

Dynamiques sur l'espace des pavages

(École CYMPA Bobo-Dioulasso)

M. Sablik

LATP, Université Aix-Marseille

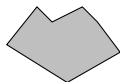
5 Novembre 2012

Notions de pavages

Tuiles

Une *tuile* est une sous ensemble de \mathbb{R}^d homéomorphe à une boule.

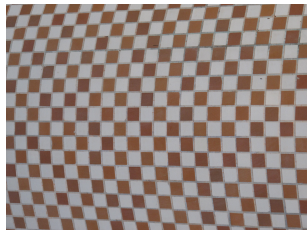
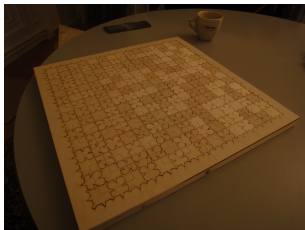
Exemples de tuiles:



Pavages

Un *pavage* de \mathbb{R}^d est une famille de tuiles $t = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que

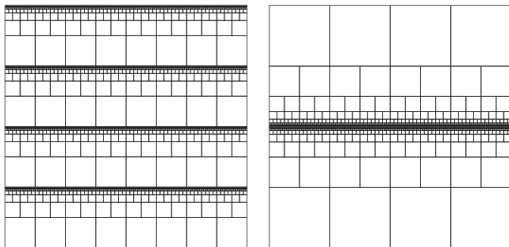
- tout point de \mathbb{R}^d appartient à une tuile,
- $t_i \cap t_j = \emptyset$ for all $i \neq j$.



Pavages

Un *pavage* de \mathbb{R}^d est une famille de tuiles $t = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que

- tout point de \mathbb{R}^d appartient à une tuile,
- $t_i \cap t_j = \emptyset$ for all $i \neq j$.

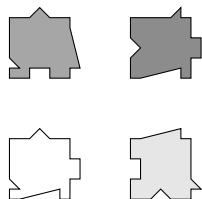


La figure de gauche est un pavage alors que la figure de droite ne l'est pas car aucune tuile ne touche la ligne horizontale centrale.

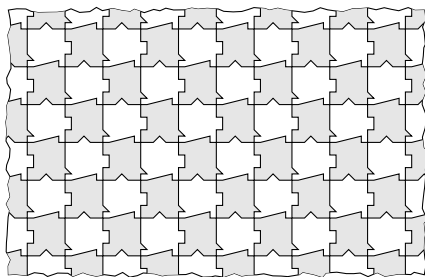
Jeu de tuiles et pavage associé

On se fixe un jeu de tuile \mathcal{P} à translation près (à isométrie près, à rotation près) et on regarde l'ensemble des pavages possibles $\mathbf{T}_{\mathcal{P}}$.

Jeu de tuiles



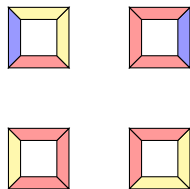
Un pavage associé



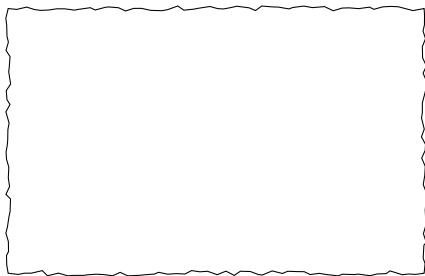
Un jeu de tuiles donné peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



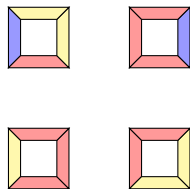
Un pavage associé



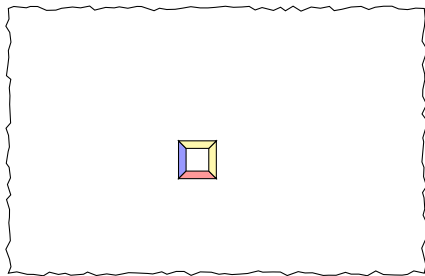
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



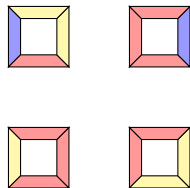
Un pavage associé



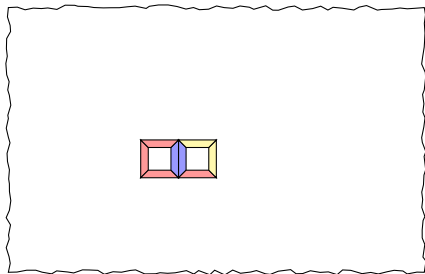
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



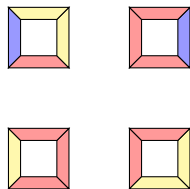
Un pavage associé



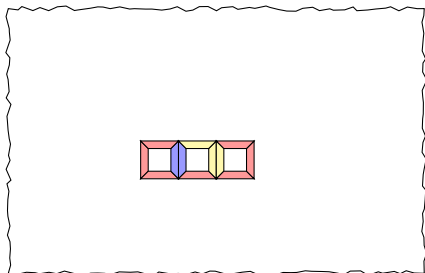
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



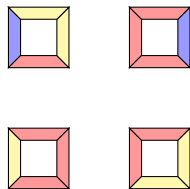
Un pavage associé



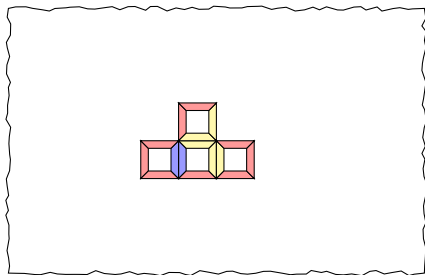
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



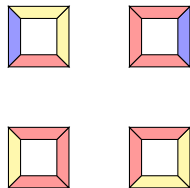
Un pavage associé



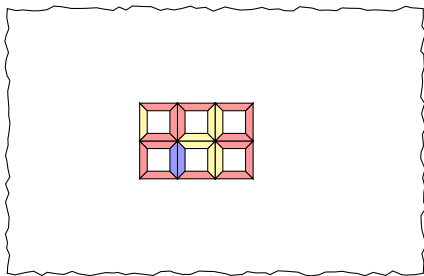
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



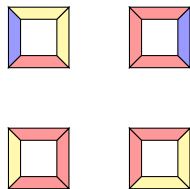
Un pavage associé



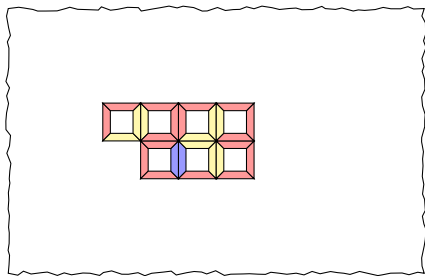
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



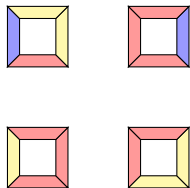
Un pavage associé



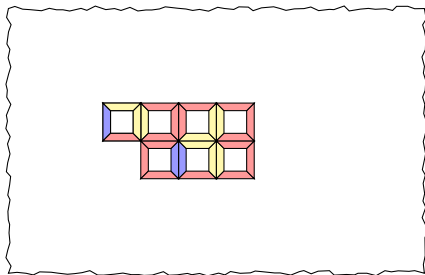
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



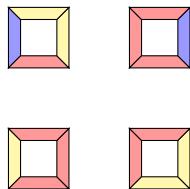
Un pavage associé



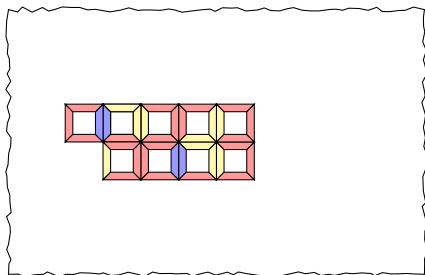
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



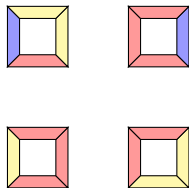
Un pavage associé



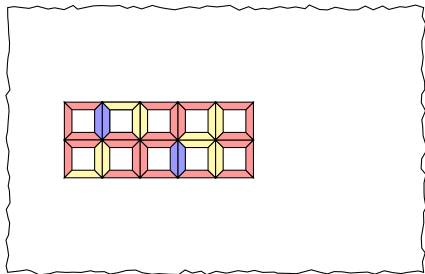
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



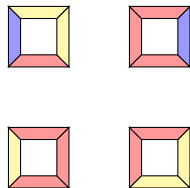
Un pavage associé



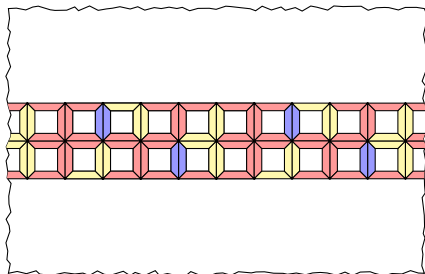
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



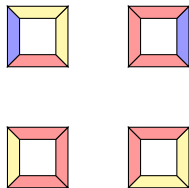
Un pavage associé



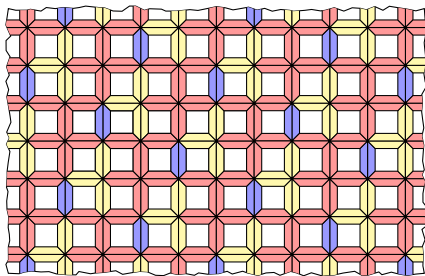
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



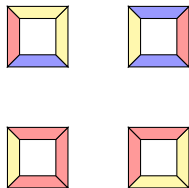
Un pavage associé



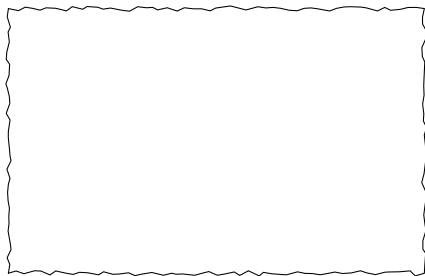
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



