RECHERCHE DE MESURES INVARIANTES POUR L'ACTION CONJOINTE D'UN AUTOMATE CELLULAIRE ET DU DÉCALAGE

par

Mathieu Sablik

Résumé. — Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, un automate cellulaire peut être défini comme une fonction continue sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui commute avec le décalage σ. On considére la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action (F,σ) et on se propose de caractériser les mesures de probabilité (F,σ)-invariantes.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux conditions imposées par la dynamique directionnelle introduite dans [**Sab08**] sur les mesures (F,σ)-invariantes. Pour la classe des automates cellulaires qui ont un cône d'expansivité, on s'aperçoit qu'il y a une certaine rigidité des mesures (F,σ)-invariantes. Cela signifie qu'il y a des contraintes sur les mesures (F,σ)-invariantes, notamment un lien entre l'entropie métrique de F et l'entropie métrique de σ. On étudie en particulier la classe des automates cellulaires algébriques. L'étude de cette classe rappelle la conjecture de Furstenberg [**Fur67**] qui énonce que les seules mesures invariantes par la multiplication par 2 et par 3 sur le tore sont la mesure de Lebesgue et les mesures uniformément portées par les orbites (F,σ)-periodiques.

Abstract **(Characterizing invariant measures for the simultaneous action of a cellular automaton and the shift)**

Let $\mathcal{A}$ be a finite alphabet, a cellular automata can be defined as a continuous function on the full-shift $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ which commutes with the shift σ. We consider the $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action induced by (F,σ) and we are interested in search (F,σ)-invariant probability measures.

First, we are interested in the properties of (F,σ)-invariant measures induced by the directional dynamic introduced in [**Sab08**]. For the class of cellular automata with an expansive cone, there is a phenomenon of rigidity for (F,σ)-invariant measures. This means that, in this case, there are some constraints on (F,σ)-invariant measures : in particular a link between the metric entropy of F and the metric entropy of σ. More precisely, we study the class of algebraic cellular automata. This study recall the Furstenberg's conjecture [**Fur67**] which aims characterizing all probability measures on the torus, invariant under multiplication by two prime integers.

Introduction

Un automate cellulaire est un système complexe défini par une règle locale qui agit de manière synchrone et uniforme sur l'espace des configurations. Dans cet article, on choisira pour espace des configurations $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, c'est à dire l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un alphabet fini. Ces modèles très simples ont une grande variété de comportements dynamiques qui, ces dernières années, ont été l'objet d'études d'un point de vue informatique et mathématique. G. Hedlund [**Hed69**] est le premier à donner un cadre symbolique aux automates cellulaires en les décrivant comme des fonctions continues sur l'espace des configurations $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, muni de la topologie produit, qui commutent avec le décalage, noté σ. Ceci nous permet de considérer l'automate cellulaire comme un système dynamique. Comme tout système dynamique topologique, une question naturelle est d'identifier l'ensemble des mesures invariantes de ce système puis d'étudier ses propriétés par rapport aux mesures invariantes trouvées. Les premières études ont été réalisées par [**CP75**] et [**Wil75**].

Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire. Compte-tenu du résultat de [**Hed69**], on peut considérer la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action (F, σ) sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Dans cet article, on se propose de rechercher les mesures de probabilité (F, σ)-invariantes. Il est facile de montrer l'existence de telles mesures : il suffit de considérer les valeurs d'adhérence de la suite

$$\left(\frac{1}{n^2} \sum_{(k,m) \in [0,n-1]^2} F_*^k \circ \sigma_*^m \mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

où μ appartient à l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, noté $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$. Il y a existence des valeurs d'adhérence grâce à la compacité de $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ pour la topologie faible*. Cette preuve n'a rien d'explicite. Dans cet article, on s'attache à la recherche effective de telles mesures.

Après avoir introduit les différentes définitions, on s'intéresse dans la section 2 aux techniques élémentaires de recherche des mesures (F, σ)-invariantes. Une première classe naturelle de telles mesures est l'ensemble des mesures portées uniformément par des orbites (F, σ)-périodiques. Une autre classe de mesures (F, σ)-invariantes qui apparaît naturellement correspond aux mesures maximales pour certains sous-décalages F-invariants. On retrouve alors le résultat classique de G. Hedlund, à savoir que la mesure de Bernoulli uniforme sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est (F, σ)-invariante si et seulement si F est surjectif. Pour conclure cette section, on rappelle la définition de l'attracteur μ-limite introduit par P. Kůrka et A. Maass [**KM00**]. Pour une mesure (F, σ)-invariante μ, l'ensemble μ-limite correspond au support de cette mesure. Ainsi, comme on le verra sur un exemple, la caractérisation générale des ensembles μ-limites pour toute mesure σ-invariante donne des informations sur l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes.

En section 3, on reprend la classification établie dans [**Sab08**] à partir de la dynamique topologique de l'automate cellulaire en tant que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action. Chaque classe impose des contraintes fortes aux mesures (F, σ)-invariantes que nous essayons de dégager. Pour certaines classes, on sait facilement déterminer l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes. Pour d'autres, on obtient des contraintes : notamment des formules qui lient l'entropie directionnelle suivant deux directions (section 4). Cette rigidité des mesures (F, σ)-invariantes est spécialement marquée pour les automates cellulaires qui ont une direction d'expansivité. Il n'y a pas de résultat général pour cette classe. Par contre, si on se restreint à la classe des automates cellulaires algébriques bipermutatifs, on obtient des résultats de rigidité discutés en section 5.

En effet, lorsqu'on considère les automates cellulaires algébriques bipermutatifs, des conditions d'ergodicité sur la mesure, des conditions sur la taille des noyaux des itérés de l'automate cellulaire et la positivité de l'entropie suivant une direction, forcent une mesure (F, σ)-invariante à être la mesure de Bernoulli uniforme. Le premier résultat dans cette direction est apparu dans [**HMM03**], puis des généralisations dans [**Piv05**] et [**Sab07**]. Ce problème est apparenté à la conjecture de Furstenberg [**Fur67**] qui cherche à caractériser les mesures de probabilité sur le tore invariantes par la multiplication par deux entiers premiers entre eux. D. J. Rudolph montre dans [**Rud90**] que si une telle mesure est d'entropie positive alors c'est nécessairement la mesure de Lebesgue. Il reste à caractériser les mesures d'entropie nulle. Ce problème est encore ouvert, on conjecture que ce sont les mesures uniformes portées par les orbites périodiques sous l'action des deux transformations. Il existe une approche plus algébrique de ce problème. Notamment K. Schmidt [**Sch95**] et plus récemment M. Einsiedler [**Ein05**] se sont intéressés à l'étude des mesures invariantes par une $\mathbb{Z}^d$-action sur un groupe zéro-dimensionnel, comme l'exemple de Ledrappier [**Led78**].

La section 5.3 utilise les théorèmes précédents pour caractériser l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'automate cellulaire F agit sur $\mathcal{A}^{Z}$ comme un morphisme sur le groupe produit.

1. Définitions

1.1. Action du décalage sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. —

1.1.1. Espace des configurations. — Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé *alphabet*. L'*espace des configurations* est l'ensemble des fonctions définies sur le réseau $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$; on le note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Si $\mathcal{A}$ est muni de la topologie discrète, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit est un espace compact, métrisable (car $\mathbb{Z}$ est dénombrable), parfait (i.e. il n'y a pas de point isolé) et totalement discontinu. On munit cet espace de la *distance de Cantor* définie pour $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$d_C(x,y) = 2^{-\min\{|m| : x_m \neq y_m\}}.$$

Considérons un sous-ensemble $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on note $x_{\mathbb{U}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$ la restriction de x à $\mathbb{U}$. Pour un motif $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$, on définit de manière réciproque le *cylindre* centré sur w par $[w]_{\mathbb{U}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{\mathbb{U}} = w\}$. Une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$, $w = w_0...w_{n-1} \in \mathcal{A}^n$, est un *mot fini* de longueur n. On note $|w|$ la longueur du mot. $\mathcal{A}^*$ désigne l'ensemble des mots finis et $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des mots finis privé du mot vide.

Remarque. — Parfois, l'espace des configurations peut être défini à partir d'un réseau quelconque $\mathbb{M} = \mathbb{N}^{d'} \times \mathbb{Z}^{d''}$ ou même un groupe moyennable.

1.1.2. Décalages et sous-décalages. — L'action de $\mathbb{Z}$ sur lui-même induit une $\mathbb{Z}$-action sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par *décalage* (appelée aussi action par le *shift*) définie par $\sigma : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Un *sous-décalage* (ou *sous-shift*) est défini comme un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ invariant par σ. Soit Σ un sous-décalage et $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ fini, on note $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U}) = \{x_{\mathbb{U}} : x \in \Sigma\}$ l'ensemble des *motifs* de Σ de *base* $\mathbb{U}$. On note $\mathcal{L}_\Sigma$, l'ensemble des motifs.

Un sous-décalage Σ a la propriété de spécification si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u, v \in \mathcal{L}_\Sigma$ et pour tout $n \geq N$, il existe $x \in \Sigma$ σ-periodique tel que $x_{[0,u-1]} = u$ et $x_{[n+|u|,n+|u|+|v|-1]} = v$. Un sous-décalage Σ a la propriété de spécification faible si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u, v \in \mathcal{L}_\Sigma$, il existe $n \leq N$ et $x \in \Sigma$ σ-periodique tel que $x_{[0,u-1]} = u$ et $x_{[n+|u|,n+|u|+|v|-1]} = v$ (voir [**DGS76**] pour plus de détails).

Remarque. — Un sous-décalage sofic transitif (resp. mélangeant) a la propriété de spécification faible (resp. la propriété de spécification).

1.2. Automate cellulaire comme une $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action. —

1.2.1. Automates cellulaires. — De manière générale, un *automate cellulaire* (AC) est une paire $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ où $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est l'espace des configurations muni du décalage σ et $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est définie à partir d'un ensemble fini $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ appelé *voisinage* et une *fonction locale* $\overline{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$ par

$$F(x)_m = \overline{F}((x_{m+u})_{u\in\mathbb{U}}) \qquad \text{pour tous } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \text{ et } m \in \mathbb{Z}.$$

Si le plus petit voisinage permettant de définir F est réduit à un singleton, on dit que F est *trivial*.

Par la caractérisation symbolique de Hedlund [**Hed69**], un AC est défini de manière équivalente comme une fonction continue sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui commute avec σ. Cela permet de considérer la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action (F, σ).

1.2.2. Automates cellulaires à combinatoire forte.— On définit ici des classes d'automates cellulaires qui ont des propriétés combinatoires fortes.

Définition. — Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC de voisinage $\mathbb{U} = [r, s]$ avec $r \leq s$.

• $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est permutatif à gauche si pour tous $u \in \mathcal{A}^{s-r}$ et $b \in \mathcal{A}$, il existe un unique $a \in \mathcal{A}$ tel que $\overline{F}(au) = b$.

• $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est permutatif à droite si pour tous $u \in \mathcal{A}^{s-r}$ et $b \in \mathcal{A}$, il existe un unique $a \in \mathcal{A}$ tel que $\overline{F}(ua) = b$.

• $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est bipermutatif s'il est permutatif à droite et à gauche.

1.2.3. Automates cellulaires algébriques. — On suppose que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est muni d'une structure de groupe topologique et que $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un endomorphisme continu. Comme la multiplication est un opérateur continu qui commute avec σ, elle peut donc être définie par une règle locale $\overline{*} : \mathcal{A}^{[r,s]} \times \mathcal{A}^{[r,s]} \to \mathcal{A}$. On renvoie à [**Kit87**] pour plus de détails.

Un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est dit *algébrique* si $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un groupe topologique abélien et F et σ sont deux endomorphismes de groupe.

Si $\mathcal{A}$ a une structure de groupe fini abélien, on peut considérer $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ le groupe produit. On dit alors que l'AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est *linéaire* si F est un endomorphisme de groupe. Dans ce cas, F s'écrit :

$$F = \sum_{u \in \mathbb{U}} f_u \circ \sigma^u,$$

où pour tout $u \in \mathbb{U}$, f_u est un endomorphisme sur $\mathcal{A}$ étendu coordonnée par coordonnée à $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On peut écrire F comme un polynôme de σ, $F = P_F(\sigma)$ où $P_F \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})[X, X^{-1}]$. Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on rappelle qu'un endomorphisme de $\mathcal{A}$ est la multiplication par un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On remarque facilement qu'un AC linéaire $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ où $F = \sum_{u \in [r,s]} f_u \circ \sigma^u$ est permutatif à gauche (respectivement à droite) si f_r (respectivement f_s) est un automorphisme. Ainsi, si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, tout automate cellulaire non-trivial (c'est à dire qui n'est pas une puissance du décalage) est bipermutatif.

1.3. Espace des mesures. —

1.3.1. Action sur l'espace des mesures. — Soit $\mathfrak{B}$ la sigma-algèbre des boréliens de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini sur la sigma-algèbre $\mathfrak{B}$. Soient $\mathbb{M}$ un monoïde et T une $\mathbb{M}$-action sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ (T peut être par exemple la $\mathbb{N}$-action σ, la $\mathbb{N}$-action F ou la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action (F, σ)). La $\mathbb{M}$-action T agit naturellement sur $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ par :

$$T_*^m \mu(B) = \mu(T^{-m}(B) \text{ pour tous } m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \text{ et } B \in \mathfrak{B}.$$

On dit que $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{M}})$ est *T-invariante* si $T_*^m \mu = \mu$ pour tout $m \in \mathbb{M}$. On note $\mathcal{M}_T(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des mesures de probabilité T-invariantes. Pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}_T(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, on note $\mathcal{I}_\mu(T) = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(T^{-m}(B) \Delta B) = 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{M}\}$ la sigma-algèbre des ensembles T-invariants modulo μ. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_T(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ est T-ergodique si $\mathcal{I}_\mu(T)$ est triviale, c'est à dire que tout ensemble est de mesure 0 ou 1. On note $\mathcal{M}_T^{\mathrm{erg}}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des mesures T-ergodiques.

On rappelle que $\mathcal{M}_T(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ est un ensemble convexe compact pour la topologie faible* et que $\mathcal{M}_T^{\mathrm{erg}}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ correspond aux points extrêmaux. On peut alors décomposer toutes mesures T-invariantes comme un barycentre de mesures T-ergodiques. C'est pourquoi on s'intéresse plus particulièrement aux mesures T-ergodiques lorsqu'on cherche à caractériser les mesures T-invariantes. On renvoie à [**DGS76**] ou [**Wal82**] pour plus de détails.

Si T est une $\mathbb{Z}$-action, on dit que μ est *T-totalement ergodique* si μ est T^m-ergodique pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Et μ est *T-fortement mélangenate* si $\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$.

1.3.2. Mesure de Bernoulli. — Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on considère un réel $p_a \in [0,1]$ de telle sorte que $\sum_{a \in \mathcal{A}} p_a = 1$. On définit *la mesure de Bernoulli suivant le vecteur de probabilité* $(p_a)_{a \in \mathcal{A}}$ par :

$$\lambda_{(p_a)_{a \in \mathcal{A}}}([u]_{\mathbb{U}}) = \prod_{m \in \mathbb{U}} p_{u_m} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}^{\mathbb{M}}}([u]_{\mathbb{U}}).$$

Si tous les p_a sont choisis uniformément égal à $\frac{1}{\mathrm{Card}(\mathcal{A})}$, on obtient la *mesure de Bernoulli uniforme* que l'on note $\lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$.

1.3.3. Notion d'entropie. — Soient $\mathcal{P}$ une partition finie de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $\mathfrak{B}'$ une sous sigma-algèbre de $\mathfrak{B}$. Pour tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on note $I_{\mathcal{P}}(x) = -\sum_{A\in\mathcal{P}} \log(\mu(A))\mathbf{1}(x)$ *l'information de la partition* $\mathcal{P}$ et $I(\mathcal{P}|\mathfrak{B}') = -\sum_{A\in\mathcal{P}} \log(\mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_A|\mathfrak{B}')(x))\mathbf{1}_A(x)$ *l'information de la partition* $\mathcal{P}$ *conditionnée par rapport à* $\mathfrak{B}'$. Ceci nous permet de définir *l'entropie de la partition* $\mathcal{P}$ par

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \int I_{\mathcal{P}}(x)\mathrm{d}\mu = -\sum_{A\in\mathcal{P}} \mu(A)\log(\mu(A)),$$

et *l'entropie de la partition* $\mathcal{P}$ *conditionnée par rapport à* $\mathfrak{B}'$ par $H_\mu(\mathcal{P}|\mathfrak{B}') = \int I_{\mathcal{P}|\mathfrak{B}'}(x)\mathrm{d}\mu$.

Pour $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ fini, on note $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}$ la partition engendré par les cylindres centrés sur $\mathbb{U}$, c'est à dire $\{[u]_{\mathbb{U}}; u \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}\}$. Pour deux partitions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit le raffinement de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \{A \cap B : A \in \mathcal{P}_1 \text{ et} B \in \mathcal{P}_2\}$. L'entropie d'une fonction continue $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ peut être définie par :

$$h_\mu(F) = \lim_{l\to\infty}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{N-1} F^{-n}\mathcal{P}_{[-l,l]}\right).$$

Cette limite existe par sous-additivité. On renvoie à [**DGS76**] ou [**Wal82**] pour une approche pédagogique de la notion d'entropie.

