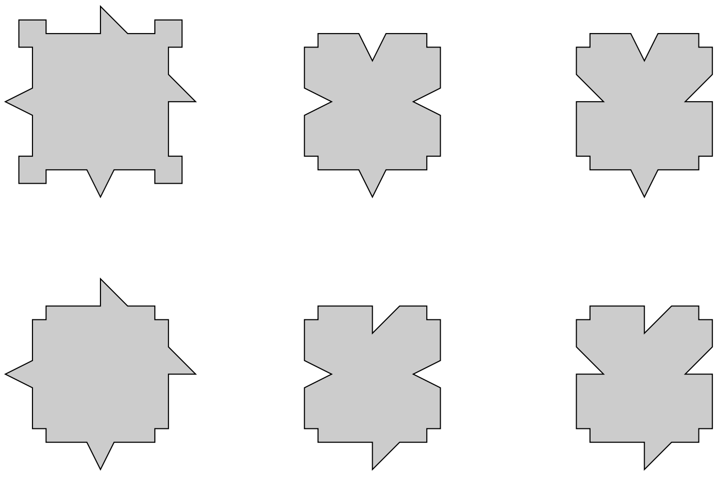
Université Aix-Marseille Année 2012-2013
Master 2 : Mathématiques fondamentales Pavages **feuille n° 2**

Problèmes de décisions

Exercice 1 Prouver que pour le pavage de Robinson, si on supprime les contraintes supplémentaires qui forcent le réseau alors il existe une configuration périodique.

Exercice 2 Montrer que les tuiles suivantes forment nécessairement un pavage apériodique, toute type de rotations sont autorisées (il y a un lien avec Robinson).



Exercice 3 Déterminer si la machine de Turing $\mathcal{TM} = (\Gamma = \{a, \sharp\}, \sharp, Q = \{s, q, p, h\}, s, h, \delta)$ s'arête où δ est définit par :

$$\delta(s,\sharp) = (q, a, \rightarrow) \qquad \delta(s, a) = (h, a, \rightarrow) \qquad \delta(q,\sharp) = (q, a, \leftarrow)$$

$$\delta(q, a) = (p, \sharp, \rightarrow) \qquad \delta(p,\sharp) = (p, a, \leftarrow) \qquad \delta(p, a) = (s, a, \leftarrow)$$

Exercice 4 Construisez les machines de Turing suivantes :

1. $\mathcal{TM}$ qui écrit 0 1 0 1 0 1 0... sur un ruban blanc.
2. $\mathcal{TM}$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \sharp\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.
3. $\mathcal{TM}$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \sharp\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.
4. $\mathcal{TM}$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \sharp\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.
5. $\mathcal{TM}$ à deux rubans sur l'alphabet $\{0, 1, \sharp\}$ qui code en binaire son entrée unaire.

Exercice 5 Construisez les machines de Turing qui reconnaissent les langages suivants :

1. $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$;
2. $\{x \in \{0, 1\}^* : x = yy \text{ avec } y \in \{0, 1\}^*\}$;

Exercice 6 Dire si les problèmes de décisions suivants sont décidables, semi-décidable ou indécidable :

1. "Étant donné une machine de Turing $\mathcal{TM}$ et un symbole a, est-ce que la machine $\mathcal{TM}$ écrit le symbole a sur son ruban à un moment donné ?"
2. "Étant donné une machine de Turing $\mathcal{TM}$ et un état q, est ce que la machine $\mathcal{TM}$ passe une infinité de fois par q en partant du ruban vide ?"

Exercice 7 (Le championnat du castor affairé) Pour tout entier n, on note $\mathcal{TM}(n)$ l'ensemble des machine de Turing qui :
– ont $n+1$ états : 1 état d'arrêt et n de calcul,
– ont un alphabet à deux lettres $\{1, \sharp\}$,
– s'arrêtent sur l'entrée vide.
Ce sont donc les machines qui s'arrêtent de la forme $(\Gamma = \{1, \sharp\}, \sharp, Q = \{s_1, \ldots, s_n, h\}, s_1, h, \delta)$. On note $S(n)$ le nombre maximal de pas de calcul effectué par une machine de $\mathcal{TM}(n)$ avant de s'arrêter. La machine réalisant ce maximum est déclarée vainqueur de la compétition du castor affairé en catégorie n.

1. Montrer que la fonction $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
2. Montrer que, si f est une fonction récursive, alors la fonction $g_f : n \mapsto \max(f(2n+2), f(2n+3))$ est calculable par une machine $\mathcal{TM}_f$ dont on notera k_f le nombre d'états.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et f récursive, construire une machine de Turing $\mathcal{N}_{x,f}$ qui, partant de l'entrée vide, écrit $g_f(x)$ sur le ruban. Combien d'états utilise-t-elle ?
4. En déduire que pour toute fonction récursive f , il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall x \geq x_0$, $f(x) < S(x)$. En déduire que S n'est pas récursive.
5. Que fait la machine ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, \sharp) = (q_1, 1, \rightarrow) & \delta(q_0, 1) = (q_2, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_1, \sharp) = (q_0, 1, \leftarrow) & \delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \leftarrow) \\ \delta(q_2, \sharp) = (q_1, 1, \leftarrow) & \delta(q_2, 1) = (h, 1, \rightarrow) \end{array}$$

6. Montrer que $S(2) \geq 6$ et $S(3) \geq 21$. En fait il est connu que $S(2) = 6$, $S(3) = 21$, $S(4) = 107$, $S(5) \geq 47176870$ et $S(6) \geq 3.10^{2879}$.
7. Montrer qu'il n'existe pas de programme qui prend en entrée un nombre n et sort un nombre plus grand que $S(n)$. On appelle ce problème "le problème des castors affairés".

Exercice 8 Étant donné une un SFT $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{A}, 2, \mathcal{F})$ et une lettre $a \in \mathcal{A}$ étudier la décidabilité des problèmes suivants :

1. "Est ce qu'il existe une orbite périodique de $\mathbf{T}$ contenant a ?"
2. "Est ce que toutes les orbites périodiques de $\mathbf{T}$ contiennent a ?"
3. "Est ce qu'il existe une configuration x et $\{a, b\} \subset \mathcal{A}$ tel que $x \in \{a, b\}^{\mathbb{Z}^2}$?"

Exercice 9 Prouvez que les problèmes de décision suivants prenant en entrée un sous-shift de type fini $\mathbf{T}$ sont indécidables :

1. "Est ce que $\mathbf{T} = \emptyset$?"
2. "Est ce que $\mathbf{T}$ est fini ?"
3. "Est ce que $\mathbf{T}$ est minimal ?"