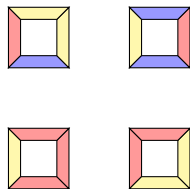
Un pavage associé



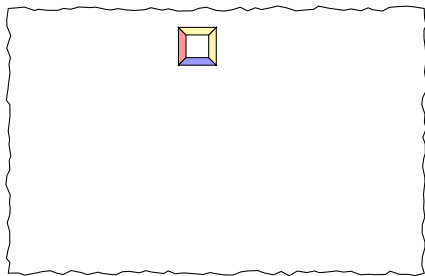
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



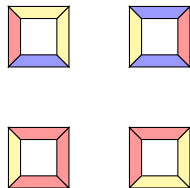
Un pavage associé



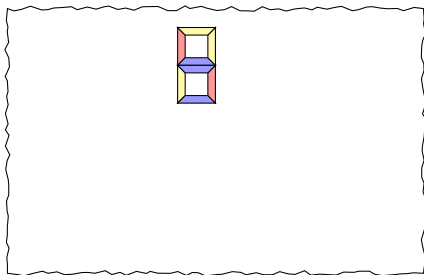
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



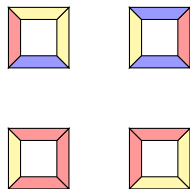
Un pavage associé



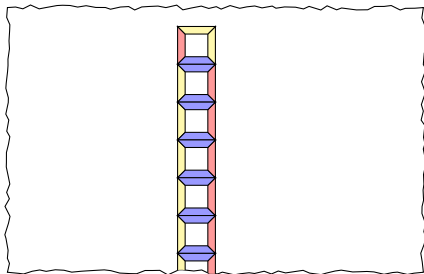
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



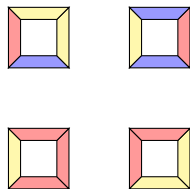
Un pavage associé



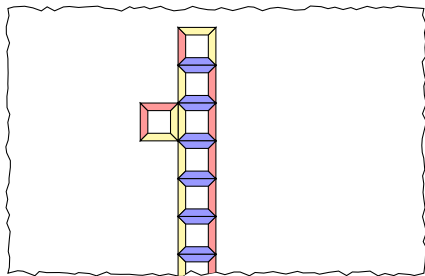
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Tuiles de Wang

Jeu de tuiles



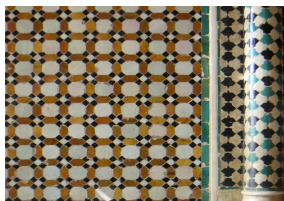
Un pavage associé



Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Pavages périodiques

Quelques pavages rencontrés à l'Alhambra de Grenade:



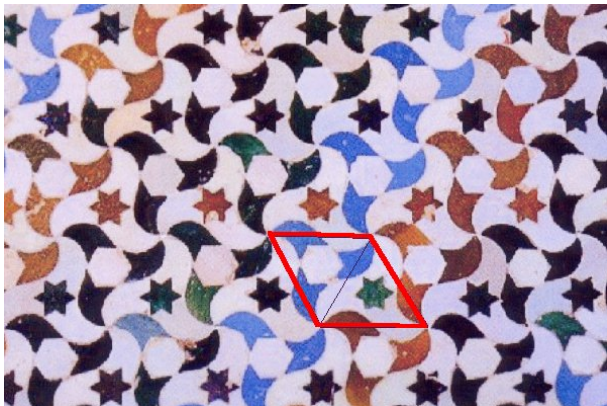
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



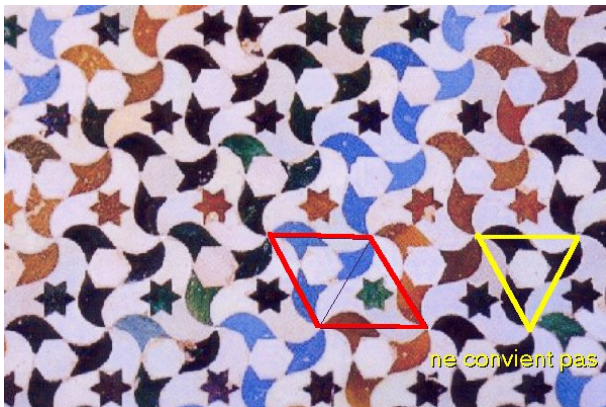
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



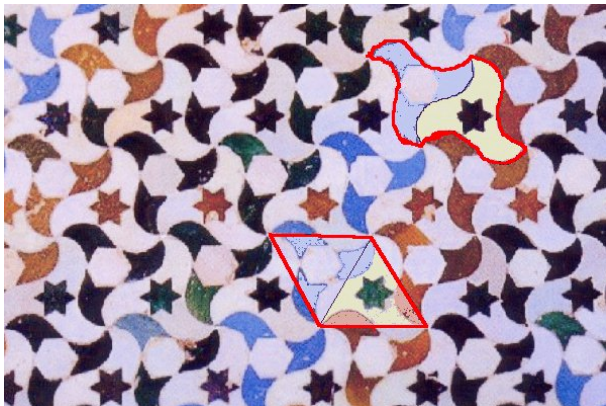
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



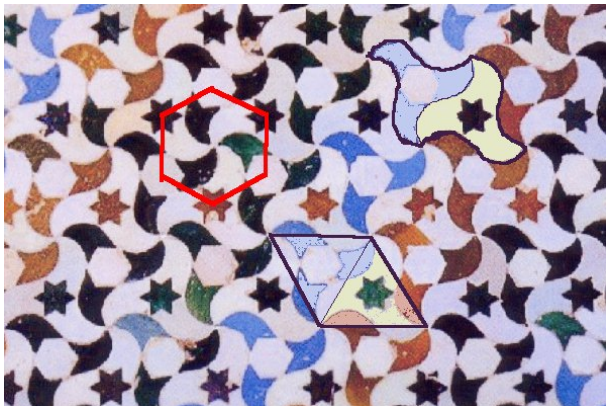
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



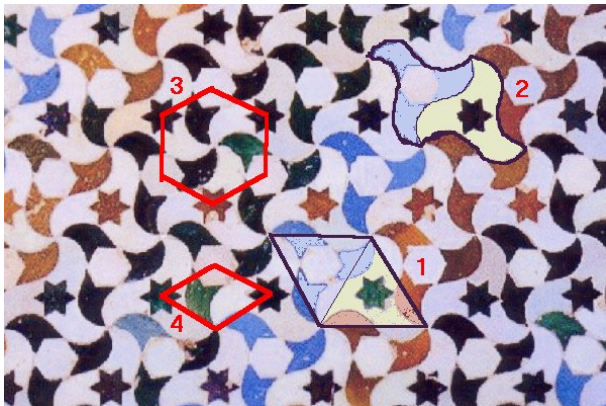
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



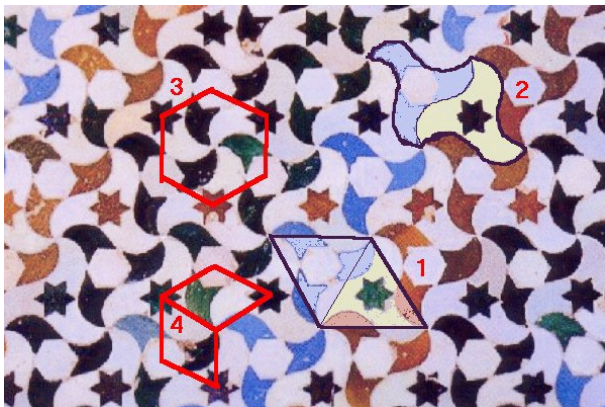
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



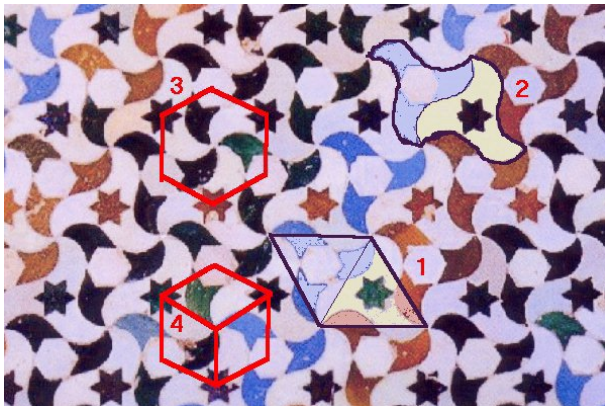
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



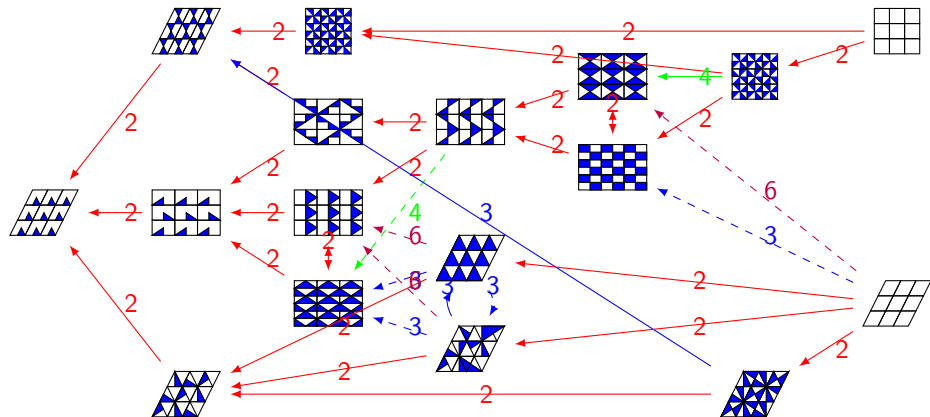
Pavages périodiques

Quel est le plus petit motif qui se répète?