Un sous-décalage $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est dit *intrinsèquement ergodique* s'il existe une unique mesure d'entropie maximale. Il est connu qu'un sous décalage qui a la propriété de spécification est intrinsèquement ergodique.

2. Quelques techniques élémentaires

Dans cette section, on répertorie les méthodes élémentaires pour obtenir des mesures (F,σ)-invariantes. Ces méthodes sont facilement généralisables à d'autres réseaux $\mathbb{M} = \mathbb{N}^{d'} \times \mathbb{Z}^{d''}$.

2.1. Mesures (F,σ)-invariantes portées par des orbites périodiques. — Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC quelconque. On définit la *mesure de Dirac* portée par $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si non,} \end{cases} \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}.$$

On remarque que si la configuration x n'est pas σ-uniforme, la mesure de Dirac associée n'est pas σ-invariante. Cependant, si on considère une configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ σ-périodique de période n, on obtient une mesure σ-ergodique en prenant la moyenne des mesures de Dirac des configurations portées par la σ-orbite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des points σ-périodiques de période au plus n est noté P_n. Compte-tenu du caractère local d'un AC, il est facile de vérifier que $F(P_n) \subset P_n$. Comme P_n a au plus $\mathrm{Card}(\mathcal{A})^n$ éléments, on en déduit que pour tout $x \in P_n$, x est ultimement périodique pour F ; on note m la préperiode et p la période. On peut alors considérer la mesure

$$\widetilde{\delta_x} = \frac{1}{np}\sum_{i\in[0,n-1],j\in[0,p-1]} \delta_{\sigma^i\circ F^{m+j}(x)},$$

on vérifie facilement que $\widetilde{\delta_x}$ est (F,σ)-ergodique.

2.2. Invariance des mesures d'entropie maximale. — G. Hedlund [**Hed69**] montre par des méthodes combinatoires élaborées que la mesure de Bernoulli uniforme est invariante pour un AC si et seulement si il est surjectif. La notion d'entropie permet d'étendre ce résultat :

Théorème 2.1. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et Σ un sous-décalage intrinsèquement ergodique de mesure maximale $\lambda \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$. La mesure d'entropie maximale λ est (F,σ)-invariante si et seulement si $F : \Sigma \to \Sigma$ est surjectif.*

Démonstration. — Comme $F : \Sigma \to \Sigma$ est surjective, l'application $F_* : \mathcal{M}_\sigma(\Sigma) \to \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$ est surjective. Il existe donc $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$ telle que $F_*\mu = \lambda$. Or $h_\mu(\sigma) \geq h_{F_*\mu}(\sigma) = h_\lambda(\sigma)$ car l'entropie d'un facteur est plus petite que l'entropie du système initial. Cependant λ est la seule mesure d'entropie maximale pour (Σ, σ). On en déduit que $\mu = \lambda$, d'où $F_*\lambda = \lambda$. □

Remarque. — Le décalage $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est intrinsèquement ergodique de mesure maximale : la mesure de Bernoulli uniforme $\lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$. On en déduit que si l'AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est surjectif alors $\lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ est F-invariante.

De même, lorsqu'on munit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ d'une structure de groupe abélien et que l'on considère un sous-groupe markovien Σ (sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui est aussi un sous-groupe), alors (Σ, σ) est intrinsèquement ergodique et la mesure de Haar, λ_Σ, est la mesure maximale. Ainsi pour un AC algébrique surjectif $(\mathcal{A}^{\mathbb{M}}, F)$, les mesures de Haar sur les sous-groupes markoviens F-invariants sont F-invariantes.

2.3. Un exemple d'utilisation de l'attracteur mesuré. —

2.3.1. Définition de l'ensemble μ-limite. — La notion d'attracteur ne décrit pas toujours les phénomènes d'attraction qu'on observe lorsqu'on itère des configurations choisies suivant une mesure μ. Pour traduire ce phénomène, P. Kůrka et A. Maass [**KM00**] introduisent le concept d'ensemble μ-limite.

Définition. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$. *L'ensemble μ-limite de F par rapport à μ* est le sous-décalage $\Lambda_F(\mu) \subset \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$ défini par :

$$u \notin \mathcal{L}_{\Lambda_F(\mu)}(\mathbb{U}) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_*^n\mu([u]_{\mathbb{U}}) = 0 \quad \text{où } \mathbb{U} \subset \mathbb{Z} \text{ fini.}$$

Si μ est (F, σ)-invariante, on vérifie facilement que $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Lambda_F(\mu)$. Ainsi la connaissance de $\Lambda_F(\mu)$ pour toutes mesures $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, nous donne des informations sur l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes. Regardons sur deux exemples, le "Glider" et la "règle 184", comment utiliser cette notion d'attracteur que nous réutiliserons lorsqu'on étudiera la dynamique directionnelle (section 3).

2.3.2. Deux exemples : le "Gliders" de J. Milnor et la "règle 184". — On s'intéresse ici à caractériser les mesures (F, σ)-invariantes de deux exemples particuliers grâce à la notion d'ensemble μ-limite.

L'AC "Just Gliders" $(\mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}}, F_G)$ introduit par J. Milnor [**Mil88**] est défini sur l'alphabet $\mathcal{A}_G = \{-1, 0, 1\}$ par le voisinage $\mathbb{U}_G = [-1, 1]$ et la fonction locale :

$$\overline{F_G}(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \text{ et } 2b + c \geq 0, \\ -1 & \text{si } c = -1 \text{ et } a + 2b \leq 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On peut interpréter le diagramme espace-temps de cet AC par un fond de 0 sur lequel se déplace des particules 1 vers la droite et des particules -1 vers la gauche. Ces particules s'annihilent lorsqu'elles se rencontrent.

On peut faire un lien entre cet AC et l'AC $(\mathcal{A}_{184}^{\mathbb{Z}}, F_{184})$ de la "règle 184" défini par Wolfram par $\mathcal{A}_{184} = \{0, 1\}$, $\mathbb{U}_{184} = [-1, 1]$ et

$$\overline{F_{184}}(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } (b = 1 \text{ et } c = 1), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Cet AC peut être interprété comme un modèle de trafic routier simple où les 1 représentent les voitures et les 0 représentent les emplacements libres. Une voiture avance si et seulement si la case devant-elle est libre. Selon la configuration initiale, on voit apparaître des embouteillages plus ou moins importants qui se déplacent dans le sens opposé aux voitures. Parallèlement, on voit aussi apparaître des zones de vides qui se déplacent dans le sens des voitures et qui annihilent les embouteillages. La disparition de ces derniers réside donc dans le nombre de blocs vides présents ; cela dépend de la densité de voitures dans les configurations considérées.

On peut faire une correspondance entre 184 et "Just Gliders" par :

$$T_{184,G} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{184}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}} \\ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (1 - x_i - x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

$T_{184,G}$ est une application continue qui commute avec le décalage et les automates. De plus, la restriction de $T_{184,G}$ à $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \setminus \{^{\infty}(01)^{\infty}, ^{\infty}(10)^{\infty}\}$ est injective. Formellement $T_{184,G}$ remplace le bloc 00 par la particule 1, le bloc 11 par la particule -1 et les blocs 01 et 10 par le fond 0. Dans un certain sens, $(\mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}}, F_G)$ simule l'AC de la règle 184.

Proposition 2.2. — *Soit μ une mesure σ-ergodique. Si $\mu([-1]) \geq \mu([1])$ alors $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,-1\}^{\mathbb{Z}}$. De manière symétrique, si $\mu([1]) \geq \mu([-1])$ alors $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. — Par la définition de $(\mathcal{A}_G, F_G)$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}}$, on a $F_G^n(x)_0 = 1$ si et seulement si $\sum_{i=-n}^{k} x_i > 0$ pour tout $k \in [-n,n]$. On en déduit que :

$$F_{G*}^n\mu([1]) = \mu\left(\{x \in \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}} : \sum_{i=-n}^{k} x_i > 0, \forall k \in [-n,n]\}\right).$$

Soit μ une mesure σ-ergodique telle que $\mu([-1]) > \mu([1])$. Par le théorème de Birkhoff, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}}$, on a :

$$\frac{1}{k+n+1}\sum_{i=-n}^{k} x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu([1]) - \mu([-1]) < 0.$$

On en déduit donc que $\lim_{n\to\infty} F_{G*}^n\mu([1]) = 0$ d'où $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,-1\}^{\mathbb{Z}}$. De même, on montre que si $\mu([-1]) < \mu([1])$ alors $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

On suppose maintenant que $\mu([-1]) = \mu([1])$. Un résultat de G. Atkinson [**Atk76**] nous dit que pour un système dynamique ergodique $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ et une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\int f d\mu = 0$, on a $\liminf_{n\to\infty} |\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))| = 0$. Donc

$$\mu\left(x \in \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}} : \sum_{i=-n}^{k} x_i > 0 \ \forall k \in [-n,n]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(x \in \mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}} : \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2n+1} x_i > 0\right) = 0.$$

On en déduit que $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,-1\}^{\mathbb{Z}}$. En raisonnant de manière symétrique, on obtient que $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Ainsi dans ce cas $\mu = \delta_{^\infty 0^\infty}$. □

Remarque. — On remarque que $\mathcal{M}_\sigma(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{M}_\sigma(\{0,-1\}^{\mathbb{Z}}) = \{\delta_{^\infty 0^\infty}\}$.

Cette proposition sur l'ensemble μ-limite de $(\mathcal{A}_G, F_G)$ permet de caractériser les mesures (F_G, σ)-invariantes.

Corollaire 2.3. — *Une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{A}_G^{\mathbb{Z}}$ est (F_G,σ)-invariante si et seulement s'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\mu_1 \in \mathcal{M}_\sigma(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ et $\mu_2 \in \mathcal{M}_\sigma(\{0,-1\}^{\mathbb{Z}})$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$.*

Démonstration. — Soit μ une mesure (F_G,σ)-invariante et σ-ergodique. On a $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ si $\mu([1]) \geq \mu([-1])$ et $\Lambda_{F_G}(\mu) \subset \{0,-1\}^{\mathbb{Z}}$ si $\mu([-1]) \geq \mu([1])$. Comme μ est (F_G,σ)-invariante, on a $\Lambda_{F_G}(\mu) = \mathrm{supp}(\mu)$ d'où $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ ou $\mathcal{M}_\sigma(\{0,-1\}^{\mathbb{Z}})$. On en déduit la condition nécessaire. La réciproque découle du fait que F_G agit comme le décalage sur $\{0,-1\}^{\mathbb{Z}}$ et comme l'inverse du décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. □

La fonction de groupage $T_{184,G}$ établit une correspondance entre l'AC "Just Gliders" et l'AC défini par la “règle 184”. On peut alors déterminer les mesures de probabilité $(\mathcal{A}_{184,F_{184}})$-invariantes.

Corollaire 2.4. — *Soient Λ_+ et Λ_- deux sous-décalages d'ordre 2 définis respectivement par $11 \notin \mathcal{L}_{\Lambda_+}(2)$ et $00 \notin \mathcal{L}_{\Lambda_-}(2)$. Une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{A}_{184}^{\mathbb{Z}}$ est (F_{184}, σ)-invariante si et seulement s'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\mu_1 \in \mathcal{M}_\sigma(\Lambda_+)$ et $\mu_2 \in \mathcal{M}_\sigma(\Lambda_-)$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$.*

Remarque. — On remarque que :

$$\mathcal{M}_\sigma(\Lambda_+) \cap \mathcal{M}_\sigma(\Lambda_-) = \left\{ \frac{\delta_{^\infty(01)^\infty} + \delta_{^\infty(10)^\infty}}{2} \right\};$$

cette mesure correspond au régime saturé du réseau routier.

3. Dynamique directionnelle et mesures (F, σ)-invariantes

Généralement, l'étude de la dynamique d'un AC ne porte que sur l'étude de la $\mathbb{N}$-action engendrée par l'AC sans se préoccuper du décalage. C'est le cas des classifications par rapport à la sensibilité aux conditions initiales proposées par R. H. Gilman [**Gil87**] et P. Kůrka [**Kůr97**]. Cependant, du point de vue de l'observation des diagrammes espace-temps, le comportement d'un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ n'est pas si différent de celui de $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F \circ \sigma^m)$ pour $m \in \mathbb{Z}$ alors que pour tout AC non nilpotent, $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F \circ \sigma^m)$ est sensible aux conditions initiales pour $m \in \mathbb{Z}$ assez loin de 0. Ainsi, compte-tenu de la commutativité entre F et σ, on est amené à considérer la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action définie par (F, σ) afin de mettre en évidence la structure spatio-temporelle observée dans les diagrammes espace-temps.

Cependant, l'étude de la dynamique de l'action (F, σ) dans sa totalité n'est pas pertinente car σ a une dynamique trop forte. En effet, la $\mathbb{Z}$-expansivité du décalage entaine la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-expansivité de l'action (F, σ) sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On va donc s'intéresser à la dynamique de (F, σ) suivant un sous-réseau de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. De plus, comme $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ peut se plonger dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la notion de dynamique directionnelle suivant un sous-réseau se généralise à la dynamique suivant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Cela permet de considérer des directions irrationnelles. On étudie dans cette section les propriétés imposées par la dynamique directionnelle aux mesures (F, σ)-invariantes.

3.1. Quelques rappels de dynamique directionnelle.

— Soit Σ un sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Pour un point $x \in \Sigma$, on définit relativement à Σ la *boule* centrée sur x de rayon ε et le *tube* de pente α centré sur l'orbite de x d'épaisseur ε.

Notation. — Soient $x \in \Sigma$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on note :

$$\begin{aligned} B_\Sigma(x, \varepsilon) &= \{y \in \Sigma : d_C(x, y) < \varepsilon\}, \\ E_\Sigma^\alpha(x, \varepsilon) &= \{y \in \Sigma : d_C(F^n \circ \sigma^{\lfloor n\alpha \rfloor}(x), F^n \circ \sigma^{\lfloor n\alpha \rfloor}(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

On peut alors définir la dynamique directionnelle suivant la pente α.

Définition. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC, $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'ensemble $Eq^\alpha(\Sigma, F)$ des *points de Σ-équicontinuité de pente α relativement à Σ* est défini par :

$$x \in Eq^\alpha(\Sigma, F) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ B_\Sigma(x, \delta) \subset E_\Sigma^\alpha(x, \varepsilon).$$

- (Σ, F) est *équicontinu de pente α* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Sigma,\ B_\Sigma(x, \delta) \subset E_\Sigma^\alpha(x, \varepsilon).$$

- (Σ, F) est *sensible aux conditions initiales de pente* α si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \forall x \in \Sigma,\ \exists y \in B_\Sigma(x,\delta) \setminus E^{\alpha}_{\Sigma}(x,\varepsilon).$$

- (Σ, F) est $\mathbb{N}$-*expansif de pente* α si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \Sigma,\ E^{\alpha}_{\Sigma}(x,\varepsilon) = \{x\}.$$

Comme l'information peut venir de la droite ou de la gauche, la notion d'expansivité peut être décomposée en expansivité à droite et expansivité à gauche :

- (Σ, F) est $\mathbb{N}$-*expansif à droite de pente* α s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x, y \in \Sigma$ tels que $x_{[0,+\infty)} \neq y_{[0,+\infty)}$ on ait $E^{\alpha}_{\Sigma}(x,\varepsilon) \cap E^{\alpha}_{\Sigma}(y,\varepsilon) = \emptyset$.
- (Σ, F) est $\mathbb{N}$-*expansif à gauche de pente* α s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x, y \in \Sigma$ tels que $x_{(-\infty,0]} \neq y_{(-\infty,0]}$ on ait $E^{\alpha}_{\Sigma}(x,\varepsilon) \cap E^{\alpha}_{\Sigma}(y,\varepsilon) = \emptyset$.

