
Correction Devoir Maison : Variables aléatoires continues

Exercice 2.

1. La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0, 50]$. Sa densité de probabilité f est donc donnée par

$$f(x) = \frac{1}{50} \text{ si } x \in [0, 50], \qquad f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Il y a une station au kilomètre 0, une autre au kilomètre 50 donc on se trouve à plus de 10km d'une station si $X \in [10, 40]$.

$$P(10 \leqslant X \leqslant 40) = \int_{10}^{40} f(x)\mathrm{d}x = \frac{40-10}{50} = \frac{3}{5}.$$

La probabilité de se trouver à plus de 10km d'une station est donc de $\frac{3}{5}$.

2. Si l'on se trouve entre les kilomètres 0 et 25, la station la plus proche est celle située au kilomètre 0. Si l'on se trouve entre les kilomètres 25 et 50, la station la plus proche est celle située au kilomètre 50. Ainsi,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 25], \\ 50 - x, & \text{si } x \in [25, 50]. \end{cases}$$

3. On a

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_0^{50} g(x)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{25} \frac{x}{50}\mathrm{d}x + \int_{25}^{50} \frac{50-x}{50}\mathrm{d}x \ \text{ d'après l'expression de } g \text{ trouvée en 2.} \\ &= \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{25} + 25 - \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=25}^{50} \\ &= \frac{1}{50} \times \frac{25^2}{2} + 25 - \frac{1}{50} \times \frac{50^2}{2} + \frac{1}{50} \times \frac{25^2}{2} \\ &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

L'espérance de $g(X)$ est de $\frac{25}{2}$.

Par définition, $V(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$. Or,

$$\begin{aligned}
E(g(X)^2) &= \int_0^{50} g(x)^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{25} \frac{x^2}{50}\mathrm{d}x + \int_{25}^{50} \frac{(50-x)^2}{50}\mathrm{d}x, \\
&= \int_0^{25} \frac{x^2}{50}\mathrm{d}x + \frac{1}{50}\int_{25}^{50} (50^2 - 100x + x^2)\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{50}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{25} + \frac{1}{50}\left[50^2 x - 50x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{x=25}^{50} \\
&= \frac{1}{50} \times \frac{25^3}{3} + \frac{1}{50}\left(50^3 - 50^3 + \frac{50^3}{3}\right) - \frac{1}{50}\left(50^2 \times 25 - 50 \times 25^2 + \frac{25^3}{3}\right) \\
&= \frac{625}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$V(g(X)) = \frac{625}{3} - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{12}.$$

La variance de $g(X)$ est de $\frac{625}{12}$.

4. Soit Y la variable aléatoire représentant le coût du dépannage. Le nombre de kilomètres à parcourir pour effectuer un dépannage est donné par $g(X)$ donc

$$Y = 40 + 10g(X).$$

Ainsi

$$E(Y) = 40 + 10E(g(X)) = 40 + 125 = 165.$$

Le coût moyen du dépannage est donc de 165 euros.

Comme $Y = 40 + 10g(X)$, on obtient

$$V(Y) = 10^2 V(g(X)) = \frac{15625}{3}.$$

D'où

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 72,17.$$

L'écart-type du dépannage est d'environ $72,17$ euros.

Exercice 3.

Soit X la variable aléatoire modélisant la durée de vie d'un disque dur en années. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre λ inconnu.
On cherche λ tel que $P(X \leqslant 1) \leqslant 0,001$. Or,

$$P(X \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\left[e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^1 = 1 - e^{-\lambda}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 1) \leqslant 0,001 &\iff 1 - e^{-\lambda} \leqslant 0,001 \\
&\iff e^{-\lambda} \geqslant 0,999 \\
&\iff e^{\lambda} \leqslant \frac{1}{0,999} \\
&\iff \lambda \leqslant \ln\left(\frac{1}{0,999}\right).
\end{aligned}$$

Comme X suit une loi exponentielle de paramètre λ, son espérance est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Finalement

$$P(X \leqslant 1) \leqslant 0,001 \iff E(X) = \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{0,999}\right)} \approx 999,5.$$

Pour assurer que la probabilité d'une panne la première année soit inférieure à $0,001$ il faut que la durée de vie moyenne soit supérieure à $999,5$ années.

Exercice 4.

1. L'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$ d'où

$$E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1} \approx 909 \quad \text{et} \quad E(T_2) = \frac{1}{\lambda_2} \approx 1250.$$

   La durée de vie moyenne est d'environ 909 h pour les composants de type A et 1250 h pour les composants de type B.

2. La densité de probabilité de T_1 est $f_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(T_1 \geqslant 1000) &= 1 - P(T_1 < 1000) \\
&= 1 - \int_0^{1000} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathrm{d}x \\
&= 1 + \left[e^{-\lambda_1 x}\right]_{x=0}^{1000} \\
&= e^{-1000\lambda_1} \\
&= e^{-1,1} \approx 0,33.
\end{aligned}$$

   La probabilité qu'un composant de type A soit encore en état de marche après 1000 h est d'environ $0,33$.
   De même,

$$P(T_2 \geqslant 1000) = e^{-1000\lambda_2} = e^{-0,8} \approx 0,45.$$

   La probabilité qu'un composant de type B soit encore en état de marche après 1000 h est d'environ $0,45$.