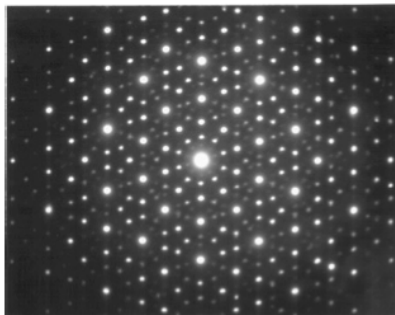
Pavages périodiques

Treillis des 17 types de pavages périodiques (*Bravais 1850, Fedorov 1891...*):



Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)



Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution



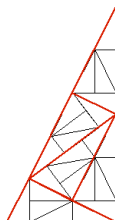
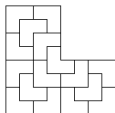
Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution



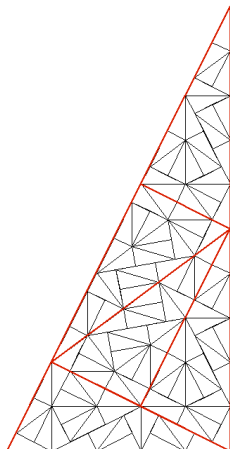
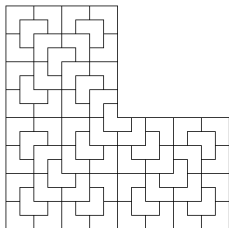
Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution



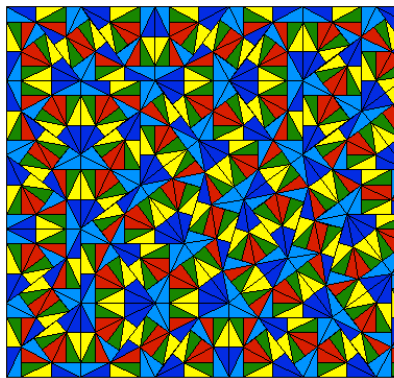
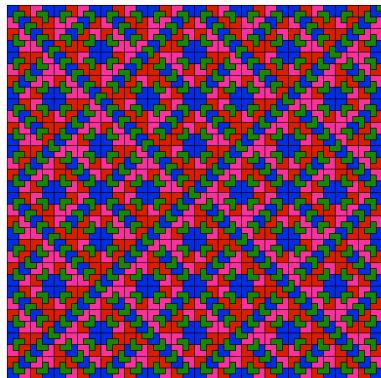
Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman*)
- Substitution



Pavages apériodiques

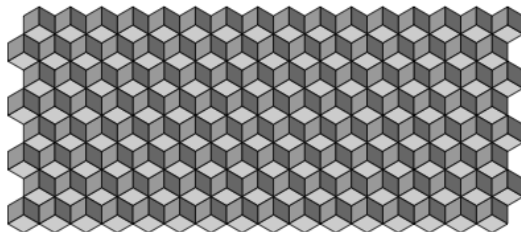
- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution



Pavages aperiodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution
- Coupé projection

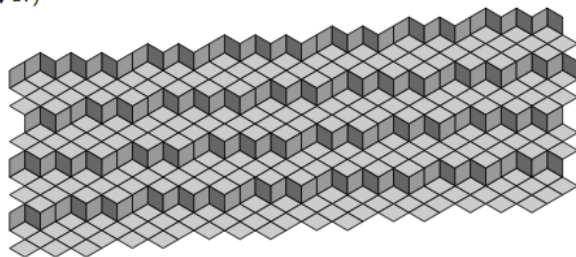
$\Gamma_{(1,1,1)}$



Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution
- Coupé projection

$$\Gamma_{(1, \sqrt{2}, \sqrt{17})}$$



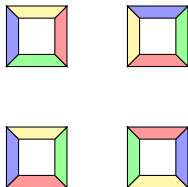
Pavages apériodiques

- Observation de quasi-cristaux (*Shechtman 1982*)
- Substitution
- Coupé projection

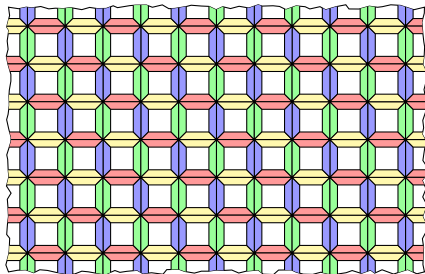
Est-il possible de définir ces pavages localement?

Règles locales

Jeu de tuiles



Un pavage associé



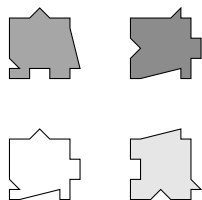
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Est ce qu'il existe un jeu de tuiles qui ne fait que des pavages apériodiques?

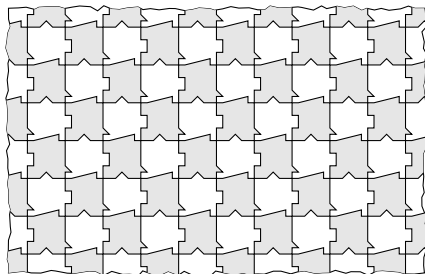
Est ce qu'il existe des coloriage pour réaliser des pavages substitutifs ou coupé projection?

Règles locales

Jeu de tuiles



Un pavage associé



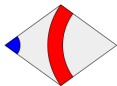
Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

Est-ce qu'il existe un jeu de tuiles qui ne fait que des pavages apériodiques?

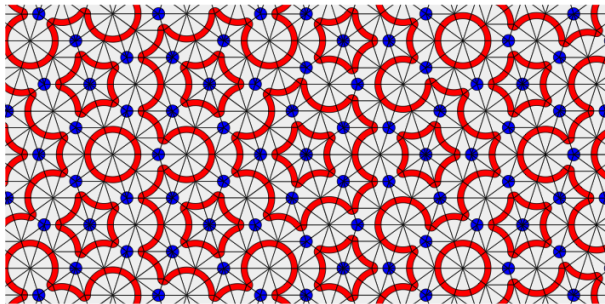
Est-ce qu'il existe des coloriations pour réaliser des pavages substitutifs ou coupé-projection?

Règles locales

Jeu de tuiles



Un pavage associé



Un jeu de tuiles peut-il paver l'espace?

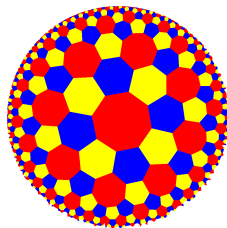
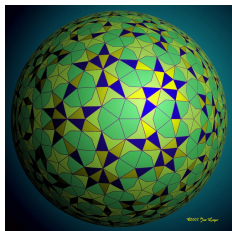
Est-ce qu'il existe un jeu de tuiles qui ne fait que des pavages apériodiques?

Est-ce qu'il existe des coloriage pour réaliser des pavages substitutifs ou coupé-projection?

Outils pour étudier ces objets

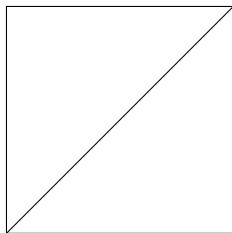
- Topologie-Géométrie

Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?



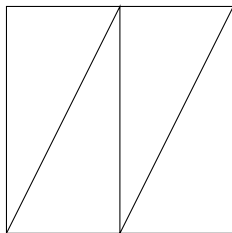
Outils pour étudier ces objets

- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?



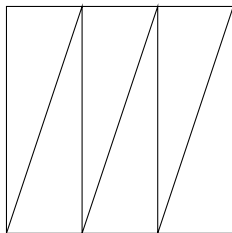
Outils pour étudier ces objets

- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?



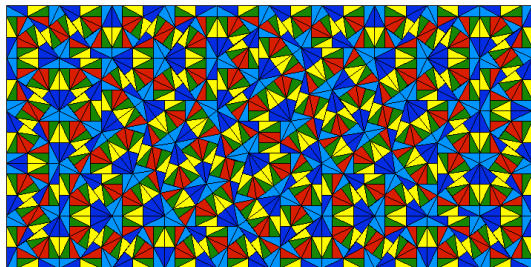
Outils pour étudier ces objets

- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?



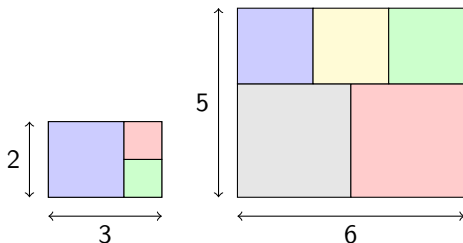
Outils pour étudier ces objets

- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?
- Système dynamique
Quelle est la fréquence d'apparition d'un motif?



Outils pour étudier ces objets

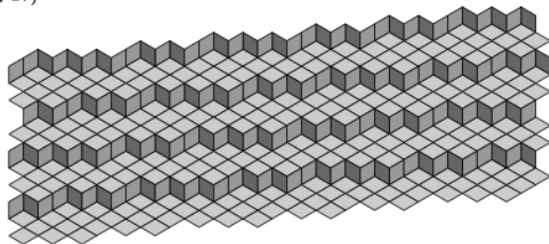
- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?
- Système dynamique
Quelle est la fréquence d'apparition d'un motif?
- Combinatoire
Nombre minimal de carrés pour paver un rectangle de taille $a \times b$?



Outils pour étudier ces objets

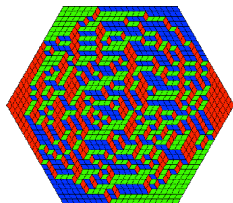
- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?
- Système dynamique
Quelle est la fréquence d'apparition d'un motif?
- Combinatoire
Nombre minimal de carrés pour paver un rectangle de taille $a \times b$?
- Notion de calculabilité
Quel plans discrets peuvent être obtenus par règles locales?

$$\Gamma_{(1, \sqrt{2}, \sqrt{17})}$$



Outils pour étudier ces objets

- Topologie-Géométrie
Quelle surface peut on paver avec un jeu de tuiles donnés?
- Algèbre
Peut-on paver un carré avec n triangles de même aire?
- Système dynamique
Quelle est la fréquence d'apparition d'un motif?
- Combinatoire
Nombre minimal de carrés pour paver un rectangle de taille $a \times b$?
- Notion de calculabilité
Quel plans discrets peuvent être obtenus par règles locales?
- Probabilité
Quel est le pavage typique lorsqu'on pave au hasard une surface fini?