En s'inspirant de la classification de P. Kůrka [**Kůr97**] qui se base sur l'étude de la $\mathbb{N}$-action engendrée par l'automate cellulaire, on obtient dans [**Sab08**] une classification suivant une direction α donnée basée sur le fait qu'étant donnée une direction, un AC est soit sensible aux conditions initiales suivant cette direction, soit admet des points d'équicontinuité suivant cette direction. On s'intéresse alors aux ensembles de directions qui ont une propriété dynamique donnée. Cela revient à étudier les ensembles suivants :

Définition. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et Σ un sous décalage, on définit :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{A}(\Sigma,F) &=& \{\alpha \in \mathbb{R} : Eq^{\alpha}(\Sigma,F) \neq \emptyset\}, \\ & \mathbf{A}'(\Sigma,F) &=& \{\alpha \in \mathbb{R} : Eq^{\alpha}(\Sigma,F) = \Sigma\}, \\ & \mathbf{B}(\Sigma,F) &=& \{\alpha \in \mathbb{R} : (\Sigma,F) \text{ est } \mathbb{N}\text{-expansif de pente } \alpha\}, \\ & \mathbf{B}_d(\Sigma,F) &=& \{\alpha \in \mathbb{R} : (\Sigma,F) \text{ est } \mathbb{N}\text{-expansif à droite de pente } \alpha\}, \\ \text{et} & \mathbf{B}_g(\Sigma,F) &=& \{\alpha \in \mathbb{R} : (\Sigma,F) \text{ est } \mathbb{N}\text{-expansif de pente } \alpha\}. \end{array}$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\mathbf{A}'(\Sigma,F) \subset \mathbf{A}(\Sigma,F) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\Sigma,F) = \mathbf{B}_d(\Sigma,F) \cap \mathbf{B}_g(\Sigma,F).$$

Les principaux résultats de [**Sab08**] peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 ([**Sab08**]). — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC de voisinage $\mathbb{U} = [r,s]$ et $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage ayant la propriété faible de spécification. On est alors dans une des situations suivantes :*

C1. *$\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \mathbb{R}$, dans ce cas il existe une configuration σ-périodique z et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $F^N(x) = \sigma^i(z)$. De plus on a $\boldsymbol{B}_d(\Sigma,F) = \boldsymbol{B}_g(\Sigma,F) = \emptyset$.*

C2. *Il existe $\alpha \in [-s,-r] \cap \mathbb{Q}$ tel que $\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \boldsymbol{A}(\Sigma,F) = \{\alpha\}$, dans ce cas il existe m,p tels que la suite $(F^n \circ \sigma^{\lfloor \alpha n \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ soit ultimement périodique de prépériode m et de période p. On a alors $\boldsymbol{B}_g(F^m(\Sigma),F) =]-\infty,\alpha[$ et $\boldsymbol{B}_d(F^m(\Sigma),F) =]\alpha,+\infty[$.*

C3. *Il existe $\alpha', \alpha'' \in [-s,-r]$, $\alpha' < \alpha''$, tels que $]\alpha',\alpha''[\subset \boldsymbol{A}(\Sigma,F) \subset [\alpha'\alpha'']$. Dans ce cas $\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \boldsymbol{B}_d(\Sigma,F) = \boldsymbol{B}_g(\Sigma,F) = \emptyset$.*

C4. *Il existe $\alpha \in [-s,-r]$ tel que $\boldsymbol{A}(\Sigma,F) = \{\alpha\}$ et $\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \emptyset$. Dans ce cas $\boldsymbol{B}_g(\Sigma,F)$ et $\boldsymbol{B}_d(\Sigma,F)$ ne sont pas nécessairement vide mais $\boldsymbol{B}(\Sigma,F) = \emptyset$.*

C5. *Il existe $\alpha', \alpha'' \in [-s,-r]$, $\alpha' < \alpha''$, tel que $\boldsymbol{B}(\Sigma,F) =]\alpha',\alpha''[$, c'est le cône des directions expansives. Dans ce cas $\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \boldsymbol{A}(\Sigma,F) = \emptyset$.*

C6. *Toute les directions sont des directions sensibles aux conditions initiales et aucune est $\mathbb{N}$-expansive. Dans ce cas $\boldsymbol{A}'(\Sigma,F) = \boldsymbol{A}(\Sigma,F) = \boldsymbol{B}(\Sigma,F) = \emptyset$ mais $\boldsymbol{B}_g(\Sigma,F)$ et $\boldsymbol{B}_d(\Sigma,F)$ ne sont pas nécessairement vide*

3.2. AC équicontinu suivant au moins une direction. — On s'intéresse dans un premier temps aux classes **C1.** et **C2.** qui donnent le plus de contraintes topologiques.

Proposition 3.2. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire et $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage F-invariant ayant la proprité faible de spécification. Supposons que (Σ, F) soit dans la classe **C1.**. Il existe alors z une configuration σ-periodique de période p tel que*

$$\mathcal{M}_{F,\sigma}(\Sigma) = \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=0,p-1} \sigma^i(z) \right\}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 3.1, il existe une configuration σ-périodique z de σ-période p et $N \in \mathbb{N}$ tel que $F^N(\Sigma) = \{\sigma^i(z) : i \in [0, p-1]\}$. Ainsi pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$, on a $\Lambda_F(\mu) = \{\sigma^i(z) : i \in [0, p-1]\}$. Comme μ est σ-invariant, on en déduit le résultat. □

Remarque. — Dans la proposition précédente, si de plus on suppose que Σ a la propriété de spécification, alors il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\mu = \delta_{^\infty a^\infty}$.

Proposition 3.3. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire et $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous décalage F-invariant ayant la propriété faible de spécification. Supposons que (Σ, F) soit dans la classe **C2.** et considérons m et p, les deux entiers correspondant respectivement à la prépériode et à la période de la suite ultimement périodique $(F^n \circ \sigma^{\lfloor \alpha n \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors :*

$$\mathcal{M}_{F,\sigma}(\Sigma) = \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} F_*^i \mu : \mu \in \mathcal{M}_\sigma(F^m(\Sigma)) \right\}.$$

Démonstration. — Étant donné que $(F^n \circ \sigma^{\lfloor \alpha n \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique de prépériode m et de période p, on en déduit que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$ on a $F_*^m \mu \in \mathcal{M}_\sigma(F^m(\Sigma))$. Puis pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(F^m(\Sigma))$, la suite $(F_*^n \mu)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p. D'où le résultat. □

3.2.1. AC qui a des points d'équicontinuité suivant deux directions. — En s'inspirant de [**Gil87**], on peut définir une notion plus faible de points d'équicontinuité. Dans [**Sab07**], on généralise ces résultats à la dynamique directionnelle.

Définition. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$.

• Un point $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un point de μ-presque équicontinuité de pente α (noté $x \in Eq^\alpha(F, \mu)$) si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu(E^\alpha_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(x, \varepsilon)) > 0$.

• Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{A}^e)^{\mathbb{N}}$. La suite U est un mur μ-presque bloquant de pente α d'épaisseur e si $\mu(W^\alpha(U, 0)) > 0$ où

$$W^\alpha(U, i) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : F^n \circ \sigma^{\lfloor n\alpha \rfloor}(x)_{[0,e-1]} = u_n\} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

On a le théorème suivant qui caractérise les AC qui ont des points de μ-presque équicontinuité :

Théorème 3.4 ([**Sab08**]). — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC, $\alpha \in \mathbb{R}$ et μ une mesure σ-ergodique. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $Eq^\alpha(F, \mu) \neq \emptyset$ *;*
2. $\mu(Eq^\alpha(F, \mu)) = 1$ *;*
3. *pour tout $e \geq \max(\lfloor \alpha \rfloor + 1 + s, -\lfloor \alpha \rfloor - r + 1)$, il existe un mur U μ-presque bloquant de pente α et d'épaisseur e.*

On sait que (Σ, F) a des points déquicontinuité de pente α si et seulement si il existe une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{A}^e)^{\mathbb{N}}$ tel que $\Sigma \cap W^\alpha(U, 0)$ soit d'interieur non vide (i.e. il existe $u \in \mathcal{A}^*$ appelé mot bloquant de pente α et $p \in \mathbb{N}$ tels que $[u]_p \subset W^\alpha(U, 0)$) [**Sab08**]. Ainsi si μ charge un mot bloquant de pente α alors $Eq^\alpha(F, \mu) \neq \emptyset$. On en déduit que si (Σ, F) est dans la classe **C3.** alors toute mesure de support Σ admet au moins deux directions avec des points de μ-presque équicontinuité. Plus précisément, il est facile de voir que $Eq^\alpha(\mathrm{supp}(\mu), F) \subset Eq^\alpha(F, \mu)$.

Lemme 3.5 **([Sab08]).** — *Soient $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ et E un ensemble mesurable avec $\mu(E) > 0$. Pour μ-presque tout $x \in E$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(E \cap B(x, 2^{-n}))}{\mu(B(x, 2^{-n}))} = 1.$$

Ceci correspond à la densité métrique de E en x.

Théorème 3.6. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ une mesure σ-fortement mélangeante. Si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ admet deux directions de μ-presque équicontinuité alors il existe $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}$ tel que $\Lambda_F(\mu) = \{{}^\infty a^\infty : a \in \mathcal{A}_\infty\}$.*

Démonstration. — Soient U' et U'' deux murs μ-presque bloquants de pentes respectives α' et α'' avec $\alpha' < \alpha''$. Par σ-ergodicité de μ, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(W^{\alpha'}(U', 0) \cap W^{\alpha''}(U'', k)) > 0$. Par le lemme 3.5, il existe $x \in W^{\alpha'}(U', 0) \cap W^{\alpha''}(U'', k)$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(X) > 0$ où

$$X = W^{\alpha'}(U', 0) \cap W^{\alpha''}(U'', k) \cap [x_{[-r,k+r]}]_{-r}.$$

De plus, pour tous $z \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $F^n(x)_i = F^n(z)_i$ pour tout $i \in [\lfloor\alpha' n\rfloor, \lfloor\alpha'' n\rfloor + k]$.

Supposons que $\alpha' \leq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme μ est σ-fortement mélangeante, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq l$ on ait $\mu(X \cap \sigma^{-j}(X)) > 0$. Par σ-ergodicité de μ, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble

$$Y_l^\varepsilon = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \exists j \in [l, l+h] \text{ tel que } \sigma^j(y) \in X\}$$

vérifie $\mu(Y_l^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. Considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor\alpha' N\rfloor + l + h \leq \lfloor\alpha'' N\rfloor + k$, ceci est possible car $\alpha' < \alpha''$; cette inégalité est ensuite vérifiée pour tout $n \geq N$. Soient $n \geq N$ et $y \in Y_l^\varepsilon$, il existe $j \in [l, l+h]$ tel que $\sigma^j(y) \in X$. Ainsi pour tout $z \in \sigma^{-j}(X)$, on a $F^n(y)_i = F^n(z)_i$ pour tout $i \in [\lfloor\alpha' n\rfloor + j, \lfloor\alpha'' n\rfloor + k + j]$. Comme $\mu(X \cap \sigma^{-j}(X)) > 0$, il existe $z \in X \cap \sigma^{-j}(X)$. D'où :

$$F^n(y)_i = F^n(z)_i = F^n(x)_i \text{ pour tout } i \in [\lfloor\alpha' n\rfloor, \lfloor\alpha'' n\rfloor + k] \cap [\lfloor\alpha' n\rfloor + j, \lfloor\alpha'' n\rfloor + k + j] \underset{(*)}{\neq} \emptyset.$$

où $(*)$ découle de l'inégalité vérifiée pour tout $n \geq N$. Il existe donc $a \in \mathcal{A}$ vérifiant :

$$F_*^n\mu[a]_{\lfloor\alpha' n\rfloor + j} = F_*^n\mu[a] \geq \mu(Y_l^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

On en déduit que si un mot u n'est pas une puissance d'un élément de $\mathcal{A}$ alors $(F_*^n\mu[u])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ceci prouve le résultat si $\alpha' < 0$.

Le cas où $\alpha' \geq 0$ se traite de la même manière.

□

De ce théorème, on tire un résultat sur les mesures (F, σ)-invariantes :

Corollaire 3.7. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ et $\mu \in \mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ σ-fortement mélangeante. Si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ admet deux directions de μ-presque équicontinuité alors il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\mu = \delta_{{}^\infty a^\infty}$.*

Ainsi, si (Σ, F) est dans la classe **C3.** et que μ est une mesure σ-fortement mélangeante de support total alors il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\mu = \delta_{{}^\infty a^\infty}$.

Remarque. — Il est nécessaire que μ soit σ-fortement mélangeante, par exemple si on considère l'automate cellulaire $(\mathcal{A}_{184}, F_{184})$ définit dans la sous-section 2.3.2, la mesure $\mu = 1/2(\delta_{{}^\infty(01)^\infty} + \delta_{{}^\infty(10)^\infty})$ est σ-ergodique mais non portée par une configuration uniforme.

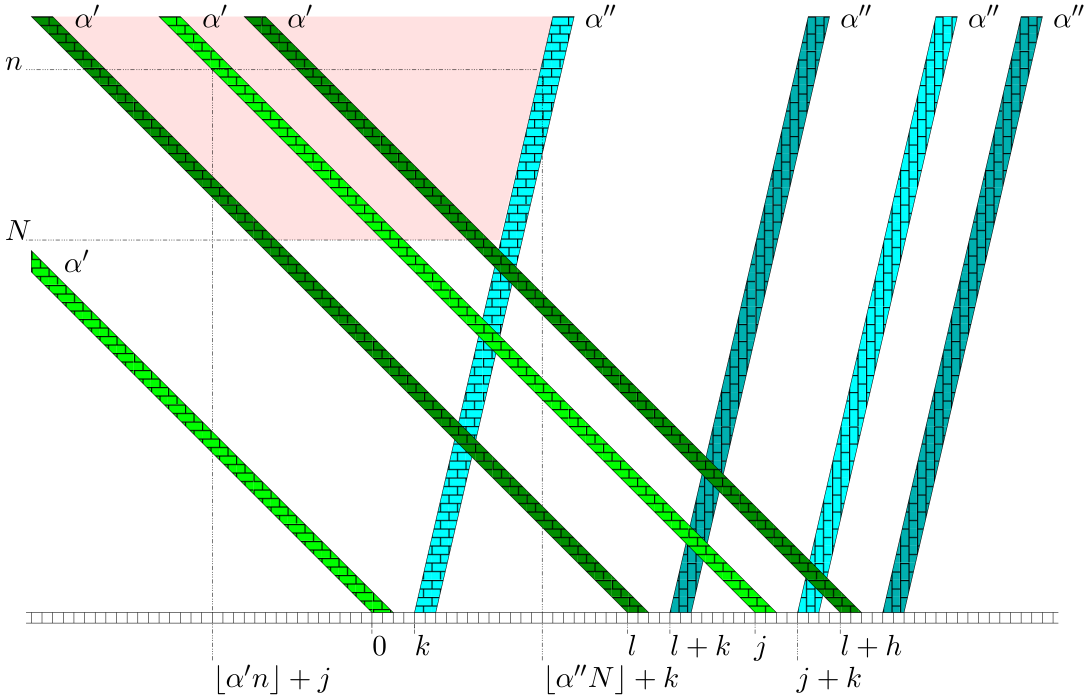

FIGURE 1. μ-presque équicontinuité de pente α' et α'' et $\Lambda_\mu(F)$.

Exemple 3.1. — Soit $\mathcal{A} = \{0,1\}$, on considère l'AC défini par $F(x)_i = x_{i-1}x_ix_{i+1}$ pour tous $i \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Cet AC est dans la classe **C2.**. Le mot 0 est un mot bloquant de pente 1 et -1, on en déduit que la seule mesure (F,σ)-invariante σ-fortement mélangeante vérifiant $\mu([0]_0) > 0$ est $\delta_{\infty 0^\infty}$. Dans ce cas particulier, il suffit que μ soit σ-ergodique pour obtenir le résultat.

3.2.2. AC avec un cône d'expansivité. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage transitif de type fini F-invariant. Supposons que (Σ, F) soit $\mathbb{N}$-expansif suivant une direction. D'après le théorème 3.1, on est dans la classe **C5.**, il existe donc $p/q \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$) tel que (Σ, F) soit $\mathbb{N}$-expansif de direction p/q. Cela revient à dire que $(\Sigma, F^q \circ \sigma^p)$ est $\mathbb{N}$-expansif de direction 0. On peut alors utiliser les résultats de Nasu [**Nas95**]. Ainsi $(\Sigma, F^q \circ \sigma^p)$ est conjugué à un décalage complet. De plus, l'unique mesure d'entropie maximale sur (Σ, σ), la mesure de Parry λ_Σ, est aussi la mesure d'entropie maximale de $(\Sigma, F^q \circ \sigma^p)$.

On ne connaît pas de résultats généraux sur les mesures (F,σ)-invariantes lorsque l'automate cellulaire est dans la classe **C5.**. Cependant les exemples étudiés dans cette classe montre une certaine rigidité dans l'ensemble des mesures (F,σ)-invariantes. Cela se traduit dans un premier temps par des formules d'entropie qui lient l'entropie directionnelle suivant des directions distinctes (section 4.5). Cette rigidité est toutefois assez bien comprise dans le cas des AC algébriques où on montre que certaine conditions forcent une mesure (F,σ)-invariante à être la mesure d'entropie maximale (section 5).

4. Entropie métrique directionnelle et mesures (F,σ)-invariantes

On s'intéresse ici à l'entropie directionnelle. Après avoir donné rapidement la définition de l'entropie métrique directionnelle pour une mesure (F,σ)-invariante, on s'intéresse aux contraintes imposées par la dynamique directionnelle sur l'entropie directionnelle. En particulier, pour AC bipermutatifs, l'entropie directionnelle est liée à l'entropie du décalage (section 4.4). Ceci est principalement dûe à un transfert maximal d'information dans toutes les directions. Cette formule va être le point de départ de résultats de rigidité tels que nous allons les voir à la section 5. Dans le cas où l'automate cellulaire a un cône d'expansivité (la classe **C5** du théorème 3.1), on obtient seulement des inégalités mais qui peuvent être pressenties comme un début de résultats de rigidité.

4.1. Définition de l'entropie directionnelle. — Il est facile de voir que l'entropie de la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action (F,σ) dans sa totalité est nulle (voir [**Sab06**] pour une étude détaillée de la notion d'entropie dans les AC). Cependant, la structure spatio-temporelle de l'AC a conduit J. Milnor à définir l'entropie directionnelle [**Mil88**].

