Variables aléatoires continues

Exercice 1 (La station-service) Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, suit une variable aléatoire X de densité $f(x) = c(1-x)^2$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Quelles valeurs peuvent être prises par X ?
2. Déterminer c.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité minimale du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-3}.

Exercice 2 On suppose que la distance entre deux stations-service consécutives le long d'une autoroute est de 50km. On appelle X la distance parcourue par une automobile qui tombe en panne entre deux stations-service depuis le passage devant la première. X est donc comprise entre 0 et 50 km. On fait l'hypothèse qu'elle suit une loi uniforme sur $[0, 50]$.

1. Déterminer la probabilité d'être à plus de 10km d'une station service.
2. La distance entre le lieu de la panne et la station-service la plus proche est une fonction de X, notée $g(X)$. Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de la valeur x prise par la variable X, en prenant soin de distinguer deux cas.
3. Quelles sont l'espérance et la variance de $g(X)$?
4. Si une station-service demande un prix fixe de 40 euros plus 10 euros par km à parcourir pour effectuer un dépannage, quel est le coût moyen d'un dépannage ? Quel est l'écart-type de ce coût ?

Exercice 3 On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0.001 de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 4 On considère deux variables aléatoires T_1 et T_2 prenant pour valeur les durées de vie en heure de deux composants de type A et B. On suppose que ces deux composants suivent respectivement les lois $\mathcal{E}xp(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}xp(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 = 0,0011$ et $\lambda_2 = 0,0008$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne des composants de type A et B.
2. Quelle est la probabilité qu'un composant de type A soit encore en état de marche après 1000 heures de fonctionnement ? Même question pour un composant de type B.
3. Sachant que le composant de type A soit encore en état de marche après 1000 heures, quelle est la probabilité que se composant vive encore 1000 heures de plus ?
4. Déterminer à partir de combien d'heures 70% des composants de type A auront eu leur première défaillance.
5. On constitue un système associant en série un composant de type A et un composant de type B fonctionnant de manière indépendante.
   (a) Quelle est la probabilité que ce système fonctionne encore au-delà de 1000 heures ?
   (b) Quelle est la durée de vie moyenne du système ? (Indication : montrer que la variable aléatoire donnant la durée de vie du système suit une loi exponentielle)
6. Pour essayer d'améliorer la fiabilité, on associe deux composants de type A en parallèle. On supposera que les deux composants fonctionnent de manière indépendante.
   (a) Quelle est la probabilité que ce système fonctionne encore au-delà de 1000 heures ?
   (b) Si on note T la variable aléatoire associée à la durée de vie du système, donner la densité de T et en déduire la durée de vie moyenne du système ?

Exercice 5 Le délai de livraison d'une pièce suit une loi normale de moyenne 30 jours et d'écart-type 5 jours.

1. Quelle est la probabilité pour que le délai soit inférieur à 38 jours ? Compris entre 22 et 38 jours ?
2. Même question si la moyenne passe à 32 jours avec un écart-type de 8 jours.

Exercice 6 On suppose qu'avec une certaine balance de laboratoire, l'erreur (en g) sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 0,08$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte $72,37$g.

1. Quelle est la probabilité $P(72,3 < X < 72,5)$?
2. Déterminer un intervalle centré I sur $72,37$ tel que $P(X \in I) = 0,98$.

Exercice 7 D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne $\mu = 1,58$m et d'écart-type $\sigma = 0,06$. Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.

1. Il commence par déterminer un intervalle de la forme $[\mu - a, \mu + a]$ (donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90% (environ) des tailles des femmes françaises. Calculer a.
2. Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles $[\mu - a, \mu - a/3]$, $[\mu - a/3, \mu + a/3]$ et $[\mu + a/3, \mu + a]$. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

Exercice 8 On admet que la variable aléatoire X qui associe à toute ampoule du type A sa durée de vie, mesurée en heures, suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ.