Éléments de dynamique symbolique

Configuration et motifs

Soit \mathcal{A} un alphabet fini.

Un élément $x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est une *configuration*. On peut le voir comme un pavage par cubes de dimension d .

$$x = \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

Soit $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini. Un *motif* est un élément $p \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$.



Support: $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ fini

	0	1			1	1
0	1	0			1	1
1	0	1	1	0	1	
0	0	0	1			
	0	0	0			
	1	1				

$p \notin x$

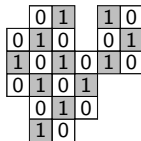
Configuration et motifs

Soit \mathcal{A} un alphabet fini.

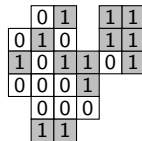
Un élément $x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est une *configuration*. On peut le voir comme un pavage par cubes de dimension d .

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

Soit $U \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini. Un *motif* est un élément $p \in \mathcal{A}^U$.



$$p \subset x$$



$$p \not\subset x$$

Langage

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ fini, on définit le langage de support \mathbb{U} :

$$\mathcal{L}_{\mathbb{U}}(\mathbf{T}) = \{p \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}} : \text{il existe } x \in \mathbf{T} \text{ tel que } p \sqsubset x\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{U}_n = [0, n-1]^d$ le *support élémentaire* ce qui permet de définir le *langage élémentaire d'ordre n*: $\mathcal{L}_n(\mathbf{T}) = \mathcal{L}_{\mathbb{U}_n}(\mathbf{T})$.

Ainsi que le *langage* de \mathbf{T} : $\mathcal{L}(\mathbf{T}) = \cup_n \mathcal{L}_n(\mathbf{T})$.

Dimension 1: Cela correspond à la notion de mots.

Dimension 2:

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}_1(\{x\}) = \{ \boxed{0}, \boxed{1} \}, \mathcal{L}_2(\{x\}) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}, \mathcal{L}_3(\{x\}) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Topologie de Cantor

- Étant donné un motif $p \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$, on définit le *cylindre* centré sur p par:

$$[p] = [p]_{\mathbb{U}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : x_{\mathbb{U}} = p\}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on note $[p]_k = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : x_{k+\mathbb{U}} = p\}$.

- L'alphabet \mathcal{A} étant fini, on peut le munir de la topologie discrète. L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est naturellement muni par la topologie produit. Une base d'ouvert pour cette topologie est formée de l'ensemble des cylindres.
- $(c^i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})^{\mathbb{N}}$ converge vers $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ si pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq k$ on ait $c_n^i = c_n$.
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est métrisable par la distance:

$$d(x, y) = 2^{-\min\{|i| : x_i \neq y_i\}} \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$$

où $|i|$ est la plus grande coordonnée du vecteur i .

Topologie de Cantor

Proposition

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est compact pour la topologie produit.

Soient $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}\right)^{\mathbb{N}}$.

On choisit les indices $i_0 < i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ inductivement de la manière suivante:

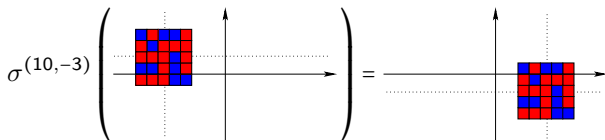
- i_0 est le plus petit entier tel que $\{i \in \mathbb{N} : x_0^i = x_0^i\}$ soit infini;
- pour tout $j \geq 1$, $i_j > i_{j-1}$ est le plus petit entier tel que:
 - ▶ $x_{[-(j-1), (j-1)]^d}^{i_j} = x_{[-(j-1), (j-1)]^d}^{i_{j-1}}$,
 - ▶ $\left\{i \in \mathbb{N} : x_{[-j, j]^d}^i = x_{[-j, j]^d}^{i_j}\right\}$ soit infini.

La suite extraite $(x^{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge.

Sous-shift

Le groupe \mathbb{Z}^d agit naturellement par le shift défini pour tout $j \in \mathbb{Z}^d$ par:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}}^j : \quad \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} &\longmapsto \sigma^j(x) = (x_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}^d}. \end{aligned}$$



Définition

Un *sous-shift* est un sous ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ stable par décalage.

Sous-shift

Le groupe \mathbb{Z}^d agit naturellement par le shift défini pour tout $j \in \mathbb{Z}^d$ par:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}}^j : \quad \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} &\longmapsto \sigma^j(x) = (x_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}^d}. \end{aligned}$$

Définition

Un *sous-shift* est un sous ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ stable par décalage.

Exemple:

Soit $x = \dots \begin{array}{ccccccc} & & & 0 \\ & & & \downarrow \\ \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \end{array} \dots \in \{ \square, \blacksquare \}^{\mathbb{Z}}$.

L'orbite $\mathcal{O}(x) = \{ \sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z} \} = \left\{ \dots \begin{array}{ccccccc} & & & -n \\ & & & \downarrow \\ \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \end{array} \dots \right\}$ est shift-invariante.

Sous-shift

Le groupe \mathbb{Z}^d agit naturellement par le shift défini pour tout $j \in \mathbb{Z}^d$ par:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}}^j : \quad \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} &\longmapsto \sigma^j(x) = (x_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}^d}. \end{aligned}$$

Définition

Un *sous-shift* est un sous ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ stable par décalage.

Exemple:

Soit $x = \dots \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \end{array} \dots \in \{ \square, \blacksquare \}^{\mathbb{Z}}$.

L'orbite $\mathcal{O}(x) = \{ \sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z} \} = \left\{ \dots \begin{array}{ccccccc} & & & -n & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \end{array} \dots \right\}$ est shift-invariante.

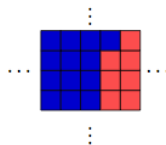
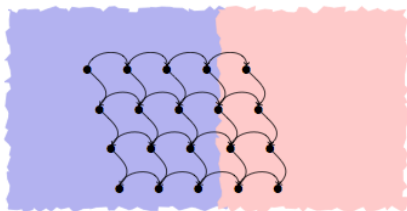
On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(x) = \dots \begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \dots$ donc $\mathcal{O}(x)$ n'est pas fermé.

Par contre $\overline{\mathcal{O}(x)} = \{ \sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \infty 0 \infty \}$ est un sous-shift.

Liens avec les systèmes dynamiques

Étant donné un système dynamique et une partition, il est possible de coder la trajectoire d'un point.

$$A = \{ \text{■} , \text{■} \}$$



Morphisme

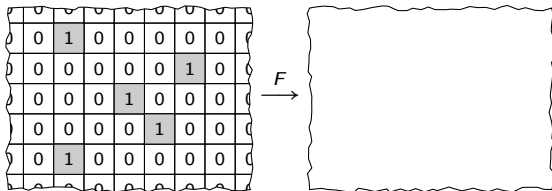
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline c & \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right) = a + b + c \pmod{2}$



Morphisme

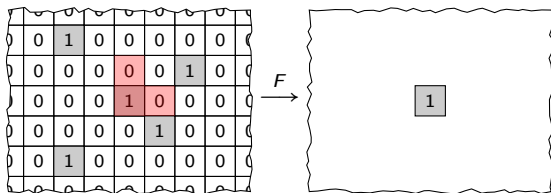
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{c|c} c & \\ \hline a & b \end{array} \right) = a + b + c \pmod 2$



Morphisme

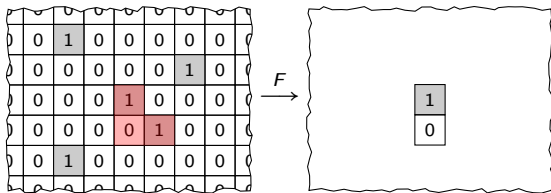
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{c|c} c & \\ \hline a & b \end{array} \right) = a + b + c \pmod 2$



Morphisme

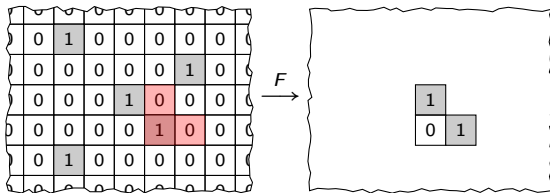
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ fini et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{c|c} c & \\ \hline a & b \end{array} \right) = a + b + c \pmod 2$



Morphisme

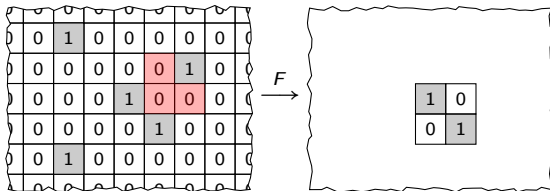
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ fini et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline c & \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \right) = a + b + c \pmod{2}$



Morphisme

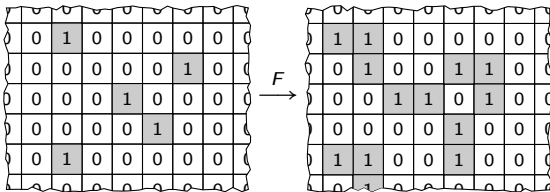
Définition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un *morphisme* si elle est continue et commute avec le shift, c'est à dire $F \circ \sigma_{\mathbf{T}}^i = \sigma_{\mathbf{T}'}^i \circ F \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Téorème (Hedlund 1969)

Une fonction $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme si et seulement si elle est définie localement, i.e. il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^d$ fini et $\bar{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $F(x)_i = \bar{F}((x_{u+i})_{u \in \mathbb{U}})$.