Définition. — Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}},F)$ un AC, $\mu\in\mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On définit *l'entropie métrique suivant la direction α de la partition $\mathcal{P}$* finie mesurable par :

$$h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{N-1}F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}\mathcal{P}\right),$$

La limite existe bien car la suite $\left(H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{N-1}F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}\mathcal{P}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. De manière équivalente (voir Theorem 4.14 de [**Wal82**]), on a :

$$h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P})=\lim_{N\to\infty}H_\mu\left(\mathcal{P}|\bigvee_{n=1}^{N}F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})\right).$$

En considérant la suite croissante de partitions $(\mathcal{P}_{[-l,l]})_{l\in\mathbb{N}}$, on rapelle que $\mathcal{P}_{[-l,l]}=\{[u]_{[-l,l]}:u\in\mathcal{A}^{[-l,l]}\}$, on définit *l'entropie métrique suivant la direction α* par :

$$h_\mu(F,\alpha)=\lim_{l\to\infty}h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P}_{[-l,l]}).$$

L'entropie directionnelle quantifie la complexité de la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action dans une direction donnée. On peut rapprocher cette notion de celle des exposants de Lyapunov introduits dans [**She92**] et [**Tis00**] qui mesurent les transferts d'informations.

4.2. Majoration dans le cas général. — Si on considère un AC quelconque sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on peut déterminer une majoration de son entropie en fonction de son voisinage et de l'entropie du décalage.

Proposition 4.1. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}},F)$ un AC de voisinage $\mathbb{U}=[r,s]$, $\mu\in\mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a :*

$$h_\mu(F,\alpha)\leq\big(\max(s+\alpha,0)-\min(r+\alpha,0)\big)\,h_\mu(\sigma).$$

Démonstration. — Soient $l\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$. On pose

$$r_N=\min(rN+\lfloor N\alpha\rfloor,0)\quad\text{et}\quad s_N=\max(sN+\lfloor N\alpha\rfloor,0).$$

La connaissance de $x_{[r_N-l,s_N+l]}$ détermine $(F^n\circ\sigma^{\lfloor n\alpha\rfloor}(x)_{[-l,l]})_{n\in[0,N]}$ (voir figure 2). Cela signifie que $\mathcal{P}_{[r_N-l,s_N+l]}$ est un raffinement de la partition $\bigvee_{n=0}^{N}F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})$. On a alors :

$$\begin{aligned}h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P}_{[-l,l]}) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{N}F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})\right)\\ &\leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}H_\mu(\mathcal{P}_{[r_N-l,s_N+l]})\\ &= \lim_{N\to\infty}-\frac{s_N-r_N+2l}{N}\frac{1}{s_N-r_N+2l}\sum_{u\in\mathcal{A}^{(s_N-r_N)+2l}}\mu([u])\log(\mu[u])\\ &= \big(\max(s+\alpha,0)-\min(r+\alpha,0)\big)\,h_\mu(\sigma).\end{aligned}$$

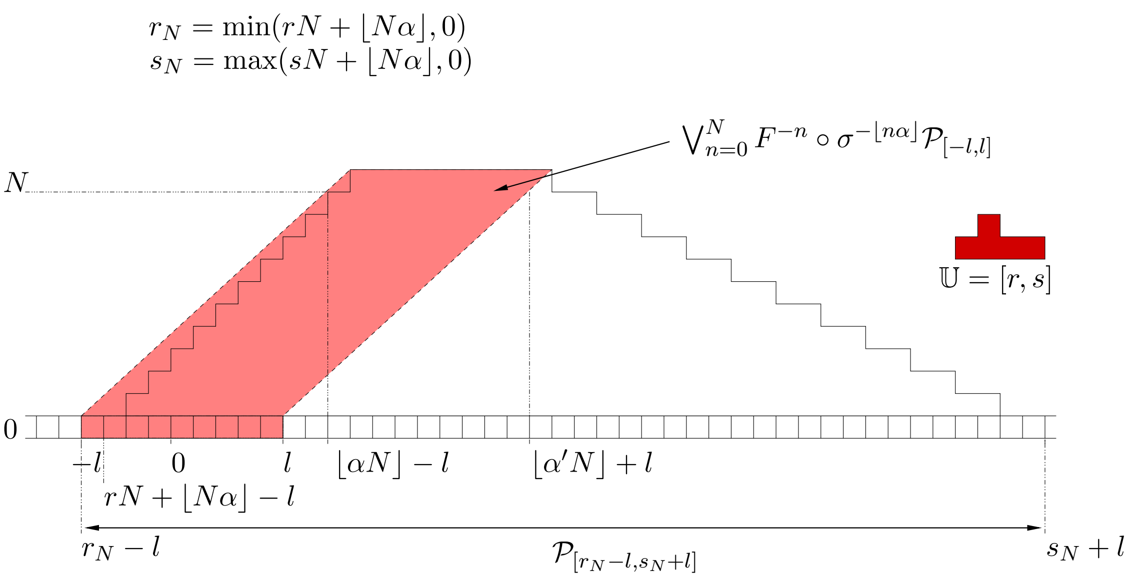

FIGURE 2. Inégalité vérifiée par l'entropie.

On en déduit que :

$$h_\mu(F, \alpha) = \lim_{l \to \infty} h_\mu(F, \alpha, \mathcal{P}_{[-l,l]}) \leq \big(\max(s + \alpha, 0) - \min(r + \alpha, 0) \big)\, h_\mu(\sigma).$$

□

4.3. Entropie et directions de μ-presque équicontinuité. —

Proposition 4.2. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $\mu \in \mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ une mesure σ-ergodique. On a $h_\mu(F, \alpha) = 0$ pour toute direction de μ-presque équicontinuité α.*

Démonstration. — Soient $\alpha \in \mathbf{A}(F, \mu)$ et $l \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_{[-l,l]}^N = \bigvee_{n=0}^{N-1} F^{-n} \circ \sigma^{-\lfloor n\alpha \rfloor} \mathcal{P}_{[-l,l]}$. Par définition de l'entropie directionnelle d'une partition, on a :

$$\begin{aligned} h_\mu(F, \alpha, \mathcal{P}_{[-l,l]}) &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} H_\mu \left(\bigvee_{n=0}^{N-1} F^{-n} \circ \sigma^{-\lfloor n\alpha \rfloor} \mathcal{P}_{[-l,l]} \right) \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int I_{\mathcal{P}_{[-l,l]}^N}(x) d\mu(x) \\ &\leq \int \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} I_{\mathcal{P}_{[-l,l]}^N}(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on note $P_l^N(x)$ l'élément de $\mathcal{P}_{[-l,l]}^N$ contenant x. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $E_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}^{\alpha}(x, 2^{-l}) \subset P_l^N(x)$. Comme $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est μ-presque équicontinu de pente α et μ est σ-ergodique, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on a $\mu(E_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}^{\alpha}(x, 2^{-l})) > 0$. Ainsi, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{N} I_{\mathcal{P}_{[-l,l]}^N}(x) = \frac{-\log(\mu(P_l^N(x)))}{N} \leq \frac{-\log(\mu(E_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}^{\alpha}(x, 2^{-l})))}{N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par intégration, on a $h_\mu(F, \alpha, \mathcal{P}_{[-l,l]}) = 0$ d'où $h_\mu(F, \alpha) = 0$. □

4.4. Formules d'entropie pour les AC permutatifs. — Bien que l'entropie ne soit pas calculable dans le cas général, pour certaines classes ayant une combinatoire forte, on peut donner une formule explicite de l'entropie mesurée et topologique. Pour les AC permutatifs, leur combinatoire permet une égalité de partition là où on avait seulement un raffinement dans la proposition 4.1.

Proposition 4.3. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC permutatif à droite de voisinage $\mathbb{U} = [r, s]$, où s est compatible avec la permutativité, $\mu \in \mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ et $\alpha \geq -r$. On a :*

$$h_\mu(F, \alpha) = (s + \alpha)\, h_\mu(\sigma)$$

Démonstration. — Soient $N \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. On pose

$$r_N = \min(\lfloor N\alpha \rfloor + rN, 0) \quad \text{et} \quad s_N = \max(\lfloor N\alpha \rfloor + sN, 0).$$

Par permutativité à droite, comme $\alpha \geq -r$, pour tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ il est équivalent de connaître $(F^n \circ \sigma^{\lfloor n\alpha \rfloor}(x)_{[-l,l]})_{n \in [0,N]}$ et $x_{[r_N - l, s_N + l]} = x_{[-l, s_N + l]}$. Cela signifie que :

$$\bigvee_{n=0}^{N} F^{-n} \circ \sigma^{-\lfloor n\alpha \rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]}) = \mathcal{P}_{[-l, s_N + l]}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
h_\mu(F, \alpha, \mathcal{P}_{[-l,l]}) &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{N} F^{-n} \circ \sigma^{-\lfloor n\alpha \rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})\right) \\
&= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} H_\mu(\mathcal{P}_{[-l, s_N + l]}) \\
&= \lim_{N \to \infty} -\frac{s_N + 2l}{N} \frac{1}{s_N + 2l} \sum_{u \in \mathcal{A}^{s_N + 2l}} \mu([u]) \log(\mu[u]) \\
&= (s + \alpha)\, h_\mu(\sigma).
\end{aligned}$$

On en déduit que $h_\mu(F, \alpha) = \lim_{l \to \infty} h_\mu(F, \alpha, \mathcal{P}_{[-l,l]}) = (s + \alpha)\, h_\mu(\sigma)$.

□

On obtient de même des formules symétriques pour les AC permutatifs à gauche. Ainsi si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est un AC permutatif à gauche de voisinage $\mathbb{U} = [r, s]$, où r est compatible avec la permutativité, on obtient les formules suivantes pour $\alpha \leq -s$:

$$h_\mu(F, \alpha) = -(r + \alpha)\, h_\mu(\sigma).$$

Lorsque l'AC considéré est bipermutatif, on obtient une formule pour $\alpha \notin]-s, -r[$. Une formule vérifiée pour tout α pourrait être démontrée par un calcul explicite comme précédemment. Dans le cas de l'entropie directionnelle métrique, on démontre un lemme qui nous sera utile dans le section 5 sur les mesures (F, σ)-invariantes. Ce lemme montre en particulier que l'entropie directionnelle est constante pour $\alpha \in [-s, -r]$.

Lemme 4.4. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC bipermutatif dont le voisinage de bipermutativité est $\mathbb{U} = [r, s]$, $\mu \in \mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ et $\alpha \in [-s, -r]$. Soit $\mathfrak{B}$ la sigma-algèbre des boréliens de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on pose $\mathfrak{B}_1 = F^{-1}(\mathfrak{B})$. Alors*

$$h_\mu(F, \alpha) = H_\mu(\mathcal{P}_{[0, s-r-1]} | \mathfrak{B}_1).$$

Démonstration. — On a $h_\mu(F,\alpha) = \lim_{l\to\infty} h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P}_{[-l,l]})$ avec :

$$\begin{aligned} h_\mu(F,\alpha,\mathcal{P}_{[-l,l]}) &= \lim_{N\to\infty} H_\mu\left(\mathcal{P}_{[-l,l]} | \bigvee_{n=1}^{N} F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})\right) \\ &= H_\mu\left(\mathcal{P}_{[-l,l]} | \bigvee_{n=1}^{\infty} F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]})\right). \end{aligned}$$

Pour $N\in\mathbb{N}$, on pose

$$r_N = rN + \lfloor N\alpha\rfloor \quad \text{et} \quad s_N = sN + \lfloor N\alpha\rfloor.$$

Soit $l \geq s-r$. Par bipermutativité de F, pour $N\geq 1$, il est équivalent de connaître $(F^n\circ\sigma^{\lfloor n\alpha\rfloor}(x)_{[-l,l]})_{n\in[1,N]}$ et $F(x)_{[r_N-l,s_N+l]}$; cela signifie que l'on a $\bigvee_{n=1}^{N} F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]}) = F^{-1}(\mathcal{P}_{[r_N-l,s_N+l]})$. En prenant la limite lorsque $N\to\infty$, avec la convention $\infty\cdot 0 = 0$, on en déduit que :

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}(\mathcal{P}_{[-l,l]}) = F^{-1}(\mathcal{P}_{[\infty.(r+\alpha)-l,\infty.(s+\alpha)+l]}).$$

Ainsi on a :

$$h_\mu(F,\mathcal{P}_{[-l,l]}) = H_\mu(\mathcal{P}_{[-l,l]}|F^{-1}\mathcal{P}_{[\infty.(r+\alpha)-l,\infty.(s+\alpha)+l]}).$$

De manière similaire, par bipermutativité de F, la connaissance de $F(x)_{[\infty\cdot(r+\alpha)-l,\infty\cdot(s+\alpha)+l]}$ et $x_{[0,s-r-1]}$ détermine $x_{[-l,l]}$. On en déduit que :

$$\mathcal{P}_{[0,s-r-1]}\vee F^{-1}(\mathcal{P}_{[\infty.(r+\alpha)-l,\infty.(s+\alpha)+l]}) = \mathcal{P}_{[-l,l]}\vee F^{-1}(\mathcal{P}_{[\infty.(r+\alpha)-l,\infty.(s+\alpha)+l]}).$$

Donc,

$$h_\mu(\mathcal{P}_{[-l,l]},F) = H_\mu(\mathcal{P}_{[0,s-r+1]}|F^{-1}(\mathcal{P}_{[\infty.(r+\alpha)-l,\infty.(s+\alpha)+l]})).$$

En prenant la limite lorsque $l\to\infty$ et en utilisant le théorème de convergence des martingales, on obtient $h_\mu(F) = H_\mu(\mathcal{P}_{[0,s-r-1]}|\mathfrak{B}_1)$. □

Pour les AC bipermutatifs, on a les formules générales suivantes :

Corollaire 4.5. — *Soient $(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)$ un AC bipermutatif de voisinage compatible avec la permutativité $\mathbb{U}=[r,s]$, $\mu\in\mathcal{M}_{F,\sigma}(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a :*

$$h_\mu(F,\alpha) = \big(\max(s+\alpha,0)-\min(r+\alpha,0)\big)\,h_\mu(\sigma).$$

Remarque. — Les AC bipermutatifs réalisent donc l'égalité dans les formules de la proposition 4.1. En fait la permutativité permet d'obtenir une égalité à la place de l'inégalité $(*)$ dans la preuve de la proposition 4.1.

Ces formules d'entropie sont à rapprocher de la notion d'exposants de Lyapunov introduite par M. A. Shereshevsky [**She92**] et P. Tisseur [**Tis00**]. Dans le cas des AC permutatifs les exposants de Lyapunov correspondent donc aux extrémités du voisinage de permutativité.

4.5. Entropie et directions d'expansivité. —

Théorème 4.6. — *Soient $(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)$ un AC et $\mu\in\mathcal{M}_{F,\sigma}(\Sigma)$. On a $h_\mu(F,\alpha)>0$ pour tout $\alpha\in\boldsymbol{B}^d(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)\cup\boldsymbol{B}^g(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)$ si et seulement si $h_\mu(\sigma)>0$.*

On rappelle que si $\boldsymbol{B}(\Sigma,F)\neq\emptyset$ alors $\boldsymbol{B}^d(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)\cup\boldsymbol{B}^g(\mathcal{A}^\mathbb{Z},F)=\mathbb{R}$.

Démonstration. — Supposons que $h_\mu(\sigma)>0$ et considérons $\alpha\in\mathbf{B}^d(\Sigma,F)$. D'après la définition de l'expansivité à droite, il existe $r_\varepsilon, r_T\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $x\in\Sigma$, la connaissance de $(F^k\circ\sigma^{\lfloor k\alpha\rfloor}(x)_[0,r_\varepsilon])_{k\in[0,r_T]}$ permet de déterminer $x_[0,r_\varepsilon+1]$.

Soit $l \geq r_\varepsilon$, par induction, on montre facilement que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la connaissance de $(F^k \circ \sigma^{\lfloor k\alpha \rfloor}(x)_{[-l,l]})_{k\in[0,Nr_T]}$ permet de déterminer $x_{[-l,r_\varepsilon+N]}$. On en déduit que $\mathcal{P}_{[-l,l+N]} \prec \bigvee_{n=0}^{Nr_T} F^{-n} \circ \sigma^{-\lfloor n\alpha \rfloor}\mathcal{P}_{[-l,l]}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
h_\mu(F,\alpha) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{Nr_T} H_\mu\left(\bigvee_{n=0}^{r_T N-1} F^{-n}\circ\sigma^{-\lfloor n\alpha\rfloor}\mathcal{P}_{[-l,l]}\right)\\
&\geq \lim_{N\to\infty} \frac{N+2l}{Nr_T}\frac{1}{N+2l} H_\mu\left(\mathcal{P}_{[-l,l+N]}\right)\\
&\geq \frac{1}{r_T} h_\mu(\sigma).
\end{aligned}$$

On obtient une formule minorant l'entropie topologique de direction α en fonction de l'entropie du décalage. Si $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ est de voisinage $\mathbb{U} = [r,s]$, par l'inégalité de la proposition 4.1 on en déduit une majoration. On a alors l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{r_T^\alpha} h_\mu(\sigma) \leq h_\mu(F,\alpha) \leq \big(\max(s+\alpha,0) - \min(r+\alpha,0)\big)\, h_\mu(\sigma).$$

On a une démonstration symétrique lorsque $\alpha \in \mathbf{B}^g(\Sigma, F)$. □

5. Problème à la Furstenberg pour les AC additifs

5.1. Position du problème. — Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore identifié à $[0,1)$. On considère la multiplication par 2 et 3 sur $\mathbb{T}$ définit par :

$$\begin{array}{rccll} \mathbf{T}_2 : & \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} & \\ & x & \longmapsto & 2x & \bmod 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccll} \mathbf{T}_3 : & \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} & \\ & x & \longmapsto & 3x & \bmod 1. \end{array}$$

On considère l'action conjointe $(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$ sur $\mathbb{T}$. La mesure de Lebesgue λ est clairement $(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$-invariante et Furstenberg [**Fur67**] conjecture que les mesures de probabilité sur le tore $(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$-invariantes sont exactement la mesure de Lebesgue et les mesures portées par les orbites $(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$-périodiques. D. J. Rudolph montre dans [**Rud90**] que si une mesure est $(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$-invariante, ergodique suivant une direction et d'entropie positive suivant une autre direction, alors c'est nécessairement la mesure de Lebesgue. Le problème de caractériser les mesures d'entropie nulle est encore ouvert. Il existe d'autres approches plus algébriques de ce problème. K. Schmidt [**Sch95**] et plus récemment M. Einsiedler [**Ein05**] se sont intéressés à l'étude des mesures invariantes par une $\mathbb{Z}^d$-action sur un groupe zéro-dimensionnel, comme l'exemple de Ledrappier [**Led78**].

