IUT Aix-en-Provence Année 2014-2015
DUT Informatique TD Probabilités **feuille n° 5**

Variables aléatoires discrètes (classiques)

Exercice 1 Une machine produit des pièces en série. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est estimée à $0,03$. On prélève au hasard 10 pièces, on admet que le tirage peut être fait de manière indépendante. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

1. Quelle valeur peut prendre la variable aléatoire X et donner sa loi. En déduire l'espérance et l'écart type.
2. Donner la probabilité pour qu'il y ait au plus 8 pièces défectueuses.
3. Donner la probabilité pour qu'il y ait au moins 2 pièces défectueuses.

Exercice 2 (Epidémie) On suppose qu'un virus est présent chez 20% des individus d'une population. On considère la variable aléatoire X qui est le nombre de personnes porteuses parmi six prises au hasard.

1. Interpréter l'énoncé pour préciser la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes parmi les six choisies soient porteuses du virus.
3. Donner l'espérance et l'écart type de X.

Exercice 3 (Stratégie de QCM) Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (QCM) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce QCM, supposées indépendantes. A chaque question est associée quatre affirmations dont une seule est exacte. Le candidat doit cocher l'une des réponses.
On s'intéresse à un candidat qui répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations sont équiprobables.

1. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses parmi les cinq questions proposées.
   (a) Donner la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Déterminer l'espérance de X.
2. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note -1 à toute réponse incorrecte. On appelle Y la variable aléatoire égale à la note du candidat sur 20.
   (a) Exprimer Y en fonction de X et déterminer la loi de probabilité suivie par Y.
   (b) En déduire la probabilité que la note soit supérieure ou égale à 10.
   (c) Calculer l'espérance de Y.
3. Déterminer les points accordés à une réponse correcte et à une réponse incorrecte pour qu'en moyenne, un étudiant qui répond au hasard a une note inférieure à 1 sur 20.

Exercice 4 Une machine produit des composants électroniques. On suppose l'indépendance entre la production de ces composants et que la probabilité de fabrication d'un composant défectueux est 0,01. Déterminer la probabilité qu'un technicien constate que le premier composant défectueux est le cinquième fabriqué.

Exercice 5 (Attente dans un magasin) Dans un certain magasin, le nombre X de téléphones mobiles vendus chaque jour suit une loi de Poisson de moyenne 4,2 unités. Donner l'espérance et l'écart type de X. Quelle est la probabilité que la vente d'une journée soit de 4 unités ? Quelle est la probabilité que l'on vende au moins un téléphone ?

Exercice 6 (Dimensionner un tableau) On doit prédimensionner un tableau, qui est une ressource pour un ensemble de processus : un processus qui s'exécute a besoin d'une entrée dans le tableau. Si aucune entrée n'est disponible alors il est mis en attente dans une file. On sait qu'en moyenne λ processus s'exécutent en même temps. Comment dimensionner le tableau pour que la probabilité d'avoir à mettre (au moins) un processus en attente soit au plus de 10%. On donnera la taille du tableau pour $\lambda = 5$ et $\lambda = 10$. On pourra modéliser le nombre de processus qui s'exécutent en même temps par une loi de Poisson.

Exercice 7 Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25mm. On suppose que 3% des disques de la production sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 60 disques dans la production. La production étant très importante, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux.

1. Quelles valeurs peut prendre Y ? Quelle est la loi suivie par Y ? Calculer $E(Y)$.
2. Calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux.
3. On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi (arrondir au millième).
4. En utilisant la loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième).

Exercice 8 On a observé que 2% des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation (ces pannes survenaient d'une façon indépendante). Une entreprise utilise 150 micros de ce type. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de pannes prévisibles pour ce parc de 150 machine.

1. Déterminer la loi de probabilité X et calculer la probabilité des événements suivants :
   — le nombre mensuel de pannes est 5 ;
   — le nombre mensuel de pannes est au plus égal à 3.
2. Expliquer pourquoi X peut être approché par une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson et déterminer son paramètre. En utilisant cette approximation calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. Déterminer le nombre minimum N tel que la probabilité de l'événement "le nombre de panne est au plus N" soit supérieur à $0,99$.

Exercice 9 Des sondages permettent de constater que 10% de la population est constituée de gauchers. On considère donc, dans cet exercice, que la probabilité qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à $0,1$ et celle qu'il soit droitier est égale à $0,9$.

1. On note G la variable aléatoire correspondant au nombre de gauchers dans un groupe de 8 personnes. Donner la loi de probabilité de G.
2. Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :
   a) un seul gaucher ;
   b) au moins un gaucher ;
   c) exactement trois gauchers.
3. Un atelier de couture est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité que chacun des huit membres du personnel trouve une paire de ciseaux lui convenant ?
4. Soit X la variable aléatoire : "nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à sa convenance". Dressez un tableau donnant X en fonction du nombre G de gauchers dans les huits membres du personnel. Déduisez-en la loi de probabilité de X et calculez son espérance mathématique.

Exercice 10 (Le collectionneur) Imaginez que vous collectionnez des cartes offertes à chaque achat au supermarché. La collection compte 9 cartes différentes et vous vous mettez en tête de continuer à faire vos courses chaque semaine à ce supermarché jusqu'à ce que vous ayez la collection complète. Pendant combien de semaines aurez-vous à faire vos courses avant d'avoir obtenu la collection complète (en moyenne) ? On supposera que chaque semaine toute les cartes ont la même probabilité d'être obtenue.
On modélise la situation ainsi : considérons les variables $X_1, \ldots, X_9$ où X_i indique le temps d'attente (en nombre de semaines) avant d'obtenir i cartes différentes. On a nécessairement $X_1 = 1$ puisque la première carte démarre la collection. Montrer que pour $n \in [2, 8]$, on a $X_{n+1} = X_n + Y_n$ où Y_n est une loi géométrique dont on déterminera le paramètre. En déduire le temps moyen pour avoir les 9 cartes.