Soient $\mathbb{U} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ et $\bar{F} \left(\begin{array}{c|c} c & \\ \hline a & b \end{array} \right) = a + b + c \pmod 2$

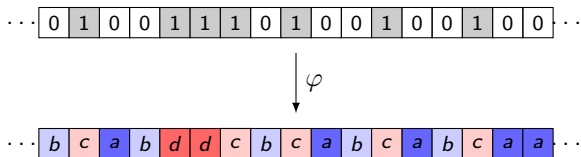


Facteur et conjugaison

- Si $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un morphisme bijectif alors φ est une *conjugaison*.
- Si $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est surjectif alors π est un *facteur*.

Exemple:

Soit $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{a, b, c, d\}^{\mathbb{Z}}$ de voisinage $\mathbb{U} = \{0, 1\}$ et $\bar{\varphi} : \begin{cases} 00 \mapsto a \\ 01 \mapsto b \\ 10 \mapsto c \\ 11 \mapsto d \end{cases}$



$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est conjugué à $\mathbf{T}(\{a, b, c, d\}, 1, \{ac, ad, ba, bb, cc, cd, da, db\})$.

Quelques classes de sous-shifts

Sous-shift défini par motif interdit

Définition

Soit \mathcal{F} un ensemble de motifs. On définit le *sous-shift des motifs interdits* \mathcal{F} sur l'alphabet \mathcal{A} par:

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : p \not\# x \text{ pour tout } p \in \mathcal{F} \right\} = \bigcap_{p \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{Z}^d} \sigma^{-i}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \setminus [p]).$$

Proposition

Un ensemble $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift si et seulement si il existe un ensemble de motifs \mathcal{F} tel que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$.

\Leftarrow $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est un sous-shift.

\Rightarrow Soit \mathbf{T} un sous-shift, on pose $\mathcal{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{\cup_n} \setminus \mathcal{L}(\mathbf{T})$.

- Si $x \in \mathbf{T}$, tout motif de x est un sous-motif de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ donc $x \in \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$.
- Si $x \in \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_{[-n, n]^d} \in \mathcal{L}(\mathbf{T})$ c'est à dire $\exists y^n \in \mathbf{T}$ tel que $x_{[-n, n]^d} = y^n_{[-n, n]^d}$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^n = x \in \mathbf{T} \quad \text{car } \mathbf{T} \text{ fermé.}$$

Sous-shift de type fini

Définition

\mathbf{T} est un *sous-shift de type fini* s'il existe un ensemble fini de motifs \mathcal{F} tel que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^d$$

Sous-shift de type fini

Définition

\mathbf{T} est un *sous-shift de type fini* s'il existe un ensemble fini de motifs \mathcal{F} tel que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^d$$

L'échiquier: Soient $\mathcal{A}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mathcal{F}_n = \left\{ \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & i \end{bmatrix} : i \in \mathcal{A}_n \right\}$ et on note

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}(\mathcal{A}_n, 2, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}^2}$$

$$\mathbf{T}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} , \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

Exemple de configurations "gelées" de \mathbf{T}_3 :

1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2

2	1	0	2	1	0
0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0
0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2

Sous-shift de type fini

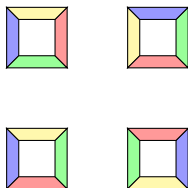
Définition

\mathbf{T} est un *sous-shift de type fini* s'il existe un ensemble fini de motifs \mathcal{F} tel que

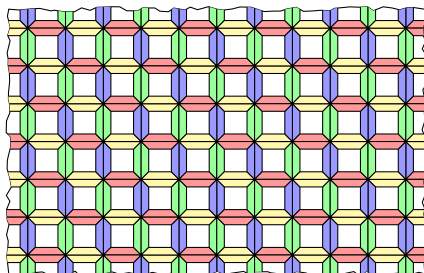
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^d$$

Tuiles de Wang:

Jeu de tuiles \mathcal{W} :



Un pavage associé:



$$\mathbf{T}_{\mathcal{W}} = \left\{ (w_n)_{n \in \mathbb{Z}^2} \in \mathcal{W}^{\mathbb{Z}^2} : w_{i,j} = w_{i+1,j} \text{ et } \underline{w_{i,j}} = \overline{w_{i,j-1}} \right\}$$

Sous-shift de type fini

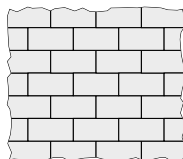
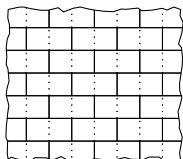
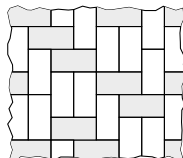
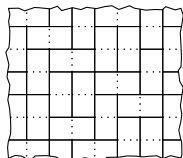
Définition

\mathbf{T} est un *sous-shift de type fini* s'il existe un ensemble fini de motifs \mathcal{F} tel que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^d$$

Domino:

$$\mathcal{T}_D = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}$$



Sous-shift de type fini

Définition

T est un *sous-shift de type fini* s'il existe un ensemble fini de motifs \mathcal{F} tel que

$$T = T(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^d$$

Sous-shift de type fini algébrique:

1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1

$$T = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2, x_{(i,j)} + x_{(i+1,j)} + x_{i,j+1} = 0 \pmod{2} \right\}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \begin{cases} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{cases}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

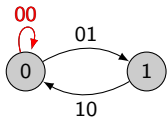
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \begin{cases} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ ((u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n) \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{cases}$$

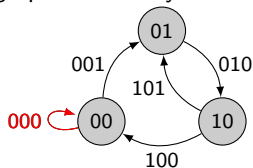
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



... $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$... $\in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



... $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$... $\in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

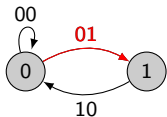
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \begin{cases} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ ((u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n) \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{cases}$$

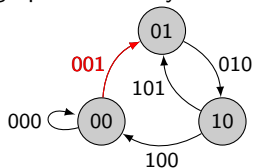
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

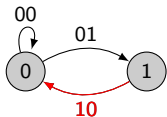
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

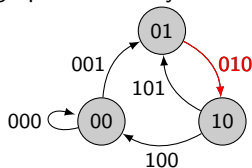
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

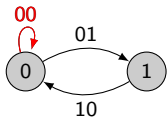
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

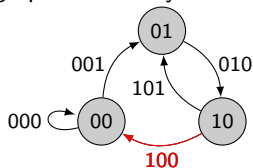
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

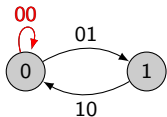
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

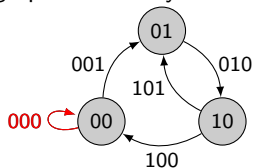
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

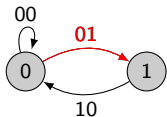
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

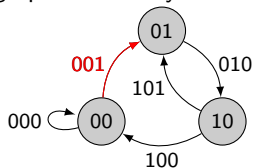
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

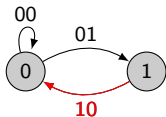
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

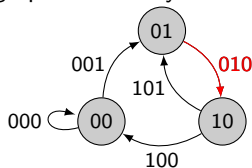
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

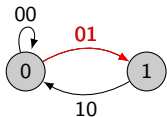
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

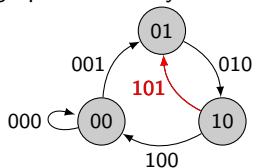
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{array} \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

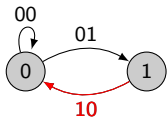
$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

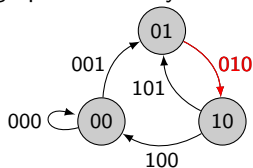
Pour $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\})$, on a:

le graphe de Rauzy d'ordre 2:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_2}$$

le graphe de Rauzy d'ordre 3:



$$\dots \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \dots \in \mathbf{T}_{\mathcal{G}_3}$$

Sous-shift de type fini (cas de la dimension 1)

- Graphe orienté: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où \mathcal{V} forme les sommets et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ les arêtes orientées noté $e = (i(e), t(e)) \in \mathcal{E}$.
- On définit le *sous-shift de type fini associé au graphe \mathcal{G}* par:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{G}} = \{e \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, t(e_i) = i(e_{i+1})\}$$

- Pour un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le *graphe de Rauzy d'ordre n*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{T}}^n = \mathcal{L}_{n-1}(\mathbf{T}) \\ (u_0 \dots u_{n-2}, v_0 \dots v_{n-2}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{T}}^n \text{ ssi } u_0 \dots u_{n-2} v_{n-2} = u_0 v_0 \dots v_{n-2} \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}) \end{array} \right.$$

Théorème

Un sous shift $\mathbf{T}(\mathcal{A}, 1, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^n$ est conjugué au sous-shift de type fini associé au graphe de Rauzy $\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n$.

La conjugaison est établit par la fonction $\varphi_n : \mathbf{T}_{\mathcal{G}_{\mathbf{T}}^n} \rightarrow \mathbf{T}$ qui à une arrête renvoi la première lettre de l'étiquette associée.

Corollaires

- ▶ En dimension 1, il est décidable de savoir si un sous-shift de type fini est vide.
- ▶ En dimension 1, tout SFT admet une configuration périodique.

Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

Si un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est conjugué à un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}, d, \mathcal{F})$ alors \mathbf{T} est un sous-shift de type fini.