3. Par définition des probabilités conditionnelles

$$P_{(T_1 \geqslant 1000)}(T_1 \geqslant 2000) = \frac{P\big((T_1 \geqslant 1000) \cap (T_1 \geqslant 2000)\big)}{P(T_1 \geqslant 1000)}.$$

Comme $(T_1 \geqslant 1000) \cap (T_1 \geqslant 2000) = (T_1 \geqslant 2000)$, on obtient

$$P_{(T_1 \geqslant 1000)}(T_1 \geqslant 2000) = \frac{P(T_1 \geqslant 2000)}{P(T_1 \geqslant 1000)}.$$

De manière identique à la question 2. on obtient alors,

$$P_{(T_1 \geqslant 1000)}(T_1 \geqslant 2000) = \frac{e^{-2000\lambda_1}}{e^{-1000\lambda_1}} = e^{-2000\lambda_1 + 1000\lambda_1} = e^{-1000\lambda_1} \approx 0,33.$$

On retrouve donc que la probabilité que le composant soit en état de marche après 2000 h sachant qu'il est en état de marche après 1000 h est égale à la probabilité que le composant soit en état de marche après 1000 h : la loi exponentielle est "sans mémoire".

4. Les composants sont associés en série : le dispositif est en état de marche seulement si les deux composants sont en état de marche. On note T_S la variable aléatoire prenant pour valeurs la durée de vie du dispositif constitué d'un composant A en série avec un composant B.
   (a) Le montage étant en série, on a

   $$\begin{aligned} P(T_S \geqslant 1000) &= P\big((T_1 \geqslant 1000) \cap (T_2 \geqslant 1000)\big) \\ &= P(T_1 \geqslant 1000) \times P(T_2 \geqslant 1000) && \text{par indépendance} \\ &= e^{-1000\lambda_1} \times e^{-1000\lambda_2} && \text{d'après la question 2.} \\ &= e^{-1000(\lambda_1+\lambda_2)} \approx 0,15. \end{aligned}$$

   La probabilité que le dispositif en série soit en état de marche après 1000 h est d'environ $0,15$.
   (b) On cherche à déterminer la loi de T_S. Pour cela on calcule sa fonction de répartition. De même qu'à la question précédente, on obtient pour tout $t \geqslant 0$,

   $$P(T_S \geqslant t) = e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

   D'où

   $$P(T_S \leqslant t) = 1 - e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

   On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Ainsi, T_S suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Finalement,

   $$E(T_S) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{0,0019} \approx 526,32.$$

   La durée de vie moyenne du dispositif en série est d'environ $526,32$ h.
5. Les composants sont associés en parallèle : le dispositif est en panne seulement si les deux composants sont en panne. On note $\widetilde{T_1}$ la variable aléatoire prenant pour valeurs la durée de vie du deuxième composant A et on note T_P la variable aléatoire prenant pour valeurs la durée de vie du dispositif constitué des deux composants A en parallèle.

(a) Le montage étant en parallèle, on a

$$\begin{aligned}
P(T_P \leqslant 1000) &= P\big((T_1 \leqslant 1000) \cap (\widetilde{T}_1 \leqslant 1000)\big) \\
&= P(T_1 \leqslant 1000) \times P(\widetilde{T}_1 \leqslant 1000) && \text{par indépendance} \\
&= P(T_1 \leqslant 1000)^2 && \text{car les 2 composants suivent la même loi} \\
&= \big(1 - e^{-1000\lambda_1}\big)^2 && \text{d'après la question } 2.
\end{aligned}$$

Alors,

$$P(T_P \geqslant 1000) = 1 - \big(1 - e^{-1000\lambda_1}\big)^2 \approx 0,55.$$

La probabilité que le dispositif en parallèle soit en état de marche après 1000 h est d'environ $0,55$.

(b) On cherche à déterminer la loi de T_P. Pour cela on calcule sa fonction de répartition. De même qu'à la question précédente, on obtient pour tout $t \geqslant 0$,

$$P(T_P \leqslant t) = P(T_1 \leqslant t)^2 = \left(\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathrm{d}x\right)^2.$$

On note f_P la fonction de densité de T_P. La fonction de densité étant la dérivée de la fonction de répartition, on obtient

$$\begin{aligned}
f_P(t) &= 2 \times \big(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\big) \times \left(\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathrm{d}x\right) \\
&= 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \\
&= 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 t}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(T_P) &= \int_0^{+\infty} x f_P(x) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+\infty} x\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} 2x\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La première intégrale est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ_1, la seconde est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre $2\lambda_1$. Finalement,

$$E(T_P) = 2 \times \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} = \frac{3}{2\lambda_1} \approx 1363,64.$$

La durée de vie moyenne du dispositif en série est d'environ $1363,64$ h.