable.

# Entropie

# Cas de la dimension 1

## Théorème (*Lind 1984*)

$$\left\{ h(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ SFT} \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \log(\alpha) : p, q \in \mathbb{N}, \alpha \text{ Nombre de Perron} \right\}$$

Nombre de Perron: Nombre algébrique plus grand que le module de ses conjugués.

## Résultat en dimension supérieure

Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble fini de motifs et  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ .

- Un motif  $u$  est *localement admissible* si aucun motif de  $\mathcal{F}$  n'apparaît dans  $u$ .  
On note  $\tilde{N}_n(\mathcal{F}) = \text{Card}\{u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^d} : u \text{ localement admissible}\}$
- Un motif  $u$  est *globalement admissible* si  $\exists x \in \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$  tel que  $u \sqsubset x$ . On note  $N_n(\mathbf{T}) = \text{Card}\{u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^d} : u \text{ globalement admissible}\}$

On a  $N_n(\mathbf{T}) \leq \tilde{N}_n(\mathcal{F})$ .

On rappelle que

$$h(\mathbf{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_n(\mathcal{F}))}{n^d} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log(N_n(\mathcal{F}))}{n^d}$$

### Théorème (Hochman-Meyerovitch, 2007)

Pour  $d \geq 2$ , on a

$$\left\{ h(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ SFT} \right\} = \left\{ \alpha : \exists (\alpha_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \text{ \textit{récursive} telle que } \alpha = \inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \right\}$$

## Barrière liée à la calculabilité

**Fact:**  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{N_n(\mathcal{F})}{n^d} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\tilde{N}_n(\mathcal{F})}{n^d}$

On fixe  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $u \in \mathcal{A}^{[0, n_0-1]^d}$  localement admissible non globalement admissible, il existe  $K(u)$  tel que  $u$  ne peut pas être étendu en un motif de  $[-K(u), K(u)]^d$ . On pose:

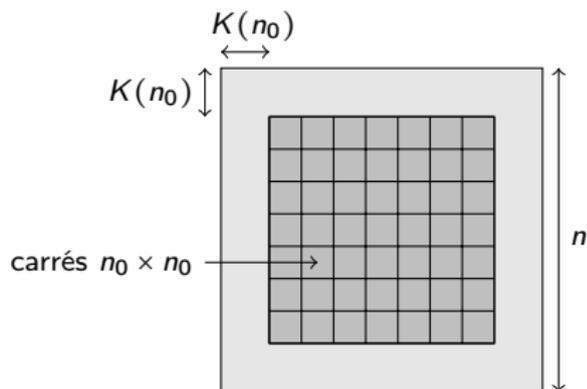
$K(n_0) = \max\{K(u) : u \in \mathcal{A}^{[0, n_0-1]^d} \text{ est localement admissible mais pas globalement}\}$

# Barrière liée à la calculabilité

**Fact:**  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{N_n(\mathcal{F})}{n^d} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\tilde{N}_n(\mathcal{F})}{n^d}$

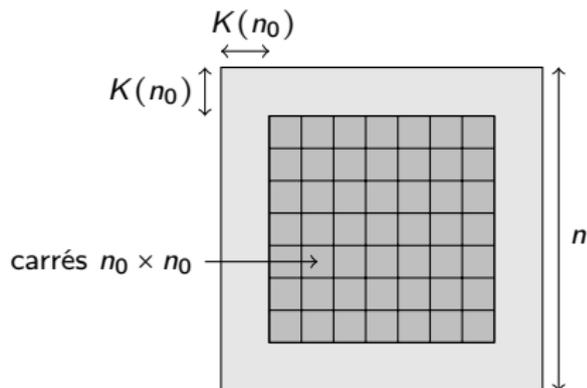
On fixe  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $u \in \mathcal{A}^{[0, n_0-1]^d}$  localement admissible non globalement admissible, il existe  $K(u)$  tel que  $u$  ne peut pas être étendu en un motif de  $[-K(u), K(u)]^d$ . On pose:

$K(n_0) = \max\{K(u) : u \in \mathcal{A}^{[0, n_0-1]^d} \text{ est localement admissible mais pas globalement}\}$



- On divise  $[0, n-1]^2$  en carré de taille  $n_0 \times n_0$  en laissant une marge de  $K(n_0)$  sur le bord.
- aire de la bande:  $n^2 - (n - 2K(n_0))^2$
- Il y a  $\frac{(n-4K(n_0))^2}{n_0^2}$  carrés dans le quadrillage.
- Chaque carré du quadrillage est contenu dans un motif de côté  $2K(n_0) + 1$  donc ils sont globalement admissibles.