Soit $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{B}, d, \mathcal{F})$ le morphisme réalisant la conjugaison. On considère $\mathcal{F}' = \{\overline{\varphi}^{-1}(p) : p \in \mathcal{F}\}$ un ensemble de motif d -dimensionnel sur \mathcal{A} . On veut montrer que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}')$. On a:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}') &\iff \varphi(x) \in \mathbf{T}(\mathcal{B}, d, \mathcal{F}) && \text{car aucun motif de } \mathcal{F} \\ & && \text{n'apparaît dans } \varphi(x) \\ &\iff x \in \mathbf{T} && \text{car } \varphi \text{ est une conjugaison.} \end{aligned}$$

Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

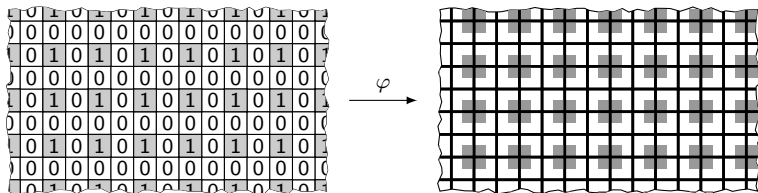
Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}, 2; \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{[0,2] \times [0,2]} \setminus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

On pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}) = \{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}$



Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

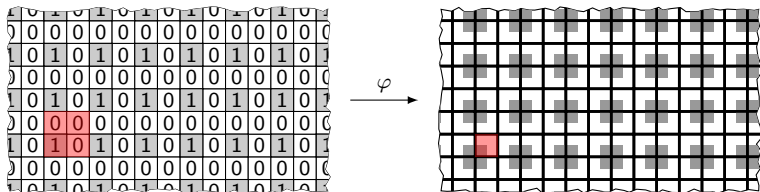
Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{ \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \end{smallmatrix} \}, 2; \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{[0,2] \times [0,2]} \setminus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

On pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}) = \{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \}$



Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

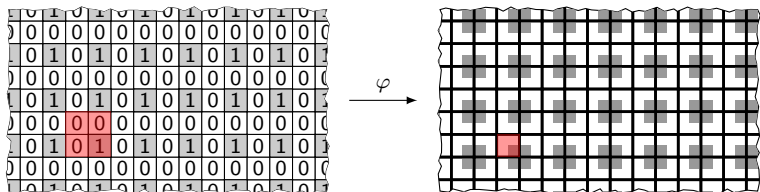
Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{ \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \end{smallmatrix} \}, 2; \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{[0,2] \times [0,2]} \setminus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

On pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}) = \{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}$



Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

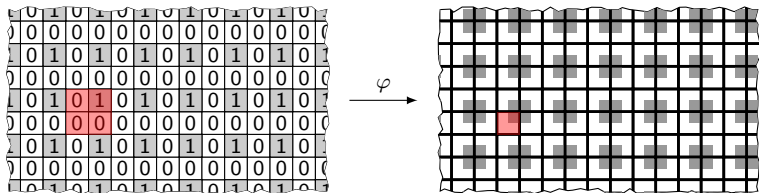
Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{ \boxed{1} \ \boxed{0} \}, 2; \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{[0,2] \times [0,2]} \setminus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

On pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}) = \{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}$



Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

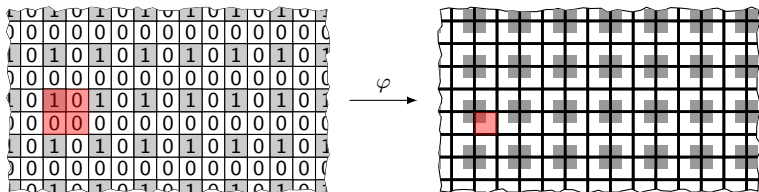
Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{ \boxed{1} \ \boxed{0} \}, 2; \mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^{[0,2] \times [0,2]} \setminus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

On pose $\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_2(\mathbf{T}) = \{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}$

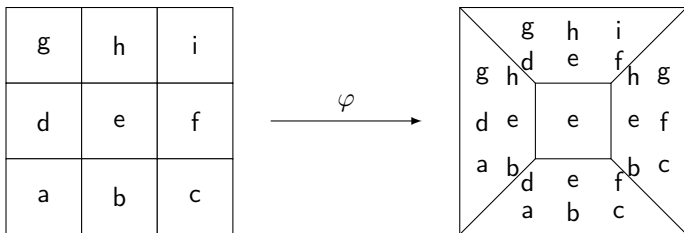


Sous-shift de type fini et conjugaison

Proposition

Tout sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ est topologiquement conjugué à :

- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_1, d, \mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{B}^{[0,1]^d}$,
- un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{B}_2, d, \mathcal{F}_2)$ formé de tuiles de Wang,



Sous-shift sofique

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1 \right\}$.

Sous-shift sofique

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{0, 1\}, d, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{[0, n]^d}$. Alors

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

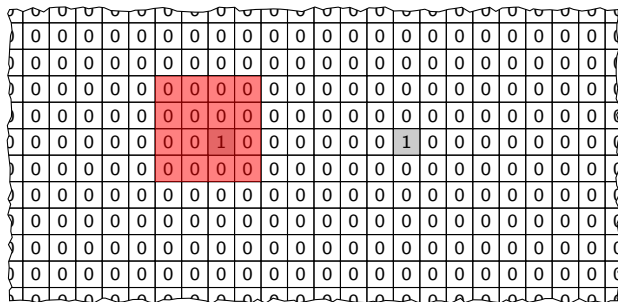
Sous-shift sofique

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{0, 1\}, d, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{[0, n]^d}$. Alors



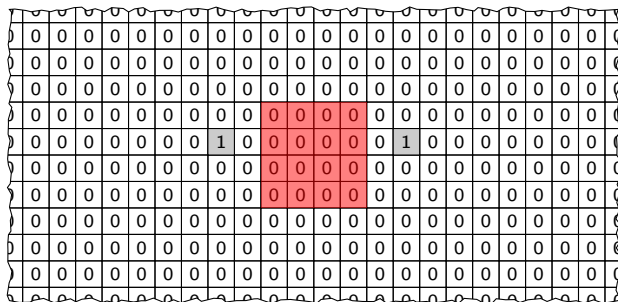
Sous-shift sofique

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{0, 1\}, d, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{[0, n]^d}$. Alors



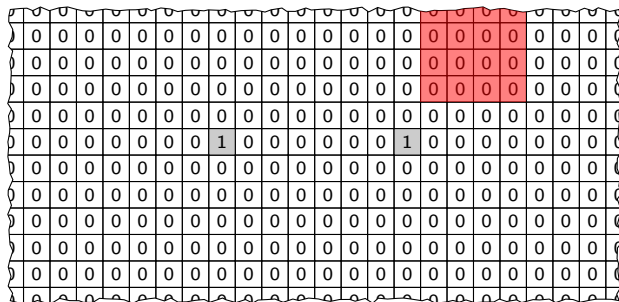
Sous-shift sofique

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\{0, 1\}, d, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{[0, n]^d}$. Alors



$\in \mathbf{T}$ contradiction!

Sous-shift sofique

Définition

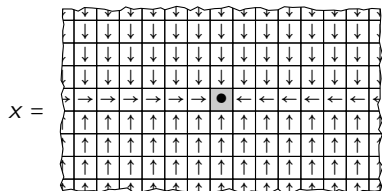
Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est *sofique* s'il existe un sous-shift de type fini $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F})$ et un facteur $\pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}))$.

Considérons $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

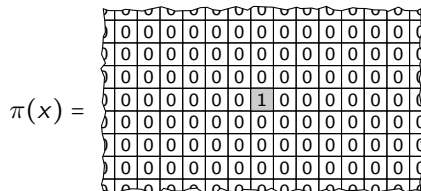
Soit $\mathcal{A}_\bullet = \{\bullet, \leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$ et $\mathcal{F}_\bullet \subset \mathcal{A}_\bullet^{\{0\} \times [0,1]} \cup \mathcal{A}_\bullet^{[0,1] \times \{0\}}$ qui définit le SFT:

$$\mathbf{T}(\mathcal{A}_\bullet, 2, \mathcal{F}_\bullet) = \overline{\mathcal{O}(x)}$$

$$\mathbf{T} = \pi(\mathbf{T}(\mathcal{A}_\bullet, 2, \mathcal{F}_\bullet)) = \overline{\mathcal{O}(\pi(x))}$$



$\xrightarrow{\pi}$



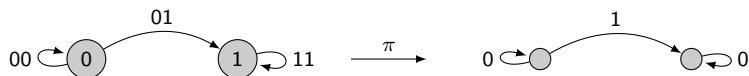
$$\begin{aligned} \pi : \quad \rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow &\longmapsto 0 \\ \bullet &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Sous-shift sofique (cas de la dimension 1)

Soit $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Le SFT $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{10\})$ se factorise sur le sous shift \mathbf{T} via π :

00	\mapsto	0
01	\mapsto	1
11	\mapsto	0



Théorème (Weiss 1973)

En dimension 1, le langage d'un sofique est rationnel, c'est à dire reconnu par un automate fini, c'est à dire il correspond aux motifs obtenus en parcourant un graphe étiqueté.

Exemples:

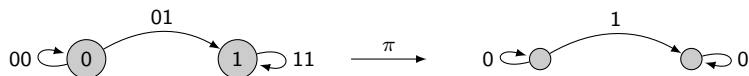
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n+1}b : n \in \mathbb{N}\})$ est ?
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n}b : n \in \mathbb{N}\})$ est ?
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ est ?

Sous-shift sofique (cas de la dimension 1)

Soit $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Le SFT $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{10\})$ se factorise sur le sous shift \mathbf{T} via π :

00	\mapsto	0
01	\mapsto	1
11	\mapsto	0



Théorème (Weiss 1973)

En dimension 1, le langage d'un sofique est rationnel, c'est à dire reconnu par un automate fini, c'est à dire il correspond aux motifs obtenus en parcourant un graphe étiqueté.

Exemples:

- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n+1}b : n \in \mathbb{N}\})$ est sofique.
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n}b : n \in \mathbb{N}\})$ est ?
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ est ?

Sous-shift sofique (cas de la dimension 1)

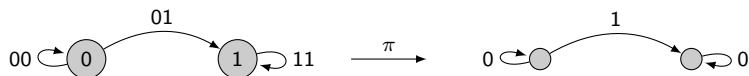
Soit $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Le SFT $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{10\})$ se factorise sur le sous shift \mathbf{T} via π :

00 \mapsto 0

01 \mapsto 1

11 \mapsto 0



Théorème (Weiss 1973)

En dimension 1, le langage d'un sofique est rationnel, c'est à dire reconnu par un automate fini, c'est à dire il correspond aux motifs obtenus en parcourant un graphe étiqueté.