Pour un AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$, la mesure de Bernoulli uniforme joue un rôle important dans l'étude des mesures (F,σ)-invariantes. Déjà, d'après le théorème 2.1, on sait qu'un AC est surjectif si et seulement si la mesure de Bernoulli uniforme est (F,σ)-invariante. De plus, D. Lind [**Lin84**] a montré que la moyenne de Cesàro des itérés par $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \mathrm{Id}+\sigma)$ d'une mesure de Bernoulli quelconque converge vers la mesure de Bernoulli uniforme. Ce résultat a été généralisé à une classe d'automates algébriques et une classe de mesures plus large avec des outils issus des processus stochastiques dans [**MM98**] et [**FMMN00**], et par des méthodes d'analyse harmonique dans [**PY02**] et [**PY04**].

Comme pour la mesure de Lebesgue dans le problème de Furstenberg, on souhaite trouver un résultat de rigidité pour la mesure de Bernoulli uniforme. C'est à dire, on rajoute des conditions raisonnables qui imposent à une mesure (F,σ)-invariante d'être la mesure de Bernoulli uniforme. Afin que F et σ interagissent, il faut au moins supposer que F soit non-trivial, on rappelle que cela signifie que le plus petit voisinage permettant de définir F n'est pas réduit à un singleton. De plus, nous limitons notre étude à des AC qui ont des propriétés algébriques et combinatoires fortes : les AC algébriques bipermutatifs. Dans ce cas, la mesure de Bernoulli uniforme est la mesure de Haar sur $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$. B. Host, A. Maass et S. Martínez ont commencé à rechercher des résultats de rigidité pour des AC de la forme $F = a\ \mathrm{Id} + b\ \sigma$, définis sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ avec $a, b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Ils ont montré deux théorèmes avec des hypothèses différentes sur la mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Le premier suppose la σ-ergodicité de la mesure :

Théorème 5.1 **([HMM03])**. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC affine bipermutatif de plus petit voisinage $\mathbb{U} = [0, 1]$ avec $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour σ ;*
2. *$h_\mu(F) > 0$.*

Alors $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$.

Le second théorème de [**HMM03**] remplace l'hypothèse d'ergodicité de σ par l'ergodicité de la $\mathbb{Z}^2$-action (F, σ). Cependant, il faut rajouter une condition technique que doit vérifier la sigma-algèbre $\mathcal{I}_\mu(\sigma)$ des ensembles invariants modulo μ pour des puissances de σ :

Théorème 5.2 **([HMM03])**. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC affine bipermutatif de plus petit voisinage $U = [0, 1]$ avec $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour la $\mathbb{Z}^2$-action (F, σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{p(p-1)}) \mod \mu$;*
3. *$h_\mu(F) > 0$.*

Alors $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$.

En s'inspirant de la démonstration du théorème 5.1, M. Pivato donne dans [**Piv05**] un résultat pour tout AC algébrique bipermutatif de rayon 1 mais rajoute des conditions supplémentaires sur la mesure et le noyau de F :

Théorème 5.3 **([Piv05])**. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique bipermutatif de plus petit voisinage $U = [0, 1]$. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Supposons que :*

1. *μ est totalement ergodique pour σ ;*
2. *$h_\mu(F) > 0$;*
3. $\mathrm{Ker}(F)$ *ne contient pas de sous-groupe σ-invariant.*

Alors $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$.

Remarque. — En fait le théorème proposé par [**Piv05**] est plus fort puisque il considère les AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ où $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un un groupe pas nécessairement commutatif et F un morphisme sur ce groupe.

Les théorèmes précédents ont des hypothèses différentes et ne peuvent pas directement être comparés. Les théorèmes 5.1 et 5.2 ont des hypothèses faibles sur la mesure mais se restreignent à une classe particulière d'AC : ceux de la forme $F = a\mathrm{Id} + b\sigma$ sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ avec p premier. Le théorème 5.3 couvre une classe plus grande d'AC mais les hypothèses sur la mesure sont plus fortes. De plus, la condition sur le noyau de F n'est pas optimale. Pour l'améliorer, on introduit dans [**Sab07**] la suite des noyaux des itérés de F par rapport à Σ, un sous-groupe fermé (F, σ)-invariant, c'est à dire $D_n^\Sigma = \mathrm{Ker}(F^n) \cap \Sigma$. On vérifie que $(D_n^\Sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite corissante de sous-groupes de Σ. On note $D_\infty^\Sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n^\Sigma$ et $\partial D_{n+1}^\Sigma = D_{n+1}^\Sigma \setminus D_n^\Sigma$. La démonstration du théorème 5.2 dans [**HMM03**] donne une structure de preuve qui modulo de profonds changements permet de montrer le théorème de rigidité suivant :

Théorème 5.4 **([Sab07])**. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique bipermutatif non-trivial. Soit Σ un sous-groupe fermé (F, σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout facteur premier de* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})$ *divise k. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ avec* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$. *Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour la $\mathbb{Z}^2$-action induite par (F,σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_1})$ où p_1 est la plus petite période commune aux éléments de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_\mu(F) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini σ-invariant de $D_\infty^\Sigma(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n)\cap\Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

Ce théorème généralise les théorèmes 5.2 et 5.3 lorsque $\mathcal{A}$ est un groupe cyclique et $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ le groupe produit. Pour obtenir une généralisation du théorème 5.3 lorsque $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ est un groupe abélien quelconque, on doit avoir une hypothèse plus faible sur $D_\infty^\Sigma(F)$. Cependant, afin d' adapter la preuve du théorème précédent, il est nécessaire de faire des restrictions sur la mesure de probabilité et sur les propriétés algébriques de l'action. Nous n'avons pas pu obtenir un théorème unique.

Théorème 5.5 **([Sab07])**. — *Soit $(\mathcal{A}^\mathbb{Z}, F)$ un AC algébrique bipermutatif non-trivial. Soit Σ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout facteur premier de* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})$ *divise k. Soit μ une mesure de probabilité (F,σ)-invariante sur $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ avec* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$. *Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour σ ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_1})$ où p_1 est la plus petite période commune aux éléments de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_\mu(F) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini (F,σ)-invariant de $D_\infty^\Sigma(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n)\cap\Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

Le corollaire suivant transpose le théorème 5.4 à un facteur cellulaire.

Corollaire 5.6. — *Soit $(\mathcal{A}^\mathbb{Z}, F)$ un AC algébrique bipermutatif. Soit Σ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ tel qu'il existe un morphisme continu et surjectif $\pi : \mathcal{A}^\mathbb{Z} \to \Sigma$ qui commute avec F et σ ((Σ,σ,F) est un facteur dynamique et algébrique de $(\mathcal{A}^\mathbb{Z},\sigma,F)$). Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout facteur premier de* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})$ *divise k. Soit μ un mesure de probabilité (F,σ)-invariante sur $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$. Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action (F,σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_1})$ avec p_1 la plus petite période commune à tous les élements de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_{\pi\mu}(F) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini σ-invariant de $D_\infty^\Sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n)\cap\Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\pi\mu = \lambda_\Sigma$.

5.2. Discussions sur les hypothèses des théorème. — Il n'est pas facile de comparer les hypothèses des théorèmes 5.4 et 5.5 avec celles des théorèmes antérieurs (5.1, 5.2 et 5.3). Nous allons voir comment ces deux théorèmes généralisent les théorèmes 5.2 et 5.3, mais les hypothèses d'ergodicité ne peuvent pas être comparées à celles du théorème 5.1.

5.2.1. Classes d'AC considérées. — Les théorèmes 5.4 et 5.5 considèrent des AC algébriques bipermutatifs sans restriction sur le voisinage. La bipermutativité est principalement utilisée pour prouver la formule d'entropie du lemme 4.4. Une telle formule peut être espérée pour un AC expansif, ce serait un bon départ pour montrer des résultats de rigidité. On peut remarquer que la preuve pour le problème de Furstenberg dans [**Rud90**] commence par une formule similaire.

Comme on considère des mesures σ-invariantes, on peut supposer que le voisinage de l'AC est $\mathbb{U} = [0,r]$. On peut alors se demander si on ne peut pas réduire ce voisinage et considérer seulement des AC de voisinage $\mathbb{U} = [0,1]$. En groupant les cellules de manière adéquate, il est facile de montrer la proposition suivante.

Proposition 5.7. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC de voisinage $\mathbb{U} = [0, r]$. Il existe un AC $((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}, G)$ de voisinage $\mathbb{U} = [0, 1]$ tel que le système dynamique $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ soit conjugué à $((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}, G)$ via la conjugaison*

$$\phi_r : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to ((x_{[ri,ri+r-1]})_{i\in\mathbb{Z}}) \in (\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F) \text{ est bipermutatif} &\iff ((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}, G) \text{ est bipermutatif;}\\ (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F) \text{ est algébrique} &\iff ((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}, G) \text{ est algébrique;}\\ (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F) \text{ est linéaire} &\iff ((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}, G) \text{ est linéaire.}\end{aligned}$$

Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ est σ-totalement ergodique alors $\phi_r\mu \in \mathcal{M}((\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}})$ est $\sigma_{(\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}}$-totalement ergodique. De plus, par conjugaison, $h_\mu(F) > 0$ est équivalent à $h_{\phi_r\mu}(G) > 0$. Ainsi, comme le suggère M. Pivato [**Piv05**], le théorème 5.3 s'adapte aux AC algébriques bipermutatifs sans restriction sur le voisinage :

Corollaire 5.8. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique bipermutatif de voisinage quelconque. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Supposons que :*

1. *μ totalement ergodique pour σ ;*
2. *$h_\mu(F) > 0$;*
3. $\mathrm{Ker}(F)$ *ne contient pas de sous-groupe σ-invariant.*

Alors $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$.

Cette correspondance fonctionne seulement lorsque μ est supposée σ-totalement ergodique. En effet si μ est seulement considérée σ-ergodique, la mesure $\phi_r\mu$ n'est pas nécessairement $\sigma_{(\mathcal{A}^r)^{\mathbb{Z}}}$-ergodique. On ne peut donc pas utiliser cet argument dans le cas des théorèmes 5.4 et 5.5.

5.2.2. Propriétés d'ergodicité de l'action. — Les hypothèses (1) et (2) des théorèmes 5.4 et 5.5 caractérisent l'ergodicité de l'action (F, σ) sur l'espace mesuré $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{B}, \mu)$. Comme on souhaite caractériser des mesures (F, σ)-invariantes, par le théorème de décomposition ergodique, il est naturel de supposer que μ est au moins (F, σ)-ergodique. Pour une mesure de probabilité (F, σ)-invariante μ, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}\mu \text{ est } (F,\sigma)\text{-totalement ergodique} &\Rightarrow \mu \text{ est } \sigma\text{-totalement ergodique}\\ &\Rightarrow \mu \text{ est } \sigma\text{-ergodique} \Rightarrow \mu \text{ est } (F,\sigma)\text{-ergodique;}\end{aligned}$$

De plus :

$$\mu \text{ est } \sigma\text{-totalement ergodique} \Rightarrow \mu \text{ est } (F,\sigma)\text{-ergodique et } \mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^k) \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Ainsi, l'hypothèse (1) du théorème 5.3 implique les hypothèses (1) et (2) du théorème 5.5 qui impliquent les hypothèses (1) et (2) du théorème 5.4. Cependant, l'hypothèse d'ergodicité (1) du théorème 5.1 ne peut pas être comparée aux hypothèses d'ergodicité du théorème 5.4. En effet, nous connaissons des mesures de probabilité (F, σ)-ergodiques vérifiant $\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^k)$ pour un $k \geq 1$ donné qui ne sont pas σ-ergodiques. Inversement, il existe des mesures de probabilité qui sont σ-ergodiques mais qui vérifient $\mathcal{I}_\mu(\sigma) \neq \mathcal{I}_\mu(\sigma^k)$ pour tout $k \geq 1$.

Considérons l'AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ défini par $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et $F = a\,\mathrm{Id} + b\,\sigma$. On remarque facilement que $p-1$ est une période commune à tous les éléments de $\mathrm{Ker}(F)$. Ainsi l'hypothèse (2) du théorème 5.2 implique l'hypothèse (2) des théorèmes 5.4 et 5.5. Pour utiliser le théorème 5.3 pour cette classe d'AC, la σ-totale ergodicité de μ est nécessaire. Cette propriété n'est pas très éloignée de l'hypothèse (2) des théorèmes 5.4 et 5.5 concernant les ensembles σ-invarants. Cependant ce genre d'hypothèse montre l'importance du caractère algébrique du système. La propriété de (F, σ)-totale ergodicité de μ est plus restrictive. Avec une telle hypothèse M.

Einsiedler prouve dans [**Ein05**] des résultats pour des classes d'actions algébriques qui ne sont pas nécessairement des AC.

Pour finir, on donne un exemple montrant que l'hypothèse (2) des théorèmes 5.4 et 5.5 est nécessaire pour obtenir la caractérisation de la mesure de Bernoulli uniforme.

Exemple 5.1. — Soient $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $F = \mathrm{Id} + \sigma$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On considère le sous-groupe $X_1 = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{2n} = x_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est ni σ-invariant, ni F-invariant. Soient $X_2 = \sigma(X_1) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{2n} = x_{2n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$, $X_3 = F(X_1) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ et $X_4 = F(X_2) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ est (F, σ)-invariant.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \rightleftharpoons & X_2 \\ \downharpoonleft\upharpoonright & & \downharpoonleft\upharpoonright \\ X_3 & \rightleftharpoons & X_4 \end{array}$$

Soit ν la mesure de Haar sur X_1 ; on considère alors

$$\mu = \frac{1}{4}(\nu + \sigma\nu + F\nu + F\sigma\nu).$$

On vérifie facilement que μ est une mesure de probabilité (F, σ)-ergodique vérifiant $h_\mu(\sigma) > 0$. Cependant $X_i \in \mathcal{I}_\mu(\sigma^2) \setminus \mathcal{I}_\mu(\sigma)$ pour tout $i \in [1, 4]$. L'hypothèse (2) n'étant pas vérifiée, on ne peut donc pas appliquer le théorème 5.4. Effectivement μ n'est pas la mesure de Bernoulli uniforme. S. Silberger propose des constructions similaires dans [**Sil05**].

5.2.3. Entropie positive. — La formule de la proposition 4.5 montre que pour tout AC bipermutatif non trivial $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$, l'hypothèse d'entropie positive $h_\mu(F)$ peut être remplacée par l'entropie positive de $F^n \circ \sigma^m$ pour une direction $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ donnée (et même une direction non rationnelle, c'est à dire $h_\mu(F, \alpha) > 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$). L'hypothèse (3) des théorèmes 5.4 et 5.5 peut donc être remplacée par la positivité de l'entropie suivant une direction, en particulier $h_\mu(\sigma) > 0$. C'est ce genre d'hypothèse qui apparaît naturellement lorsqu'on considère des actions algébriques générales comme dans [**Ein05**].

On peut s'attendre au même type de formule pour des AC expansifs. Par exemple, par la proposition 4.6, on obtient que pour une mesure μ (F, σ)-invariante, $h_\mu(F, \alpha) > 0$ pour $\alpha \in \mathbf{B}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ si et seulement si $h_\mu(\sigma) > 0$. Ce résultat est déjà un résultat de rigidité puisque l'entropie d'une mesure (F, σ)-invariante est relativement contrainte. De plus on observe que la formule d'entropie du lemme 4.4 tient une place centrale dans la démonstration du théorème principal. Le même type de formule apparaît dans la preuve de D. J. Rudolph [**Rud90**] pour le problème de Furstenberg initial.

5.2.4. Sous-groupes (F, σ)-invariants de D_∞. — On s'intéresse maintenant à l'hypothèse (4) des théorèmes 5.4 et 5.5 qui est une condition algébrique sur l'AC. On peut remarquer que les théorèmes 5.1 et 5.2 n'ont pas de telle hypothèse car ils étudient une classe très particulière de la forme : $F = a\,\mathrm{Id} + b\,\sigma$ sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ avec p premier. Par la proposition 5.7, on peut facilement modifier le théorème 5.3 pour considérer un AC algébrique bipermutatif non trivial sans restriction sur le voisinage (corollaire 5.8). Cependant il est nécessaire de comparer "$\mathrm{Ker}(F)$ ne contient pas de sous-groupe σ-invariant" avec "tout sous-groupe infini (F, σ)-invariant de D_∞ est dense dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$". On montre que la seconde propriété est en général plus faible. On donnera dans la sous-section 5.3.1 une classe d'exemples où elle l'est strictement.