1. On suppose que μ vaut 1400 et que σ vaut 200. Calculer $\mathbf{P}(X \geq 1100)$ et $\mathbf{P}(X \leq 1600)$.
2. On suppose maintenant qu'une étude statistique permet de dire que $\mathbf{P}(X \geq 1100) = 0,9332$ et $\mathbf{P}(X \leq 1600) = 0,8413$. Déterminer μ et σ.

Exercice 9 On choisi au hasard de manière uniforme deux points sur le segment $[0,1)$ indépendamment l'un de l'autre.

1. Sachant que le plus petit nombre est supérieur à $1/3$, quelle est la probabilité pour que le plus grand soit supérieur à $3/4$?
2. Quelle est la probabilité que les trois segments formés par ces deux points puissent former un triangle ?

Fonction de répartition $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}or(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Variables aléatoires continues (Méthodes)

☞ Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue ?

• On suppose donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est bien une densité de probabilité, c'est-à-dire, s'assurer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$,
2. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

• On suppose donnée la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Pour déterminer sa densité de probabilité f :

1. Déterminer les intervalles I sur lesquels F est dérivable.
2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = F'(x)$.

☞ Comment déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Comment calculer l'espérance, l'écart-type d'une variable aléatoire continue ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X.
Pour l'espérance mathématique :

1. Utiliser la formule $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

Pour l'écart-type :

2. Calculer $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$
3. Calculer la variance par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
4. Calculer enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☞ Comment calculer la probabilité d'une loi normale ?

Soit X une loi normale $\mathcal{N}or(\mu;\sigma)$. On cherche à calculer $\mathbf{P}(x_1 \leq X \leq x_2)$.

1. Il faut se ramener systématiquement à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}or(0;1)$ par le changement de variable $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= \mathbf{P}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{P}(u_1 \leq X \leq u_2) \\ &= \Pi(u_2) - \Pi(u_1) \end{aligned}$$

   en posant $u_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ et $u_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$ e où Π est la fonction de répartition de $\mathcal{N}or(0;1)$.

2. Les calculs sont ensuite effectués avec la table qui fournit les valeurs, pour $u \geq 0$, de $\mathbf{P}(U \leq u) = \Pi(u)$. Pour $u < 0$, on utilise la formule :

$$\mathbf{P}(U < u) = \mathbf{P}(U \leq u) = 1 - \mathbf{P}(U \leq -u) = 1 - \Pi(-u).$$

Remarque : Pour calculer $\mathbf{P}(U \geq u)$, on utilise la formule $\mathbf{P}(U \geq u) = 1 - \mathbf{P}(U < u) = 1 - \Pi(u)$.

☞ **Quand utiliser une loi Normale pour approcher une loi binomiale ?**

Pour n très grand ($n \geq 30$), p pas trop proche de 0 ou 1, et $np(1-p) > 3$, la loi normale constitue une bonne approximation de la loi binomiale. C'est-à-dire que, pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{B}in(n;p)$ par $\mathcal{N}or\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$.

☞ **Quand utiliser une loi Normal pour approcher une loi de Poisson ?**

Pour $\lambda \geq 20$, la loi normale constitue une bonne approximation de la loi de Poisson. C'est-à-dire que, pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{P}oi(\lambda)$ par $\mathcal{N}or(\lambda; \sqrt{\lambda})$.

☞ **Quand utiliser une loi Normal pour approcher une moyenne de variable aléatoire ?**

Soit X_1, X_2, ... , X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi et d'espérance $E(X) = E(X_1) = \cdots = E(X_n) < +\infty$ et d'écart type $\sigma(X) = \sigma(X_1) = \cdots = \sigma(X_n)$. On considère la moyenne de ces variables aléatoires $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$. Pour n suffisamment grand ($n \geq 30$), la loi de $\overline{X_n}$ peut être approché par une loi normale $\mathcal{N}or\left(E(X); \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)$.