Exemples:

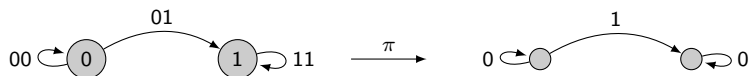
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n+1}b : n \in \mathbb{N}\})$ est sofique.
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n}b : n \in \mathbb{N}\})$ est sofique.
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ est ?

Sous-shift sofique (cas de la dimension 1)

Soit $\mathbf{T} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{il y a au plus un } i \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x_i = 1\}$.

Le SFT $\mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{10\})$ se factorise sur le sous shift \mathbf{T} via π :

00	\mapsto	0
01	\mapsto	1
11	\mapsto	0



Théorème (Weiss 1973)

En dimension 1, le langage d'un sofique est rationnel, c'est à dire reconnu par un automate fini, c'est à dire il correspond aux motifs obtenus en parcourant un graphe étiqueté.

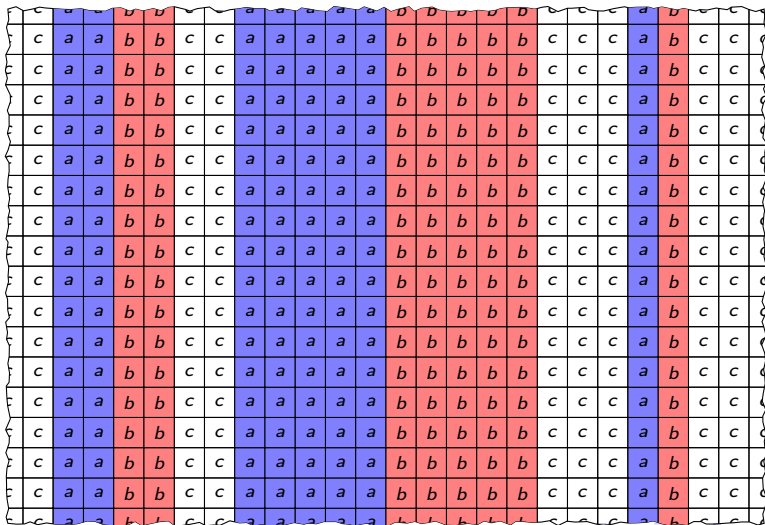
Exemples:

- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n+1}b : n \in \mathbb{N}\})$ est sofique.
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b\}, 1, \{ba^{2n}b : n \in \mathbb{N}\})$ est sofique.
- Le sous-shift $\mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ n'est pas sofique.

Peut-t-on rendre bidimensionnel l'exemple précédent?

Soit $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ on considère le sous-shift

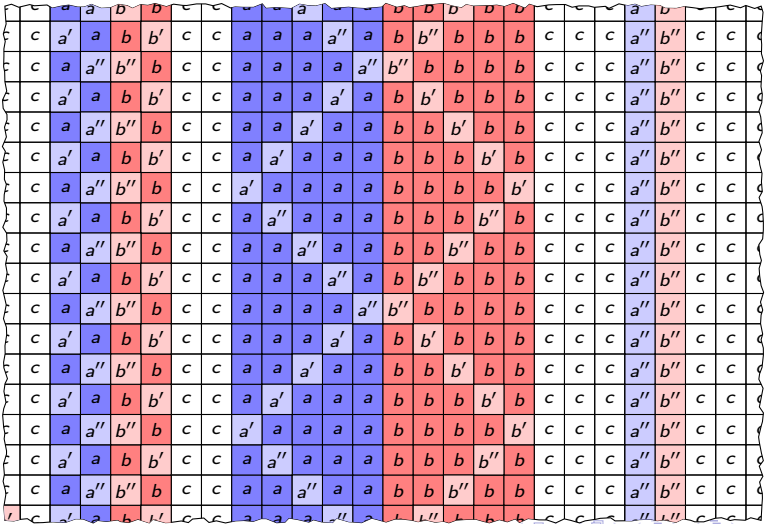
$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



Peut-t-on rendre bidimensionnel l'exemple précédent?

Soit $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ on considère le sous-shift

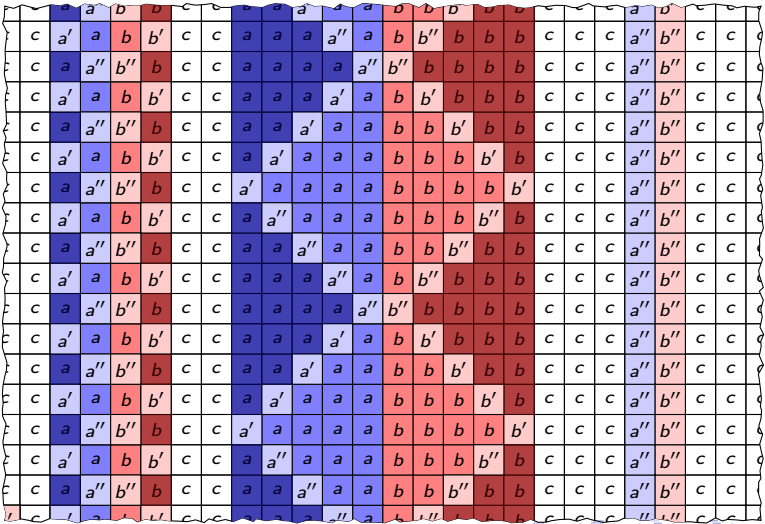
$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\})^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(.,j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



Peut-t-on rendre bidimensionnel l'exemple précédent?

Soit $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ on considère le sous-shift

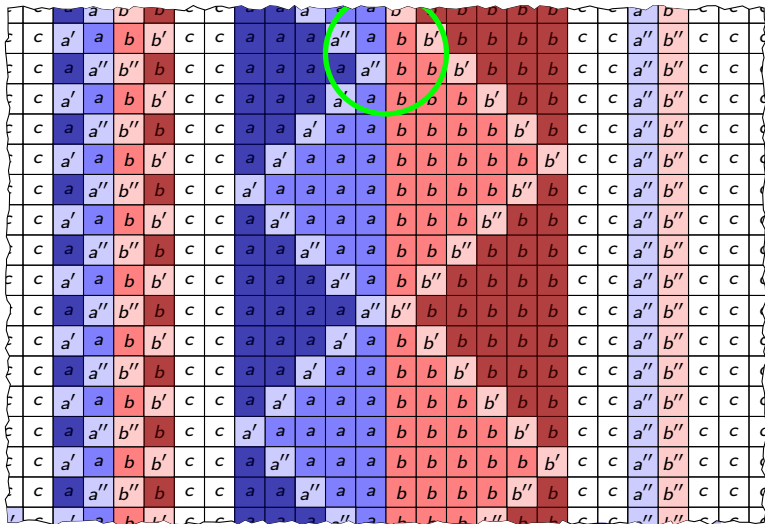
$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\})^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(.,j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



Peut-t-on rendre bidimensionnel l'exemple précédent?

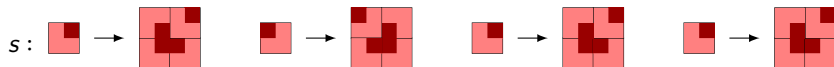
Soit $\Sigma = \mathbf{T}(\{a, b, c\}, 1, \{ba, cb, ac, ca^n b^m c : n \neq m\})$ on considère le sous-shift

$$\mathbf{T} = \{x \in (\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \Sigma \text{ tel que } x_{(\cdot, j)} = y \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$



Sous-shift substitutifs pour substitutions rectangulaires

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \right\}$. On considère la substitution suivante:

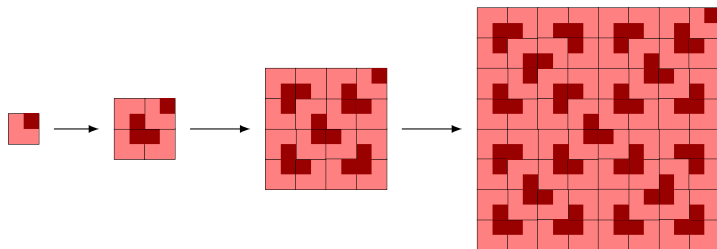


Sous-shift substitutifs pour substitutions rectangulaires

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \right\}$. On considère la substitution suivante:



Ce qui donne en itérant:



On définit le *sous-shift substitutif*:

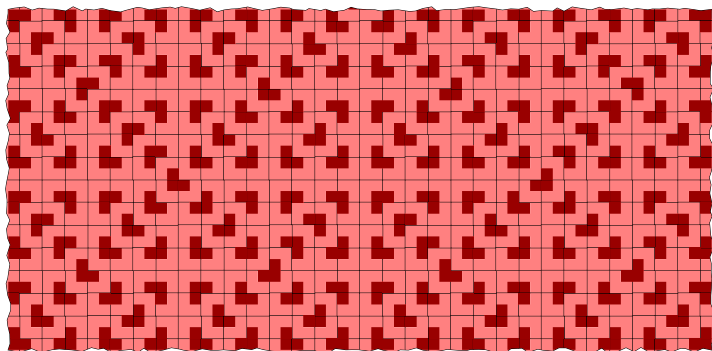
$$\mathbf{T}_s = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \forall p \sqsubset x \quad \exists a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } p \sqsubset s^n(a) \right\}$$

Sous-shift substitutifs pour substitutions rectangulaires

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix} \right\}$. On considère la substitution suivante:



Ce qui donne en itérant:



On définit le *sous-shift substitutif*:

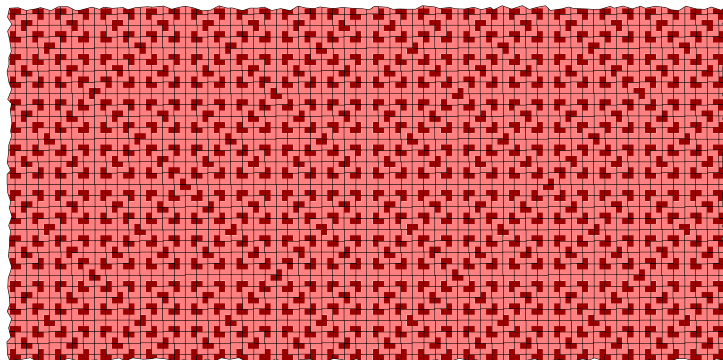
$$\mathbf{T}_s = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \forall p \sqsubset x \quad \exists a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } p \sqsubset s^n(a) \right\}$$

Sous-shift substitutifs pour substitutions rectangulaires

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \right\}$. On considère la substitution suivante:



Ce qui donne en itérant:



On définit le *sous-shift substitutif*:

$$\mathbf{T}_s = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \forall p \sqsubset x \quad \exists a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } p \sqsubset s^n(a) \right\}$$

Notions d'invariants

Complexité et entropie

Étant donné un sous-shift \mathbf{T} , on définit la *fonction complexité* de $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ comme la fonction

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{T}} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \text{Card} \left\{ u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^d} : \exists x \in \mathbf{T} \text{ tel que } u \sqsubset x \right\} = \text{Card}(\mathcal{L}_n(\mathbf{T})). \end{aligned}$$

La fonction complexité *n'est pas un invariant de conjugaison*.

