Estimation

Exercice 1 On donne la répartition des masses de 219 ressorts provenant d'une même fabrication :

Masses (g)	$[8,2;8,4[$	$[8,4;8,6[$	$[8,6;8,8[$	$[8,8;9[$	$[9;9,2[$	$[9,2;9,4[$	$[9,4;9,6[$
Nb de ressorts	9	21	39	63	45	27	15

X donnant le poids d'un ressort provenant de cette fabrication donner une estimation ponctuelle de $E(X)$ et $\sigma(X)$. Donner pour $E(X)$ un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.

Exercice 2 A la veille d'une consultation électorale comportant deux candidats, on a interrogé 100 électeurs constituant un échantillon représentatif. 58 d'entre eux ont déclaré avoir l'intention de voter pour le candidat Dupont.

1. Indiquer, avec une probabilité de $0,95$, entre quelle limites se situe la proportion du corps électoral favorable à Dupont au moment du sondage. Peut-on en déduire, avec la même probabilité de $0,95$, que Dupont serait élu si les opinions ne se modifiaient pas.
2. Avec une même fréquence observée d'électeurs favorables à Dupont, quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour pouvoir affirmer, avec un risque de 5%, que Dupont sera élu ?

Exercice 3 Des ornithologues tentent d'estimer le nombre N d'oiseaux présents dans une réserve naturelle. Pour cela, ils commencent par capturer q oiseaux, auxquels ils accrochent un petit bracelet autour de la patte, puis il les relâchent. Par la suite ils procèdent de la manière suivante. Ils capturent des oiseaux au hasard dans la réserve, et notent $X_i = 1$ si le i-ème oiseau capturé possède un bracelet, et $X_i = 0$ sinon. Ils relâchent ensuite l'oiseau.

1. Par quelle loi modéliseriez-vous la variable X_i ? On donnera $E(X_i)$ et $\sigma(X_i)$.
2. On suppose que $q = 100$ et que les ornithologues ont capturé $n = 500$ oiseaux supplémentaires parmi lesquels ils ont trouvé 12 oiseaux portant un bracelet. On note $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ le proportion d'oiseaux bagués parmi les n capturés. Par quelle loi peut-on approximer $\overline{X_n}$? En déduire un intervalle pour la valeur N avec une erreur de 5%.

Exercice 4 On a mesuré le poids de raisin par souche sur 10 souches prises au hasard dans une vigne. On a obtenu les résultats suivants (en kg) :

$$2,4 \quad 3,2 \quad 3,6 \quad 4,1 \quad 4,3 \quad 4,7 \quad 5,4 \quad 5,9 \quad 6,5 \quad 6,9$$

1. Déterminer une estimation ponctuelle non biaisée de la moyenne et de l'écart type la population dont ces souches sont extraites.
2. Donnez un intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de 5%, en supposant que le poids de raisin par souche suit une loi normale au niveau de la vigne.
3. On suppose que pour un échantillon de 100 souches, on a trouvé la même moyenne et le même écart type. Donner au risque 5% un intervalle de confiance de la moyenne.

Exercice 5 On veut estimer l'espérance mathématique μ d'une variable aléatoire gaussienne X dont on connaît l'écart-type $\sigma = 2,3$. Quelle est la taille minimum de l'échantillon de X qui est à prendre si l'on veut obtenir pour μ un intervalle de confiance de seuil $0,95$ et dont la longueur ne dépasse pas $0,1$.

Exercice 6 (Comparaison d'un pourcentage à un nombre fixé) Une entreprise fabrique des flacons destinés à contenir une substance particulière. Un flacon est dit conforme s'il vérifie un ensemble de critères définies par l'entreprise. On appelle p la proportion de flacons conformes dans l'ensemble de la production.
On se propose de construire et d'utiliser un test unilatéral pour valider ou refuser, au seuil de risque 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion p de flacons conformes dans l'ensemble de la production, sur une période donnée, est égale à $0,8$. Hypothèse nulle $H_0 : p = 0,8$; hypothèse alternative $H_1 : p < 0,8$.
Pour cela, on prélève au cours de cette période dans l'ensemble de la production des échantillons de 200 flacons au hasard et avec remise. On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe la proportion de flacons conforme de cet échantillon.