## Barrière liée à la calculabilité



- On divise  $[0, n - 1]^2$  en carré de taille  $n_0 \times n_0$  en laissant une marge de  $K(n_0)$  sur le bord.
- aire de la bande:  $n^2 - (n - 2K(n_0))^2$
- Il y a  $\frac{(n - 2K(n_0))^2}{n_0^2}$  carrés dans le quadrillage.
- Chaque carré du quadrillage est contenu dans un motif de coté  $2K(n_0) + 1$  donc ils sont globalement admissible.

On a  $\tilde{N}_n(\mathcal{F}) \leq |\mathcal{A}|^{n^2 - (n - 2K(n_0))^2} \times N_{n_0}(\mathbf{T})^{\frac{(n - 2K(n_0))^2}{n_0^2}}$  d'ou:

$$\frac{1}{n^2} \log(\tilde{N}_n(\mathcal{F})) \leq \frac{4K(n_0)n - 4K(n_0)^2}{n^2} \log(|\mathcal{A}|) + \frac{(n - 2K(n_0))^2}{n^2 n_0^2} \log(N_{n_0}(\mathbf{T}))$$

Par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log(\tilde{N}_n(\mathcal{F}))}{n^2} \leq \frac{\log(N_{n_0}(\mathbf{T}))}{n_0^2}$ .

Comme d'autre part  $\tilde{N}_n(\mathcal{F}) \geq N_n(\mathbf{T})$ , on en déduit:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log(N_n(\mathcal{F}))}{n^d} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log(\tilde{N}_n(\mathcal{F}))}{n^d} \text{ et donc } h(\mathbf{T}) \text{ est un inf d'une suite calculable}$$

## Réalisation

Pour  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$  et  $u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^2}$ , on note  $\#(\mathcal{A}_0 : u) = \text{Card}\{n \in \mathbb{Z}^2 : u_n \in \mathcal{A}_0\}$ .

Pour  $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ , on définit la *densité supérieure* de  $\mathcal{A}_0$  dans  $\mathbf{T}$  par:

$$\delta(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T}) \quad \text{où} \quad \delta_n(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T}) = \frac{\max\{\#(\mathcal{A}_0 : x_{[0, n-1]^2}) : x \in \mathbf{T}\}}{n^2}$$

### Lemme

Supposons qu'il existe  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, 2, \mathcal{F})$  SFT tel que  $h(\mathbf{T}) = 0$ , alors pour  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$  il existe un SFT  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'(\mathcal{A}', 2, \mathcal{F}')$  tel que  $h(\mathbf{T}') = \log(2)\delta(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T})$ .

On pose  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times \{0, 1\}$  et  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{(a, b) : a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0 \text{ et } b = 1\}$ .

Si un motif  $u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^2}$  est globalement admissible pour  $\mathbf{T}$  alors le nombre de motif  $\{u\} \times \{0, 1\}^{[0, n-1]^2}$  globalement admissible pour  $\mathbf{T}'$  est  $2^{n^2 \times \delta_n(\mathcal{A}_0 : u)}$ . On a donc

$$2^{n^2 \times \delta_n(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T})} \leq N_n(\mathbf{T}') \leq N_n(\mathbf{T}) 2^{n^2 \times \delta_n(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T})}$$

$$\text{lorsque } n \rightarrow \infty : \log(2)\delta(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T}) \leq h(\mathbf{T}') \leq h(\mathbf{T}) + \log(2)\delta(\mathcal{A}_0 : \mathbf{T})$$

# Réalisation

Soit  $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} \in [0, 1]$  une suite décroissante de rationnel énuméré par une machine de Turing.

On considère l'ensemble récursivement énumérable suivant:

$$\mathcal{F} = \bigcup_n \{u \in \{0, 1\}^{q_n} : \#(1 : u) > p_n\}$$

Ainsi il existe un SFT  $\mathbf{T}_{\text{Final}} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^2}$  et un facteur lettre à lettre  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \{0, 1\}$  tel que  $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \mathcal{F})$  est la sous-action de  $\pi(\mathbf{T}_{\text{Final}})$ . De plus

$$\delta(\pi^{-1}(\{1\}) : \mathbf{T}_{\text{Final}}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

Il existe donc un SFT  $\mathbf{T}'_{\text{Final}}$  tel que  $h(\mathbf{T}'_{\text{Final}}) = \log(2)\alpha$ .