Par contre $p_{\mathbf{T}}(kn) \leq p_{\mathbf{T}}(k)n^d$

On définit l'entropie d'un sous-shift \mathbf{T} par:

$$h(\mathbf{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(p_{\mathbf{T}}(n))}{n^d} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log(p_{\mathbf{T}}(n))}{n^d}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) &= \log(\text{Card}(\mathcal{A})) \\ \text{s substituiton } h(\mathbf{T}_s) &= 0 \end{aligned}$$

L'entropie est un invariant de conjugaison

Proposition

Soient $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{T}' \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$. Si $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ est un facteur alors $h(\mathbf{T}) \geq h(\mathbf{T}')$.

Soit $\bar{\pi} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \rightarrow \mathcal{A}$, on peut supposer que $\mathbb{U} = [-r, r]^d$.

Pour tout $u' \in \mathcal{L}_n(\mathbf{T}')$, alors il existe $u \in \mathcal{A}^{[-r, n+r]^d}$ un motif apparaissant dans \mathbf{T} tel que $\bar{\pi}(u) = u'$. Ainsi

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{T}'}(n) &= \text{Card} \left\{ u \in \mathcal{A}^{[0, n-1]^d} : \exists x \in \mathbf{T}' \text{ tel que } u \sqsubset x \right\} \\ &\leq \text{Card} \left\{ u \in \mathcal{A}^{[0, 2r+n-1]^d} : \exists x \in \mathbf{T} \text{ tel que } u \sqsubset x \right\} \\ &\leq p_{\mathbf{T}}(2r+n) \end{aligned}$$

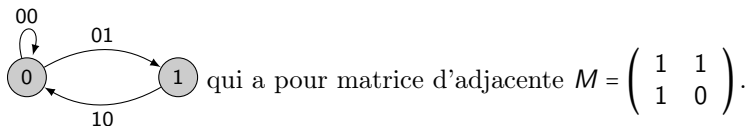
Ainsi $\frac{p_{\mathbf{T}'}(n)}{n^d} \leq \frac{p_{\mathbf{T}}(2r+n)}{n^d} = \frac{(2r+n)^d}{n^d} \frac{p_{\mathbf{T}}(2r+n)}{(2r+n)^d}$ et lorsque $n \rightarrow \infty$ on a $h(\mathbf{T}') \leq h(\mathbf{T})$.

Corollaire

Si \mathbf{T} et \mathbf{T}' sont topologiquement conjugué alors $h(\mathbf{T}) = h(\mathbf{T}')$.

Calcul de l'entropie en dimension 1

Considérons $\mathbf{T}_{\text{even}} = \mathbf{T}(\{0, 1\}, 1, \{11\}) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ qui est représenté par:



- ▶ Nombre de chemins qui vont du sommet i à j en utilisant n arêtes: $M_{i,j}^n$.
- ▶ Nombre de mots de longueur n : $\text{Card}(\mathcal{L}_n(\mathbf{T}_{\text{even}})) = \sum_{i,j \in \{0,1\}} M_{i,j}^n$.
- ▶ Par le théorème de Perron-Frobenius, M admet une valeur propre dominante $\lambda = \max\{|\mu| : \mu \text{ valeur propre de } M\}$ associé à un vecteur propre positif v . On a:

$$(M^n v)_i = \sum_{j=0}^r M_{i,j}^n v_j = \lambda^n v_i$$

Soit $c = \min(v_0, \dots, v_r)$ et $d = \max(v_0, \dots, v_r)$, on a donc: $\frac{c}{d} \lambda^n \leq \sum_{i,j \in [1,r]} M_{i,j}^n \leq \frac{rd}{c} \lambda^n$

On a donc:

$$h(\mathbf{T}_{\text{even}}) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Calcul de l'entropie en dimension 1

Théorème (*Lind 1984*)

Soit $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sofique de dimension 1 qui s'écrit sous la forme $\pi(\mathbf{T}_{\mathcal{G}})$ où $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe orienté étiquetées par $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ résolvant à droite. Étant donné la matrice M d'adjacence associée au graphe \mathcal{G} on a :

$$h(\mathbf{T}) = \log(\max\{|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } M\}).$$

Minimalité et Transitivité

Pour $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ on définit l'*orbite* de x par $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^i(x) : i \in \mathbb{Z}^d\}$.

Définition

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est *minimal* si:

$$\forall x \in \mathbf{T} \text{ on a } \mathbf{T} = \overline{\mathcal{O}(x)} \iff \forall x, y \in \mathbf{T}, \text{ on a } \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y).$$

Un sous-shift $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est *transitif* si:

$$\exists x \in \mathbf{T} \text{ tel que } \mathbf{T} = \overline{\mathcal{O}(x)} \iff \exists x \in \mathbf{T}, \text{ tel que } \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\mathbf{T}).$$

Les notions de minimalité et de transitivité sont des invariants topologiques.

Théorème

Tout sous-shift contient un sous-shift minimal.

Minimalité et Transitivité

Théorème

Tout sous-shift contient un sous-shift minimal.

Pour $U \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ ouvert, on note $\mathcal{O}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^d} \sigma^n(U)$.

On considère $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie.

On pose $F_0 = \mathbf{T}$ et pour $k \geq 1$ on définit par récurrence

$$F_k = \begin{cases} F_{k-1} & \text{si } F_{k-1} \subset \mathcal{O}(U_k) \\ F_{k-1} \setminus \mathcal{O}(U_k) & \text{sinon} \end{cases}$$

$(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une suite décroissante de fermés non vides σ -invariants donc $F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$ est donc un fermé σ -invariant. On va montrer que F est minimal.

Soient $x, y \in F$ tels que $\mathcal{L}(x) \setminus \mathcal{L}(y) \neq \emptyset$. Il existe U_i tel que $x \in \mathcal{O}(U_i)$ et $y \notin \mathcal{O}(U_i)$. Comme $F \subset F_{i-1}$, ce n'est pas un sous ensemble de $\mathcal{O}(U_i)$ donc $F_i = F_{i-1} \setminus \mathcal{O}(U_i)$ ce qui est incompatible avec le fait que $x \in F$.

Périodicité

Une configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est *périodique suivant la direction* $j \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ si

$$\sigma^j(x) = x.$$

Une configuration est *périodique* si elle est périodique suivant d directions linéairement indépendantes.

Proposition

$$\mathcal{O}(x) \text{ fermé} \iff \mathcal{O}(x) \text{ fini} \iff x \text{ périodique}$$

Une configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est *uniformément récurrente* si pour tout motif u il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ on ait $u \sqsubset x_{i+[-n,n]^d}$.

Théorème (Gottschalk)

Le sous-shift $\overline{\mathcal{O}(x)}$ est minimal si et seulement si x est uniformément récurrent.

Si un sous-shift est non vide alors il admet une configuration uniformément récurrente. Si de plus cette configuration n'est pas périodique alors le sous-shift n'est pas dénombrable.

Résumé

En **dimension 1**, on a les propriétés suivantes sur les SFT:

- Un SFT non vide contient une orbite périodique.
- Si un SFT n'est pas périodique, il n'est pas minimal.
- Un sous-shift substitutif n'est pas un SFT.
- Étant donné $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ il est décidable de savoir si $\mathbf{T}(\mathcal{A}, 1, \mathcal{F}) \neq \emptyset$.
- $\{h(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ SFT}\} = \left\{ \frac{p}{q} \log(\alpha) : p, q \in \mathbb{N}, \alpha \text{ Nombre de Perron} \right\}$ où un nombre de Perron est un nombre algébrique plus grand que le module de ses conjugués.

Résumé

En **dimension 1**, on a les propriétés suivantes sur les SFT:

- Un SFT non vide contient une orbite périodique.
- Si un SFT n'est pas périodique, il n'est pas minimal.
- Un sous-shift substitutif n'est pas un SFT.
- Étant donné $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^n$ il est décidable de savoir si $\mathbf{T}(\mathcal{A}, 1, \mathcal{F}) \neq \emptyset$.
- $\{h(\mathbf{T}) : \mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ SFT}\} = \left\{ \frac{p}{q} \log(\alpha) : p, q \in \mathbb{N}, \alpha \text{ Nombre de Perron} \right\}$ où un nombre de Perron est un nombre algébrique plus grand que le module de ses conjugués.

Que peut on dire pour une dimension $d \geq 2$?

Cours 2: Existe t'il des SFT n'ayant pas d'orbite périodique en dimension 2?

Cours 3: Problèmes de décision sur les pavages.

Cours 4: Construction de pavages qui ont une propriété donnée.