1. Sous l'hypothèse H_0 :
   i Donner la loi de F
   ii Déterminer le réel positif h tel que : $\mathbf{P}(F \geq 0,8 - h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision relatif à ce test de validité d'hypothèse.
3. Dans un échantillon de 200 flacons, on a trouvé 156 flacons conformes. Au vue de cet échantillon, doit-on, au seuil de 5%, accepter ou refuser l'hypothèse $p = 0,8$?

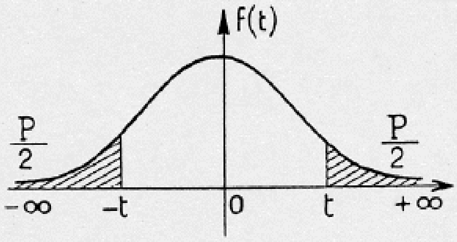
Exercice 7 (Comparaison des moyennes de deux populations) Deux laboratoires A et B fabriquent des tubes à essai et les conditionnent dans des paquets. Tous les paquets contiennent le même nombre de tubes. On se propose de construire un test d'hypothèse pour comparer les quantités de production de ces laboratoires.
On note X_1, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise A d'espérance μ_1 et d'écart type σ_1. On note X_2, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tubes défectueux par paquet provenant de l'entreprise B d'espérance μ_2 et d'écart type σ_2.
Sur un échantillon $\mathcal{E}_1$ de taille $n_1 = 49$ paquets provenant du laboratoire A, on a obtenu une estimation de la moyenne de X_1, $\widehat{\mu_1} = 4,84$ et son écart type $\widehat{\sigma_1} = 2,99$. Sur un échantillon $\mathcal{E}_2$ de taille de $n_2 = 64$ paquets provenant du laboratoire B, on a obtenu une estimation de la moyenne de X_2, $\widehat{\mu_2} = 3,88$ et son écart type $\widehat{\sigma_2} = 1,46$.
On note $\overline{X_1}$, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons de 49 paquets de la production du laboratoire A. Et on note $\overline{X_2}$, la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre moyen de tubes défectueux par paquet dans des échantillons de 64 paquets de la production du laboratoire B.

1. Par quelle loi peut-on approximer la variable aléatoire $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$?
2. **Test bilatère :** On pose pour hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ et pour hypothèse alternative $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
   i. Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :
   $$\mathbf{P}(-h \leq D \leq h) = 0,99 \qquad \mathbf{P}(-k \leq D \leq k) = 0,95.$$
   ii. Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de risque 1%, puis 5%.
   iii. Peut-on conclure après examen des échantillons que la différence des moyennes observées est significative au seuil de risque 1% ? Au seuil de risque 5% ?
3. **Test unilatère :** On pose pour hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ et pour hypothèse alternative $H'_1 : \mu_1 > \mu_2$.
   i. Calculer, sous l'hypothèse H_0, les nombres h et k tels que :
   $$\mathbf{P}(D \leq h) = 0,99 \qquad \mathbf{P}(D \leq k) = 0,95.$$
   ii. Énoncer la règle de décision relative à ce test lorsqu'on choisit un seuil de risque 1%, puis 5%.
   iii. Peut-on conclure après examen des échantillons que la différence des moyennes observées est significative au seuil de risque 1% ? Au seuil de risque 5% ?

Exercice 8 (Comparaison de pourcentages de deux populations) Dans un grand pays démocratique, un quotidien publie tous les mois la "côte" du chef du gouvernement à partir d'un sondage réalisé sur un échantillon représentatif de 1000 personnes. Au mois de janvier, la côte publiée était 38% d'opinions favorables, en février la côte était de 36%.

1. Peut-on, au risque de 5%, considérer que la côte du chef du gouvernement n'a pas changé ?
2. Peut-on, au risque de 5%, considérer que la côte du chef du gouvernement a baissé ?
3. Répondre aux mêmes questions en supposant que les côtes ont été obtenues sur un échantillon représentatif de 4000 personnes.

Table de la distribution T qui suit une loi Student : valeurs de t tel que $\mathbf{P}(|T| \geq t) = p$.



ν \ P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291