Soit $H \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on note $\langle H \rangle$ le sous-groupe engendré par H, $\langle H \rangle_\sigma$ le plus petit sous-groupe σ-invariant qui contient H et $\langle H \rangle_{F,\sigma}$ le plus petit sous-groupe (F, σ)-invariant qui contient H. Soit Σ un sous-groupe fermé (F, σ)-invariant. Si $H \subset \Sigma$, alors $\langle H \rangle$, $\langle H \rangle_\sigma$ et $\langle H \rangle_{F,\sigma}$ sont des sous-groupes de Σ.

Proposition 5.9. — *Soient $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique et Σ un sous-groupe fermé (F, σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. D_∞^Σ *ne contient pas de sous-groupe infini* (F,σ)*-invariant non trivial.*
2. *Il existe* $m \in \mathbb{N}$ *et* $n_0 \geq 0$ *tels que* $D_{n_0}^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$ *pour tout* $d \in \partial D_{n_0+m}^\Sigma$.
3. *Il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $D_{n_0}^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$ *pour tous* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *et* $d \in \partial D_{n_0+m}^\Sigma$.
4. *Il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $D_1^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$ *pour tout* $d \in \partial D_{m+1}^\Sigma$.

Démonstration. — On rappelle que $D_n^\Sigma = \operatorname{Ker}(F^n)$ et $\partial D_{n+1}^\Sigma = D_{n+1}^\Sigma \setminus D_n^\Sigma$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit Γ un sous-groupe infini (F,σ)-invariant de D_∞^Σ. On prouve par récurrence que $D_n^\Sigma \subset \Gamma$ pour tout $n \geq n_0$.

Comme Γ est infini et D_n^Σ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n' \geq 0$ tel que et $\Gamma \cap \partial D_{n'+n_0+m}^\Sigma \neq \emptyset$. Soit $d \in \Gamma \cap \partial D_{n'+n_0+m}^\Sigma$, par F-invariance de Γ, on a $F^{n'}(d) \in \Gamma \cap \partial D_{n_0+m}^\Sigma$. Ainsi $D_{n_0}^\Sigma \subset \langle F^{n'}(d) \rangle_{F,\sigma} \subset \Gamma$. La propriété de récurrence est donc initialisée.

Soit $n \geq n_0$. Supposons que $D_n^\Sigma \subset \Gamma$, on veut montrer que $D_{n+1}^\Sigma \subset \Gamma$. Comme précédemment, on peut trouver $d \in \Gamma \cap \partial D_{n+1+m}^\Sigma$ car Γ est infini et F-invariant. Comme $F^{n+1-n_0}(d) \in \Gamma \cap \partial D_{n_0+m}^\Sigma$, on en déduit que $D_{n_0}^\Sigma \subset \langle F^{n+1-n_0}(d) \rangle_{F,\sigma}$. Soit $d' \in D_{n+1}^\Sigma$, on a $F^{n+1-n_0}(d') \in D_{n_0}^\Sigma \subset \langle F^{n+1-n_0}(d) \rangle_{F,\sigma}$ et donc il existe un ensemble fini $\mathbb{V} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$F^{n+1-n_0}(d') = \sum_{(u,m') \in \mathbb{V}} c_{u,m'} \sigma^u \circ F^{m'+n+1-n_0}(d) \quad \text{où } c_{u,m'} \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que :

$$d' - \sum_{(u,m') \in \mathbb{V}} c_{u,m'} \sigma^u \circ F^{m'}(d) \in D_{n+1-n_0}^\Sigma \subset D_n^\Sigma \subset \Gamma.$$

Cependant $d \in \Gamma$, d'où $\sigma^n \circ F^{m'} \in \Gamma$ pour tout $(n,m') \in \mathbb{V}$. Ainsi, $d' \in \Gamma$. Ce raisonnement est valide pour tout $d' \in D_{n+1}^\Sigma$, on a donc $D_{n+1}^\Sigma \subset \Gamma$. Par induction, $D_k^\Sigma \subset \Gamma$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Finalement, $D_\infty^\Sigma = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n^\Sigma \subset \Gamma$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Raisonnons par contradiction. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $d \in \partial D_{m+1}^\Sigma$ tel que $\langle d \rangle_{F,\sigma} \cap D_1^\Sigma \neq D_1^\Sigma$. Comme D_1^Σ est un groupe fini, il existe un sous-groupe H de D_1^Σ tel que $\Delta = \{d \in D_\infty^\Sigma : \langle d \rangle_{F,\sigma} \cap D_1^\Sigma \subset H\}$ soit infini. On observe que $F(\Delta) \subset \Delta$. Pour tout $d' \in \Delta$, on note $\Delta_{d'} = \{d \in \Delta : d' \in \langle d \rangle_{F,\sigma}\}$. Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante vérifiant $\Delta \cap \partial D_{n_i}^\Sigma \neq \emptyset$. Si $d \in \Delta \cap \partial D_{n_{i+1}}^\Sigma$, on a $d' = F^{n_{i+1}-n_i}(d) \in \langle d \rangle_{F,\sigma}$, d'où $d \in \Delta_{d'}$, et donc $d' \in \Delta \cap \partial D_{n_i}^\Sigma$. On peut alors construire par induction une suite infinie $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D_∞^Σ telle que $d_i \in \Delta \cap \partial D_{n_i}^\Sigma$ et $d_{i+1} \in \Delta_{d_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \langle d_i \rangle_{F,\sigma}$ est un sous-groupe infini (F,σ)-invariant de D_∞^Σ tel que $\Gamma \cap D_1^\Sigma \subset H$; ceci contredit (1).

(4) $\Rightarrow$ (3) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $D_1^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$ pour tout $d \in \partial D_{m+1}^\Sigma$. On prouve par induction que pour tous $n \geq 1$ et $d \in \partial D_{n+m}^\Sigma$, on a $D_n^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$. Pour $n = 1$ ceci correspond à l'hypothèse. Supposons que la propriété soit vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d \in \partial D_{n+1+m}^\Sigma$, comme $F^n(d) \in \partial D_{m+1}^\Sigma$, on a $D_1^\Sigma \subset \langle F^n(d) \rangle_{F,\sigma}$. Si $d' \in D_{n+1}^\Sigma$, alors $F^n(d') \in D_1^\Sigma$. On en déduit l'existence de $\mathbb{V} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$F^n(d') = \sum_{(u,m') \in \mathbb{V}} c_{u,m'} \sigma^u \circ F^{m'+n}(d) \quad \text{où } c_{u,m'} \in \mathbb{Z}.$$

Comme $d' - \sum_{(u,m') \in \mathbb{V}} c_{u,m'} \sigma^u \circ F^{m'}(d) \in D_n^\Sigma$ et comme $D_n^\Sigma \subset \langle F(d) \rangle_{F,\sigma}$ car $F(d) \in \partial D_{n+m}^\Sigma$, on a :

$$d' - \sum_{(u,m') \in \mathbb{V}} c_{u,m'} \sigma^u \circ F^{m'}(d) \in \langle F(d) \rangle_{F,\sigma} \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}.$$

Ainsi, $d' \in \langle d \rangle_{F,\sigma}$. On en déduit que $D_{n+1}^\Sigma \subset \langle d \rangle_{F,\sigma}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) est trivial. □

Corollaire 5.10. — *Si* $D_1^\Sigma = \operatorname{Ker}(F) \cap \Sigma$ *ne contient pas de sous-groupe non trivial* σ*-invariant alors* D_∞^Σ *ne contient pas de sous groupe infini* (F,σ)*-invariant non trivial.*

Démonstration. — Si $D_1^\Sigma = \mathrm{Ker}(F) \cap \Sigma$ ne contient pas de sous-groupe σ-invariant non trivial, pour tout $d \in \partial D_1^\Sigma$, le sous-groupe $\langle d \rangle_{F,\sigma}$ doit être égal à D_1^Σ. D'après la proposition 5.9, on obtient le résultat sur D_∞^Σ. □

Pour un AC linéaire $(\mathcal{A}^\mathbb{Z}, F)$ avec $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les sous-groupes σ-invariants coïncident avec les sous-groupes (F, σ)-invariants. On déduit directement du corollaire 5.10 que le théorème 5.4 est plus fort que le théorème 5.3 dans ce cas. De plus si on se place dans la classe d'AC considérée par le théorème 5.2, c'est à dire $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et $F = a\,\mathrm{Id} + b\,\sigma$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(F) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne contient pas de sous-groupe non trivial. Le théorème 5.4 généralise donc aussi le théorème 5.2.

Cependant, lorsque $\mathcal{A}$ n'est pas cyclique, les sous-groupes σ-invariants ne coincident pas nécessairement avec les sous-groupes (F, σ)-invariants. Dans ce cas on ne sait toujours pas si le théorème 5.4 implique le théorème 5.3. Cependant, le corollaire 5.10 implique que le théorème 5.4 est plus fort que le théorème 5.3 pour tout AC algébrique bipermutatif.

5.3. Exemples d'applications : Etude des AC linéaires où $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

— Dans cette sous-section, on s'intéresse aux AC linéaires où $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5.3.1. Le cas $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. — Les théorèmes 5.1 et 5.2 concernent la classe des AC linéaires sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\mathbb{Z}$ avec p premier de voisinage minimal $\mathbb{U} = \{0, 1\}$. Comme on l'a vu précédemment, un AC dans cette classe vérifie directement l'hypothèse (4) du théorème 5.4. En fait, comme le montre la preuve du résultat de rigidité suivant, n'importe quel AC linéaire non trivial sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\mathbb{Z}$ vérifie cette hypothèse.

Proposition 5.11. — *Soit $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\mathbb{Z}, F)$ un AC linéaire non trivial avec p premier. Soit μ une mesure de probabilité (F, σ)-invariante. Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour la $\mathbb{Z}^2$-action induite par (F, σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{p\,p_1})$ où p_1 est la plus petite période commune des éléments de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_\mu(F) > 0$.*

Alors : (a) $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^\mathbb{Z}}$.

(b) De plus p_1 divise $\prod_{i=0}^{r-1}(p^r - p^i)$ où $r = \max\{\mathbb{U}, 0\} - \min\{\mathbb{U}, 0\}$ et $\mathbb{U}$ est le plus petit voisinage de F.

Démonstration. — Preuve de (a) : Par (F, σ)-invariance de μ, on peut composer F avec σ et supposer que le plus petit voisinage de F est $[0, r]$ avec $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut écrire F sous la forme

$$F = \sum_{u \in [0,r]} f_u \circ \sigma^u = P_F(\sigma)$$

où P_F est un polynôme dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, de plus $f_0 \neq 0$ et $f_r \neq 0$. On remarque que F est bipermutatif.

<u>Cas 1 :</u> On suppose dans un premier temps que P_F est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On peut voir $D_1(F)$ comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel et considérer l'isomorphisme $\sigma_1 : D_1(F) \to D_1(F)$, la restriction de σ au sous-groupe $D_1(F)$. Par bipermutativité de F, on a $D_1 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. De plus $P_F(\sigma_1) = 0$; comme P_F est irréductible et de degré égal à la dimension de D_1, on en déduit que P_F est le polynôme caractéristique de σ_1. Comme P_F est irréductible, $D_1(F)$ est σ_1-simple, autrement dit $D_1(F)$ ne contient pas de sous-groupe σ-invariant non trivial, on renvoie à [**AB93**, §VI.8] pour plus de détails sur les morphismes simples. Par le corollaire 5.10, $D_\infty(F)$ ne contient pas de sous-groupe infini (F, σ)-invariant non trivial. L'hypothèse (4) du théorème 5.4 est vérifiée.

<u>Cas 2 :</u> On suppose maintenant que $P_F = P^\alpha$ où P est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. On a $D_n(P_F(\sigma)) = \mathrm{Ker}(P^{\alpha n}(\sigma)) = D_{\alpha n}(P(\sigma))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $D_\infty(P_F(\sigma)) = D_\infty(P(\sigma))$. On se retrouve dans le cas précédent et la quatrième condition du théorème 5.4 est vérifiée.

Cas 3 : Dans le cas général on a $P_F = P_1^{\alpha_1}...P_l^{\alpha_l}$ où P_i est irréductible et $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in [1,l]$. Soit Γ un sous-groupe infini (F,σ)-invariant de $D_\infty(P_F(\sigma))$. Par le lemme des noyaux (voir [**AB93**, §VI.4]), on a $D_n(P_F(\sigma)) = D_n(P_1^{\alpha_1}(\sigma)) \oplus ... \oplus D_n(P_l^{\alpha_l}(\sigma))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $D_n(P_F(\sigma)) \cap \Gamma$ est un sous-espace σ-invariant de $D_n(P_F(\sigma))$ considéré comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel et $D_n(P_F(\sigma)) \cap \Gamma = (D_n(P_1^{\alpha_1}(\sigma)) \cap \Gamma) \oplus ... \oplus (D_n(P_l^{\alpha_l}(\sigma)) \cap \Gamma)$. On en déduit que :

$$D_\infty(P_F(\sigma)) \cap \Gamma = \bigoplus_{i\in[1,l]} (D_\infty(P_i^{\alpha_1}(\sigma)) \cap \Gamma) \underset{(*)}{=} \bigoplus_{i\in[1,l]} (D_\infty(P_i(\sigma)) \cap \Gamma),$$

où $(*)$ résulte du cas 2. Il existe donc $i \in [1,l]$ tel que $\Gamma \cap D_\infty(P_i(\sigma))$ est un sous-groupe infini. D'après le cas 1, on a $\Gamma \cap D_\infty(P_i(\sigma)) = D_\infty(P_i(\sigma))$, d'où $D_\infty(P_i(\sigma)) \subset \Gamma$. Il en résulte que Γ est dense car $D_\infty(P_i(\sigma))$ est dense puisque $P_i(\sigma)$ est bipermutatif. La quatrième condition du théorème 5.4 est vérifiée. En appliquant le théorème 5.4, on obtient la partie (a) de la proposition.

Preuve de (b) : Si $x \in \mathrm{Ker}(F)$, les coordonnées de x vérifient $x_{n+r} = -f_r^{-1}\sum_{i=0}^{r-1} f_i x_{n+i}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On peut exprimer cette relation de récurrence avec des matrices. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $X_{n+1} = AX_n$ en posant

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n+r-1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} -f_{r-1}f_r^{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -f_0 f_r^{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est inversible car $f_0 \neq 0 \neq f_r$. Par une récurrence simple on montre que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La période de X_n divise la période de A. Par le théorème de Lagrange, la période de A divise le cardinal du groupe des matrices inversibles sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de taille r. Ce cardinal est égal au nombre de base de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$, c'est à dire $\prod_{i=0}^{r-1}(p^r - p^i)$. On en déduit la partie (b) de la proposition. □

Remarque. — La proposition 5.11 est toujours valide si $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, F)$ est un AC affine.

Remarque. — La preuve de la proposition 5.11 est toujours valide lorsque $\mathcal{A}$ est un corps fini et lorsque $F = \sum_{u\in\mathbb{U}} f_u\sigma^u$ est un AC linéaire où les coefficients de f_u correspondent à la multiplication par un élément du corps.

Soit $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC linéaire non trivial tel que $F = P_F(\sigma) = \sum_{u\in[0,r]} f_u \circ \sigma^u$ où P_F est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $f_0 \neq 0$ et $f_r \neq 0$. Dans ce cas, le théorème 5.3, généralisé aux AC algébriques bipermutatifs non triviaux sans restriction sur le voisinage (corollaire 5.8), est applicable seulement si $\mathrm{Ker}(F)$ ne contient pas de sous-groupe σ-invariant non trivial. Comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 5.11, ceci est équivalent à l'irréductibilité de P_F. En contrepartie, la proposition 5.11 est valide pour tout AC linéaire non trivial sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$. Ceci montre bien que les théorèmes 5.4 et 5.5 traitent une classe strictement plus importante d'AC que le théorème 5.3.

5.3.2. Le cas $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. — On considère maintenant que $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ avec p et q deux nombres premiers distincts. Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC linéaire bipermutatif. Dans ce cas D_∞ contient des sous-groupes infinis σ-invariant qui ne sont pas denses dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Par exemple $D_\infty^{\Gamma_1}$ et $D_\infty^{\Gamma_2}$ où $\Gamma_1 = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \times \{0_{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}}\}$ et $\Gamma_2 = \{0_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}}\} \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$. Les mesures λ_{Γ_1} et λ_{Γ_2} sont (F,σ)-totalement ergodiques et d'entropies positives pour σ. Si μ est une mesure (F,σ)-invariante qui vérifie les conditions du théorème 5.4, on ne peut pas conclure que $\mu = \lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$. Cependant, si on considère les facteurs cellulaires sur la première et la seconde coordonnées, $\pi_1 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \Gamma_1$ et $\pi_2 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \Gamma_2$, le corollaire 5.6 permet de déduire que $\pi_1\mu = \lambda_{\Gamma_1}$ ou $\pi_2\mu = \lambda_{\Gamma_2}$. Le principal problème vient de la reconstruction de μ à partir de $\pi_1\mu$ et $\pi_2\mu$.

