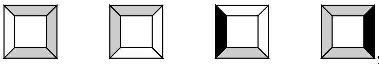
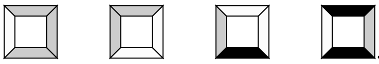
**Université Aix-Marseille** Année 2012-2013
Master 2 : Mathématiques fondamentales Pavages **feuille n° 1**

## Premières notions sur les sous-shifts

**Exercice 1** Déterminer si les jeux de tuiles de Wang suivant pavent le plan :

1. ,
2. .

**Exercice 2** Un langage $\mathcal{L} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^{[-n,n]^d}$ est *extensible* si
– pour tout $u \in \mathcal{L}$ et pour tout $v \sqsubset u$ de support $[-m,m]^d$ avec $m \in \mathbb{N}$ on a $v \in \mathcal{L}$ ;
– pour tout $u \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^{[-n,n]^d}$ il existe $v \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^{[-n-1,n+1]^d}$ tel que $v \in \mathcal{L}$ et $u \sqsubset v$.
On définit $\mathbf{T}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_{[-n,n]^d} \in \mathcal{L}\}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $\mathcal{L} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^{[-n,n]^d}$ est un langage extensible alors $\mathbf{T}(\mathcal{L})$ est un sous-shift.
2. Si $\mathcal{L} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^{[-n,n]^d}$est un langage *extensible* alors $\mathcal{L}(\mathbf{T}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
3. Si $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift alors $\mathbf{T}(\mathcal{L}(\mathbf{T})) = \mathbf{T}$.
4. Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ alors $\mathcal{L}(x)$ est un langage extensible et
$$\mathbf{T}(\mathcal{L}(x)) = \overline{\mathcal{O}(x)} = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : \forall n \geq 0,\ \exists i \in \mathbb{Z}^d,\ y_{\mathbb{U}_n} = x_{i+\mathbb{U}_n}\}.$$

**Exercice 3** Soit $F : \mathcal{A}^{Z^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. On définit $\Lambda_F = \cap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\mathcal{A}^{Z^d})$.

1. Montrer que $\Lambda_F$ est non vide.
2. Montrer que $\Lambda_F$ est fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $F^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) = \{c\}$.
3. Soit $C \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un fermé, en appliquant le théorème de Baire à la suite de fermés $(F^{-n}(C))_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) \subset C$, soit il existe $D$ un $G_\delta$ dense $\sigma$-invariant tel que $C \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(D) = \emptyset$. En appliquant ce résultat à l'ensemble $\Lambda_F$, montrer que ont soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda_F = F^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, soit il existe une configuration dont l'orbite ne rentre jamais dans $\Lambda_F$.

**Exercice 4** Soit $\mathbf{T} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift de type fini, montrer que il existe $x \in \mathbf{T}$ tel que toute lettre apparaissant dans $x$ apparaisse une infinité de fois.

**Exercice 5** Considérons un jeu de tuile de Wang tel qu'on paver une ligne horizontale en respectant les couleurs et tels que pour tout segment fini, si on considère les couleurs sur la partie supérieure de la ligne horizontale, il existe un segment qui a le même motif sur la partie inférieur de la ligne horizontale. Montrer qu'un tel jeu de tuile de Wang pave le plan.

**Exercice 6** Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de motifs tel que
$$\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : p \text{ n'apparait pas dans } x \text{ pour tout } p \in \mathcal{F}\} = \emptyset.$$
Montrer qu'il existe un ensemble fini de motifs $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{T}(\mathcal{A}, d, \mathcal{F}') = \emptyset$.

**Exercice 7** Soit $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, montrer que $\mathcal{O}(x)$ est un sous-shift si et seulement si $x$ est périodique.

**Exercice 8**
1. Montrer que l'ensemble des configurations périodiques dans toutes directions de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, c'est à dire
$$P = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : \exists (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } \sigma^{p_1 n_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + p_d n_d \overrightarrow{e_d}}(x) = x \ \forall (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \right\},$$
est dense dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.
2. Soit $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ une fonction continue qui commute avec le shift. Montrer que si $F$ est injective alors elle est surjective sur $P$.
3. Montrer que si $F$ est injective alors elle est surjective.

**Exercice 9** On considère $\mathcal{P}$ un ensemble fini de tuiles de Wang où les couleurs sont données par des flèches entrantes et sortantes. Il peut y avoir plusieurs flèches par coté et deux tuiles peuvent se coller suivant une arête si il y a le même nombre d'arêtes entrante de chaque coté et le même nombre d'arêtes sortantes de chaque cotés.
Montrer que si dans chaque tuile de $\mathcal{P}$ il y a plus d'arête sortante que d'arêtes entrantes alors $\mathcal{P}$ ne peut pas paver le plan.

**Exercice 10** Soit $\mathbf{T} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ l'ensemble des configurations tel que tout motif $2 \times 2$ contient exactement deux 0 et deux 1.
1. Déterminer si $\mathbf{T}$ est un sous-shift, un sofique, un sous shift de type fini.
2. Prouver que toute configuration de $\mathbf{T}$ est périodique au moins dans une direction.
3. Est ce que $\mathbf{T}$ est transitif ?
4. Donner des exemple de sous-shift minimaux de $\mathbf{T}$.

**Exercice 11** Soit $\mathbf{T} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ l'ensemble des configuration définit par
$$\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \text{ il existe } i, j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{i',j'} = 1 \Longleftrightarrow i \leq i' \leq i+n \text{ et } j \leq j' \leq j+n \right\}.$$
En d'autre terme, une configuration de $\mathbf{T}$ est un carré formé de 1 sur un fond de 0.
1. Est ce que $\mathbf{T}$ est un sous-shift ?
2. Décrire les éléments de la clôture $\overline{\mathbf{T}}$.
3. Est ce que $\overline{\mathbf{T}}$ est un sous-shift, un sofique, un sous-shift de type fini ?

**Exercice 12** Les sous-shift suivants sont-ils de type fini ou sofique :
1. $\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \text{ le symbole 1 apparait au plus une fois dans } x \right\}$.
2. $\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^2} : \begin{array}{c} \text{si } x_{i_0,j_0} = 2 \text{ alors } x_{i_0,j} = 2 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \\ \text{pour } i \neq i_0 \text{ on a } x_{i,j} \neq 2 \text{ et } x_{i,j} = x_{i,j_0-j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$.
3. $\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \text{ les composantes connexes finies de 1 de } x \text{ sont paires} \right\}$ où une composante connexe de 1 de la configuration $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ est un ensemble $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}^2$ tel que $x_{\mathbb{U}} = 1^{\mathbb{U}}$, si $u, u' \in \mathbb{U}$ alors on peut aller de $u$ à $u'$ en se déplaçant suivant $\pm(1,0)$ ou $\pm(0,1)$ sans sortir de $\mathbb{U}$ et si $u \notin \mathbb{U}$ et $\{u + (1,0), u - (-1,0), u + (0,1), u - (0,1)\} \cap \mathbb{U} \neq \emptyset$ alors $x_u = 0$.
4. $\mathbf{T} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \text{ les composantes connexes finies de 1 de } x \text{ sont impaires} \right\}$.