5.3.3. Le cas $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. — Dans ce cas on ne sait pas quelles conditions supplémentaires imposeraient à une mesure (F,σ)-invariante d'être la mesure de Haar. De plus, un AC linéaire sur $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ n'est pas forcément bipermutatif. Cependant le lemme suivant permet de résoudre ce problème en considérant une puissance de l'AC.

Lemme 5.12. — *Supposons que $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{M}}, F)$ un AC linéaire avec $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, où p est premier et $k \geq 1$. On écrit $F = \sum_{u\in\mathbb{U}} f_u\, \sigma^u$ avec $f_u \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que f_u soit premier avec p. Soit $\widehat{\mathbb{U}} = \{i \in \mathbb{U} : f_u \text{ est premier avec } p\}$, $\hat{r} = \min \widehat{\mathbb{U}}$ et $\hat{s} = \max \widehat{\mathbb{U}}$.*

Alors $F^{p^{k-1}}$ est bipermutatif de voisinage de bipermutativité $\mathbb{U}' = [p^{k-1}\hat{r}, p^{k-1}\hat{s}]$.

Démonstration. — On écrit F sous sa forme polynomiale $F = P_F(\sigma)$ avec $P_F \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$. On décompose P_F sous la forme $P_F = P_1 + pP_2$ où $P_1 = \sum_{u\in\widehat{\mathbb{U}}} f_i\, X^i$. Par induction sur $j \geq 1$, on prouve facilement que

$$(P_1 + pP_2)^{p^j} = (P_1)^{p^j} \mod p^{j+1}.$$

On en déduit que $P_F^{p^{k-1}} = P_1^{p^{k-1}} = \sum_{i\in[p^{k-1}\hat{r}, p^{k-1}\hat{s}]} g_i X^i$ où $g_i \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. De plus $g_{p^{k-1}\hat{r}} = f_{\hat{r}}^{p^{k-1}}$ et $g_{p^{k-1}\hat{s}} = f_{\hat{s}}^{p^{k-1}}$, ainsi $F^{p^{k-1}} = P_F^{p^{k-1}}(\sigma)$ est bipermutatif de voisinage de bipermutativité $\mathbb{U}' = [p^{k-1}\hat{r}, p^{k-1}\hat{s}]$. □

Ceci permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 5.13. — *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC linéaire avec $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, où p est premier, $k \geq 1$, et $F = \sum_{i\in[s,r]} f_i\, \sigma^i$ avec $f_i \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $i, j \in [r, s]$, $i \neq j$, tels que f_i et f_j soient relativement premier avec p. Soit Σ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et soit μ une mesure de probabilité (F,σ)-invariante telle que $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$. Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action induite par (F,σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{pp_1})$ avec p_1 la plus petite période commune aux éléments de $\mathrm{Ker}(F)$;*
3. *$h_\mu(\sigma) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini σ-invariant de $D_\infty^\Sigma(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n) \cap \Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

Exemple 5.2. — Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on considère l'AC $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ défini par $F = \mathrm{Id} + \sigma + 2\sigma^2$. Le sous-décalage $\Sigma = \{0,2\}^{\mathbb{Z}}$ vérifie les conditions du corollaire 5.13. Dans ce cas les seules mesures de probabilité (F,σ)-totalement ergodiques d'entropie positive connues sont $\lambda_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ and λ_Σ.

Références

[AB93] Jean-Marie Arnaudiès and José Bertin. *Groupes, Algèbres et Géométrie Tome 1.* Ellipses, Paris, 1993.

[Atk76] Giles Atkinson. Recurrence of co-cycles and random walks. *J. London Math. Soc. (2)*, 13(3) :486–488, 1976.

[CP75] Ethan M. Coven and Michael E. Paul. Endomorphisms of irreducible subshifts of finite type. *Math. Systems Theory*, 8(2) :167–175, 1974/75.

[DGS76] Manfred Denker, Christian Grillenberger, and Karl Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527.

[Ein05] Manfred Einsiedler. Isomorphism and measure rigidity for algebraic actions on zero-dimensional groups. *Monatsh. Math.*, 144(1) :39–69, 2005.

[FMMN00] Pablo A. Ferrari, Alejandro Maass, Servet Martínez, and Peter Ney. Cesàro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(6) :1657–1670, 2000.

[Fur67] Harry Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, 1 :1–49, 1967.

[Gil87] Robert H. Gilman. Classes of linear automata. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 7(1) :105–118, 1987.

[Hed69] Gustav A. Hedlund. Endormorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Math. Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.

[HMM03] Bernard Host, Alejandro Maass, and Servet Martínez. Uniform Bernoulli measure in dynamics of permutative cellular automata with algebraic local rules. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(6) :1423–1446, 2003.

[Kit87] Bruce P. Kitchens. Expansive dynamics on zero-dimensional groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 7(2) :249–261, 1987.

[KM00] Petr Kůrka and Alejandro Maass. Limit sets of cellular automata associated to probability measures. *J. Statist. Phys.*, 100(5-6) :1031–1047, 2000.

[Kůr97] Petr Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(2) :417–433, 1997.

[Led78] François Ledrappier. Un champ markovien peut être d'entropie nulle et mélangeant. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(7) :A561–A563, 1978.

[Lin84] Douglas A. Lind. Applications of ergodic theory and sofic systems to cellular automata. *Phys. D*, 10(1-2) :36–44, 1984.

[Mil88] John Milnor. On the entropy geometry of cellular automata. *Complex Systems*, 2(3) :357–385, 1988.

[MM98] Alejandro Maass and Servet Martínez. On Cesàro limit distribution of a class of permutative cellular automata. *J. Statist. Phys.*, 90(1-2) :435–452, 1998.

[Nas95] Masakazu Nasu. Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 114(546) :viii+215, 1995.

[Piv05] Marcus Pivato. Invariant measures for bipermutative cellular automata. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 12(4) :723–736, 2005.

[PY02] Marcus Pivato and Reem Yassawi. Limit measures for affine cellular automata. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4) :1269–1287, 2002.

[PY04] Marcus Pivato and Reem Yassawi. Limit measures for affine cellular automata. II. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(6) :1961–1980, 2004.

[Rud90] Daniel J. Rudolph. $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2) :395–406, 1990.

[Sab06] Mathieu Sablik. *Étude de l'action conjointe d'un automate cellulaire et du décalage : Une approche topologique et ergodique*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Juillet 2006. Mathématiques et Fondements de l'Informatique.

[Sab07] Mathieu Sablik. Measure rigidity for algebraic bipermutative cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, (27) :1965–1990, December 2007.

[Sab08] Mathieu Sablik. Directional dynamics for cellular automata : A sensitivity to initial condition approach. *Theoretical Computer Science*, 2008.

[Sch95] Klaus Schmidt. *Dynamical systems of algebraic origin*, volume 128 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[She92] Mark A. Shereshevsky. Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata. *J. Nonlinear Sci.*, 2(1) :1–8, 1992.

[Sil05] Sylvia Silberger. Subshifts of the three dot system. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(5) :1673–1687, 2005.

[Tis00] Pierre Tisseur. Cellular automata and Lyapunov exponents. *Nonlinearity*, 13(5) :1547–1560, 2000.

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Wil75] Stephen J. Willson. On the ergodic theory of cellular automata. *Math. Systems Theory*, 9(2) :132–141, 1975.

Annexe : Preuve des théorèmes de rigidité 5.4 et 5.5

Dans un soucis d'unité, nous reprenons ici les preuves des théorèmes 5.4 et 5.5 faites dans [**Sab07**]

Considérons un AC algébrique $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ bipermutatif de voisinage de bipermutativité $\mathbb{U} = [r, s]$. Pour tout $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit la translation $T_y : x \mapsto x + y$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n(F) = \mathrm{Ker}(F^n)$, s'il n'y a pas d'ambiguïté on écrira juste D_n. D_n est un sous-groupe de D_{n+1} et par bipermutativité on a $\mathrm{Card}(D_n) = \mathrm{Card}(D_1)^n = \mathrm{Card}(\mathcal{A})^{(s-r)n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\partial D_{n+1} = D_{n+1} \setminus D_n$. Comme $(D_n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes, on peut considérer le sous-groupe $D_\infty(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n(F)$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$; de même que précédemment, on le notera D_∞ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par bipermutativité de F, il est facile de voir que $D_\infty(F)$ est dense dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Chaque D_n est fini et σ-invariant, donc tout $x \in D_n$ est σ-périodique. Si p_n est la plus petite période commune à tous les éléments de D_n, p_n divise $\mathrm{Card}(D_n)!$.

Soit $\mathfrak{B}$ la sigma-algèbre des boréliens sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathfrak{B}_n = F^{-n}(\mathfrak{B})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, la mesure conditionnelle $\mu_{n,x}$ est définie par $\mu_{n,x}(U) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_U|\mathfrak{B}_n)(x)$ pour tout ensemble mesurable $U \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Les principales propriétés de la mesure conditionnelle sont :

(A) Pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n,x}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $\mathrm{supp}(\mu_{n,x}) \subset F^{-n}(F^n(x)) = x + D_n$.

(B) Pour tout ensemble mesurable $U \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, la fonction $x \to \mu_{n,x}(U)$ est $\mathfrak{B}_n$-mesurable et $\mu_{n,x} = \mu_{n,y}$ pour tout $y \in F^{-n}(F^n(x)) = x + D_n$. Donc pour $d \in D_n$, on a $\mu_{n,x} = \mu_{n,x+d}$ pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

(C) Soit $G : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable et soit U un ensemble mesurable ; pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{G^{-1}(U)}|G^{-1}(\mathfrak{B}))(x) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_U|\mathfrak{B})(G(x))$. En effet ce sont des fonctions $G^{-1}(\mathfrak{B})$-mesurables et pour tout $B \in \mathfrak{B}$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_{G^{-1}(B)} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{G^{-1}(U)}|G^{-1}(\mathfrak{B}))(x)d\mu(x) &= \int_{G^{-1}(B)} \mathbf{1}_{G^{-1}(U)}(x)d\mu(x)\\ &= \int_{G^{-1}(B)} \mathbf{1}_U(G(x))d\mu(x)\\ &= \int_{G^{-1}(B)} \mathbb{E}(\mathbf{1}_U|\mathfrak{B})(G(x))d\mu(x).\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{B}_n$ est σ-invariante et $\mathfrak{B}_{n+1} = F^{-1}(\mathfrak{B}_n)$, en posant $G = \sigma$ puis $G = F$, il résulte que pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sigma_*^m \mu_{n,x} = \mu_{n,\sigma^m(x)} \quad \text{et} \quad F_*\mu_{n+1,x} = \mu_{n,F(x)}.$$

Afin de travailler sur des mesures de probabilités concentrées sur D_n, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la mesure de probabilité $\zeta_{n,x} = T_{-x}\mu_{n,x}$. Les propriétés précédentes de la mesure conditionnelle peuvent être transposées à $\zeta_{n,x}$.

Lemme 5.14. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(a) $\zeta_{n,x+d} = T_{-d}\zeta_{n,x}$ pour tout $d \in D_n$.

(b) $\sigma_*^m\zeta_{n,x} = \zeta_{n,\sigma^m(x)}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $F_*\zeta_{n+1,x} = \zeta_{n,F(x)}$.

(c) Pour tout $m \in p_n\mathbb{Z}$, on a $\sigma_*^m\zeta_{n,x} = \zeta_{n,x}$. Ainsi la fonction $x \mapsto \zeta_{n,x}$ est σ^m-invariante.

Démonstration. — (a) découle de la propriété (B), (b) découle de la propriété (C), et (c) vient du fait que $\mathrm{supp}(\zeta_{n,x}) \subset D_n$. □

Pour $n > 0$ et $d \in D_n$ on définit :

$$E_{n,d} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \zeta_{n,x}(\{d\}) > 0\} \text{ et } E_n = \bigcup_{d\in\partial D_n} E_{n,d}.$$

Il est facile de voir que $E_{n,d}$ est σ^{p_n}-invariant par le lemme 5.14(c), et que E_n est σ-invariant car ∂D_n est σ-invariant. Considérons la fonction $\eta(x) = \zeta_{1,x}(\{0\}) = \mu_{1,x}(\{x\})$; η est σ-invariante et $E_1 = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \eta(x) < 1\}$. De plus on a :

$$\eta(F^{n-1}(x)) = \mu_{1,F^{n-1}(x)}(\{F^{n-1}(x)\}) = \mu_{1,F^{n-1}(x)}(F^{n-1}(x+D_{n-1}) \underset{=}{(*)} \mu_{n,x}(x+D_{n-1}) = \zeta_{n,x}(D_{n-1}),$$

où $(*)$ découle de la propriété (D). Ainsi

$$E_n = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \zeta_{n,x}(D_{n-1}) < 1\} = F^{-n+1}(E_1).$$

Soit $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On définit $D_n^{\Sigma} = D_n \cap \Sigma$ et $\partial D_{n+1}^{\Sigma} = D_{n+1}^{\Sigma} \setminus D_n^{\Sigma}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $D_\infty^{\Sigma} = D_\infty \cap \Sigma$.

Remarque. — Soit μ une mesure de probabilité (F,σ)-invariante telle que $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{supp}(\mu_{n,x}) \subset x + D_n^{\Sigma} \subset \Sigma$ et $\mathrm{supp}(\zeta_{n,x}) \subset D_n^{\Sigma}$. Ainsi pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \partial D_n$, si $d \notin \Sigma$ alors $\mu(E_{n,d}) = 0$.

Avant de démontrer le théorème principal, on a besoin d'un autre lemme technique :

Lemme 5.15. — *Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{I}_\mu(T) = \mathcal{I}_\mu(T^k)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathcal{I}_\mu(T) = \mathcal{I}_\mu(T^{k^n})$ où $\mathcal{I}_\mu(T) = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(T^{-1}(B) \triangle B) = 0\}$ est la sigma-algèbre des ensembles mesurables T-invariants modulo μ.*

Démonstration. — En appliquant le théorème de décomposition ergodique à $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$, il est équivalent de montrer que presque toute les composantes T-ergodiques δ de μ sont ergodiques pour T^{k^n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On démontre le lemme par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On initialise la récurrence avec l'hypothèse du lemme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété soit vraie au rang n et fausse au rang supérieur. Cela revient à dire qu'il existe une composante T-ergodique δ de μ (et donc par hypothèse de récurrence δ est aussi ergodique pour T^{k^n}) qui n'est pas ergodique pour $T^{k^{(n+1)}}$. Les propriétés spectrales de T nous disent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^{k^{(n+1)}} = 1$ et $\lambda^{k^n} \neq 1$ et une fonction $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ non constante δ-presque partout telle que $h(T(x)) = \lambda h(x)$ pour δ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On en déduit que $h^k(T(x)) = \lambda^k h^k(x)$ et $h^k(T^{k^n}(x)) = \lambda^{k^{(n+1)}} h^k(x) = h^k(x)$ pour δ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Par ergodicité de δ pour T^{k^n}, on en déduit que h^k est constante δ-presque partout donc $\lambda^k = 1$. On obtient $\lambda^{k^n} = \lambda^{-k} = 1$ ce qui est une contradiction. $\square$

Remarque. — Si k divise k' alors $\mathcal{I}_\mu(T) \subset \mathcal{I}_\mu(T^k) \subset \mathcal{I}_\mu(T^{k'})$. Ainsi, si $\mathcal{I}_\mu(T) = \mathcal{I}_\mu(T^{k'})$, on a aussi $\mathcal{I}_\mu(T) = \mathcal{I}_\mu(T^k)$.

On rappelle l'énoncé du théorème principal :

Théorème 5.4. *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique bipermutatif non-trivial. Soit Σ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout facteur premier de* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})$ *divise k. Soit μ une mesure de probabilité (F,σ)-invariante sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ avec* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$. *Supposons que :*

1. *μ ergodique pour la $\mathbb{Z}^2$-action induite par (F,σ) ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_1})$ où p_1 est la plus petite période commune aux éléments de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_\mu(F) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini σ-invariant de $D_\infty^{\Sigma}(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(F^n) \cap \Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, F est bipermutatif si et seulement si $\sigma^n \circ F$ est bipermutatif. Comme F n'est pas triviale, par la formule d'entropie des AC bipermutatifs du corollaire 4.5, on a aussi $h_\mu(\sigma^n \circ F) > 0$. La mesure de probabilité μ étant σ-invariante, on peut donc supposer que le voisinage de bipermutativité de F est $[0, r]$ avec $r \in \mathbb{N}$.

Étape 1: *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_n})$ où p_n est la plus petite σ-période de D_n.*

Démonstration: Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D_n$. Le point x a pour σ-période p_n, ainsi, par bipermutativité, tout $y \in F^{-1}(\{x\})$ est σ-périodique. Comme $\sigma^{p_n}(y) \in F^{-1}(\{x\})$, p_n divise la σ-période de y. On en déduit que p_n divise p_{n+1}. De plus il existe $d \in D_1$ tel que $\sigma^{p_n}(y) = y + d$, et donc $\sigma^{\mathrm{Card}(D_1)p_n}(y) = y + \mathrm{Card}(D_1)d = y$. Ainsi p_{n+1} divise $\mathrm{Card}(\mathcal{A})^r p_n$ car $\mathrm{Card}(D_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{A})^r$. Par induction p_n divise $\mathrm{Card}(\mathcal{A})^{r(n-1)}p_1$. On choisit m suffisamment grand pour que $\mathrm{Card}(\mathcal{A})^{r(n-1)}$ divise k^m, et donc p_n divise $\mathrm{Card}(\mathcal{A}^{r(n-1)})p_1$ qui divise $(kp_1)^m$. En appliquant le lemme 5.15 à l'hypothèse (2) du théorème 5.4, on obtient $\mathcal{I}_\mu(\sigma^{(kp_n)^m}) = \mathcal{I}_\mu(\sigma)$. Ainsi $\mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_n}) = \mathcal{I}_\mu(\sigma)$ d'après la remarque 5.3.3. ◇ `Étape 1`

Étape 2: *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $d \in D_n$, la mesure $T_d(\mathbf{1}_{E_{n,d}}\mu)$ est absolument continue par rapport à μ.*

Démonstration: Soit $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(A) = 0$. Comme $\mu(A) = \int_{\mathcal{A}^\mathbb{Z}} \mu_{n,x}(A)d\mu(x)$, on en déduit que $\mu_{n,x}(A) = 0$ pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$. En particulier, $0 = \mu_{n,x}(A) \geq \mu_{n,x}(\{x + d\}) = \zeta_{n,x}(\{d\})$ pour μ-presque tout $x \in T_{-d}(A)$ car $x + d \in A$. On en déduit que $x \notin E_{n,d}$ et donc $\mu(T_{-d}(A) \cap E_{n,d}) = 0$. Ceci implique que $T_d(\mathbf{1}_{E_{n,d}}\mu)(A) = 0$, donc que $T_d(\mathbf{1}_{E_{n,d}}\mu)$ est absolument continue par rapport à μ. ◇ `Étape 2`

Pour prouver le théorème, on considère $\chi \in \widehat{\mathcal{A}^\mathbb{M}}$ tel que $\mu(\chi) \neq 0$ et on veut montrer que $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in \Sigma$. On utilisera ensuite la caractérisation de la mesure de Haar à partir des caractères.

Soit $\Gamma = \{d \in D_\infty^\Sigma : \chi(d) = \chi(\sigma^m(d)), \forall m \in \mathbb{Z}\}$; Γ est un sous-groupe σ-invariant de D_∞^Σ. On veut montrer que Γ est infini afin d'appliquer l'hypothèse (4) ; cela nous permettra de déduire que χ est constante sur Σ.

Étape 3: *Il existe un sous-ensemble $N \subset \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ tel que $\mu(N) = 1$ et $F(N) = N$ (modulo μ), satisfaisant la propriété suivante : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \partial D_n^\Sigma$, s'il existe $x \in E_{n,d} \cap N$ avec $\zeta_{n,x}(\chi) \neq 0$, alors $d \in \Gamma$.*

Démonstration: Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \to \zeta_{n,x}$ est σ^{kp_n}-invariante par le lemme 5.14(c). Comme $\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_n})$ par l'étape 1, on en déduit que $\zeta_{n,x}$ est σ-invariante. Ainsi pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $\sigma^m\zeta_{n,x} = \zeta_{n,x}$ (†). D'après l'étape 2, $T_d(\mathbf{1}_{E_{n,d}}\mu)$ est absolument continue par rapport à μ ; on a donc aussi $\sigma^m\zeta_{n,x+d} = \zeta_{n,x+d}$ (‡) pour μ-presque tout $x \in E_{n,d}$ et pour tous $d \in D_n$ et $m \in \mathbb{Z}$. On peut alors faire le calcul suivant :

$$T_{-\sigma^m d}\zeta_{n,x} \underset{=}{(\dagger)} T_{-\sigma^m d}\sigma^m\zeta_{n,x} = \sigma^m T_{-d}\zeta_{n,x} \underset{(*)}{=} \sigma^m\zeta_{n,x+d} \underset{(\ddagger)}{=} \zeta_{n,x+d} \underset{(*)}{=} T_{-d}\zeta_{n,x},$$

où (†) et (‡) sont expliqués plus haut et $(*)$ provient du Lemme 5.14(a). On obtient donc $T_{\sigma^m d - d}\zeta_{n,x} = \zeta_{n,x}$ et par intégration $(1-\chi(\sigma^m d - d))\zeta_{n,x}(\chi) = 0$ pour μ-presque tout $x \in E_{n,d}$. Ainsi, il existe $N \subset \mathcal{A}^\mathbb{Z}$, avec $\mu(N) = 1$, tel que pour tous $d \in D_n$ et $x \in E_{n,d} \cap N$, si $\zeta_{n,x}(\chi) \neq 0$, alors $\chi(\sigma^m(d))\chi(d)^{-1} = \chi(\sigma^m(d) - d) = 1$. Donc $\chi(\sigma^m(d)) = \chi(d)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que $d \in \Gamma$. De plus l'ensemble N est F-invariant modulo des ensembles de mesure nulle : en effet, μ est F-invariant, d'où $\mu(F(N)) = F\mu(F(N)) = \mu(F^{-1}(F(N))) \geq \mu(N) = 1$.
◇ `Étape 3`

Étape 4: *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(B) > 0$ où B est défini par $B = \{x \in N : \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x) \neq 0, \forall n \geq n_0\}$. De plus, pour tout $n \geq n_0$ et $d \in \partial D_n^\Sigma$, si $E_{n,d} \cap B \neq \emptyset$, alors $d \in \Gamma$.*

Démonstration: Par le théorème de convergence des martingales, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n) = \mathbb{E}(\chi| \cap_{m>1} \mathfrak{B}_m)$ μ-presque partout, et cette fonction n'est pas identiquement nulle car son intégrale est égale à $\mu(\chi) \neq 0$. On peut donc choisir n_0 tel que $B = \{x \in N : \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x) \neq 0, \forall n \geq n_0\}$ satisfasse $\mu(B) > 0$. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x) = \int_{\mathcal{A}^\mathbb{Z}} \chi d\mu_{n,x} = \chi(x)\zeta_{n,x}(\chi).$$

Par l'étape 3, pour tout $n \geq n_0$ et tout $d \in \partial D_n^\Sigma$, s'il existe $x \in E_{n,d} \cap B$ alors $d \in \Gamma$. ◇ `Étape 4`

ÉTAPE 5: $\mu(E_1) > 0$.

Démonstration: Soit $A \in \mathcal{P}_{[0,r-1]}$. Pour tous $x \in A$ et $d \in D_1$ tels que $x+d \in A$, on a $x_{[0,r-1]} = (x+d)_{[0,r-1]}$ et $F(x) = F(x+d)$. Par bipermutativité, on en déduit que $x = x+d$, c'est à dire $d = 0$. Pour tous $x \in A$ et $d \in \partial D_1$, on a donc $x+d \notin A$. Ainsi, $A \cap F^{-1}(\{F(x)\}) = A \cap (x+D_1) = \{x\}$. La propriété (A) de la mesure conditionnelle implique que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathfrak{B}_1)(x) = \mu_{1,x}(A) = \mu_{1,x}(\{x\}) = \eta(x)$. En utilisant la formule d'entropie du lemme 4.4, on obtient :

$$\begin{aligned} h_\mu(F) &= H_\mu(\mathcal{P}_{[0,r-1]}|\mathfrak{B}_1) \\ &= -\sum_{A\in\mathcal{P}_{[0,r-1]}} \int_A \log\left(\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathfrak{B}_1)\right) d\mu \\ &= \int_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} -\log(\eta(x)) d\mu(x) \\ &\underset{(*)}{\leq} \int_{E_1} -\log(\eta(x)) d\mu(x), \end{aligned}$$

où $(*)$ découle du fait que $E_1 = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \eta(x) < 1\}$. Cependant $h_\mu(F) > 0$ d'après l'hypothèse (3). Cela prouve l'étape 5. $\diamond$ Étape 5

ÉTAPE 6: Γ *est infini.*

Démonstration: Pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{1}_{E_j}(x) \underset{(1)}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{1}_{F^{-j+1}(E_1)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_{E_1}(F^j(x)) \underset{(2)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n} \mathbf{1}_{E_1}(\sigma^k F^j(x)) \underset{(3)}{\longrightarrow} \mu(E_1) \underset{(4)}{\geq} 0.$$

Ici, (1) résulte de l'égalité $E_j = F^{-j+1}(E_1)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, (2) découle de la σ-invariance de E_1, (3) provient du théorème ergodique et de l'hypothèse (3) et (4) vient de l'étape 5.

Il s'ensuit que pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ il existe une infinité de valeurs $n > 0$ telles que $x \in E_n$. Autrement dit $\mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} E_n) = 1$. Comme $\mu(B) > 0$, on en déduit que $\mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} E_n \cap B) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $d \notin \mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$, la remarque 5.3.3 implique que $\mu(E_{n,d}) = 0$. On peut conclure que $\{d \in D_\infty^\Sigma : \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d \in \partial D_n$ et $E_{n,d} \cap B \neq \emptyset\}$ est infini. D'après l'étape 4, c'est un sous-ensemble de Γ, donc Γ est infini. $\diamond$ Étape 6

Si on considère $\Gamma' = (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} - \sigma)\Gamma$, on a un sous-groupe σ-invariant infini de D_∞^Σ car $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} - \sigma)$ est fini. L'hypothèse (4) implique que Γ' est dense dans Σ. Par construction $\chi(\Gamma') = \{1\}$, ainsi par continuité de χ, on a $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in \Sigma$. Comme $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$ et $\mu(\chi) = 0$ pour tout $\chi \in \widehat{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ tel que $\chi(\Sigma) \neq \{1\}$, on a démontré que $\mu = \lambda_\Sigma$. □

Remarque. — La preuve de ce théorème est aussi valable si $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ est un AC algébrique permutatif à droite tel que tout $x \in D_1 = \mathrm{Ker}(F)$ est σ-périodique. Cependant cette dernière hypothèse nécessite que F soit aussi permutatif à gauche. On est alors ramené au cas du théorème.

Remarque. — Soit un AC affine $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, G)$ où $G = F + c$ avec $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ linéaire et $c \in \Sigma$. Soit μ une mesure de probabilité (G,σ)-invariante sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Supposons que μ et $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ vérifient les hypothèses du Théorème 5.4 pour la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action induite par (G,σ), alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

L'hypothèse (4) n'est pas très naturelle lorsqu'on considère l'AC comme une $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action. On préfèrerait la remplacer par "tout sous-groupe infini (F,σ)-invariant de $D_\infty^\Sigma(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n) \cap \Sigma$ est dense dans Σ". On ne sait toujours pas si cette condition est vérifiée sous les hypothèses du théorème 5.4. Cependant, si on suppose la mesure σ-ergodique, ce qui est plus fort que (F,σ)-ergodique, on arrive au théorème suivant. Dans ce cas là, on perd la notion de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action pour l'hypothèse concernant la mesure.

Théorème 5.5. *Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC algébrique bipermutatif non-trivial. Soit Σ un sous-groupe fermé (F,σ)-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout facteur premier de* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})$ *divise k. Soit μ une mesure de probabilité (F,σ)-invariante sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ avec* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$. *Supposons que :*

1. *μ est ergodique pour σ ;*
2. *$\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_1})$ où p_1 est la plus petite période commune aux éléments de* $\mathrm{Ker}(F)$ *;*
3. *$h_\mu(F) > 0$;*
4. *tout sous-groupe infini (F,σ)-invariant de $D_\infty^\Sigma(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(F^n) \cap \Sigma$ est dense dans Σ.*

Alors $\mu = \lambda_\Sigma$.

Démonstration. — Une mesure σ-ergodique est a fortiori (F,σ)-ergodique. Les résultats contenus dans les étapes de 1 à 6 de la preuve précédente restent valables.

Étape 7: *Soit $B' = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\sigma^j(\{x \in N : \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\})$. Alors $\mu(B') = 1$.*

Démonstration: Par l'étape 4, $\mu(B) > 0$ où $B = \{x \in N : \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x) \neq 0,\ \forall n \geq n_0\}$. Ainsi il existe $k \in [0,3]$ tel que $B_{n_0} = \{x \in N : \Re(\mathbf{i}^k\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_{n_0})) > 0,\ \forall n \geq n_0\}$ vérifie $\mu(B_{n_0}) > 0$, où $\mathbf{i}^2 = -1$. Comme $B_{n_0} \in \mathfrak{B}_{n_0} \subset \mathfrak{B}_{n_0-1}$, on a

$$\int_{B_{n_0}} \Re(\mathbf{i}^k\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_{n_0-1}))(x)d\mu = \int_{B_{n_0}} \Re(\mathbf{i}^k\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_{n_0})(x))d\mu > 0$$

On en déduit que $B_{n_0-1} = \{x \in B_{n_0} : \Re(\mathbf{i}^k\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_{n_0-1})(x)) > 0\} = \{x \in N : \Re(\mathbf{i}^k\mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(x)) > 0,\ \forall n \geq n_0 - 1\}$ vérifie $\mu(B_{n_0-1}) > 0$. Par induction $\mu(B_0) > 0$, d'où $\mu(B') > 0$. Comme B' est σ-invariant, $\mu(B') = 1$ par σ-ergodicité (hypothèse (1)). ◇ `Étape 7`

Étape 8: *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \partial D_n^\Sigma$. Si $E_{n,d} \cap B'$ n'est pas vide alors $d \in \Gamma = \{d' \in D_\infty^\Sigma : \chi(d') = \chi(\sigma^m(d')),\ \forall m \in \mathbb{Z}\}$*

Démonstration: Soient $d \in \partial D_n^\Sigma$ et $x \in E_{n,d} \cap B'$. Il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$0 \neq \mathbb{E}(\chi|\mathfrak{B}_n)(\sigma^j(x)) = \int_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} \chi d\mu_{n,\sigma^j(x)} = \chi(\sigma^j(x))\zeta_{n,\sigma^j(x)}(\chi) \underset{(*)}{=} \chi(\sigma^j(x))\zeta_{n,x}(\chi).$$

Ici $(*)$ vient du fait que $x \to \zeta_{n,x}$ est σ^{kp_n}-invariant d'après le lemme 5.14(c) et $\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\sigma^{kp_n})$ par l'étape 1. Ainsi $x \to \zeta_{n,x}$ est σ-invariante. On en déduit que $\zeta_{n,x}(\chi) \neq 0$. Cependant $x \in E_{n,d} \cap N$, donc $d \in \Gamma$ par l'étape 3. ◇ `Étape 8`

Étape 9: *Soient $n \geq 1$ et $d \in \partial D_n^\Sigma$. Pour μ-presque tout $x \in E_{n,d} \cap B'$ on a $F(x) \in E_{n-1,F(d)} \cap B'$.*

Démonstration: Soient $d \in \partial D_n^\Sigma$ et $x \in E_{n,d} \cap B'$. On a :

$$\zeta_{n-1,F(x)}(\{F(d)\}) \underset{(1)}{=} \zeta_{n,x}(F^{-1}(\{F(d)\})) \geq \zeta_{n,x}(\{d\}) \underset{(2)}{\geq} 0.$$

Ici (1) découle du lemme 5.14(b) et (2) du fait que $x \in E_{n,d}$. On en déduit que $F(x) \in E_{n-1,F(d)}$. D'après l'étape 7, $\mu(B') = 1$, et comme μ est F-invariant, on a $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}}F^{-n}(B')) = 1$ d'où $F(x) \in E_{n-1,F(d)} \cap B'$ pour μ-presque tout $x \in E_{n,d} \cap B'$. ◇ `Étape 9`

Étape 10: *$\cap_{n\in\mathbb{N}}F^{-n}\Gamma$ est infini.*

Démonstration: Soit $n \geq 0$. L'ensemble $E_n = F^{-n+1}(E_1)$ est σ-invariant car E_1 est σ-invariant et F commute avec σ. De plus, d'après l'étape 5, $\mu(E_n) = \mu(E_1) > 0$. Par σ-ergodicité (hypothèse (1)), $\mu(E_n) = 1$ d'où $\mu(E_n \cap B') = 1$ par l'étape 7. Pour tout $n \geq 1$, il existe $d_n \in \partial D_n^\Sigma$ tel que $\mu(E_{n,d_n} \cap B') > 0$, et donc, par l'étape 9, $\mu(E_{n-k,F^k(d_n)} \cap B') > 0$ pour tout $k \in [0,n]$. D'après l'étape 8, cela signifie que $F^k(d_n) \in \Gamma$ pour tout $k \in [0,n]$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}}F^{-n}\Gamma$ est infini car il contient d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. ◇ `Étape 10`

Si on considère $\Gamma'' = (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} - \sigma)(\cap_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}\Gamma)$, on a un sous-groupe de D_∞^Σ infini (F,σ)-invariant car $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} - \sigma)$ est fini. On en déduit que Γ'' est dense dans Σ d'après l'hypothèse (4). Cependant par construction $\chi(\Gamma'') = \{1\}$, d'où $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in \Sigma$ par continuité de χ. Comme $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Sigma$ et $\mu(\chi) = 0$ pour tout $\chi \in \widehat{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ tel que $\chi(\Sigma) \neq \{1\}$, on peut conclure que $\mu = \lambda_\Sigma$. $\square$

Mars 2007

MATHIEU SABLIK, Centre de Mathématiques et Informatique, Université de Provence, Technopôle Château-Gombert, 39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13 • *E-mail :* `sablik@latp.univ-mrs.fr`