IUT Aix-en-Provence — Année 2014-2015

DUT Informatique — TD Probabilités **feuille n° 4**

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 Une entreprise commercialise 7 variétés d'un même article. Le profit pour chaque variété est le suivant : les variétés 1 et 6 rapportent 4€, les variétés 2, 4 et 5 rapportent 8€, la variété 3 rapporte 9€et la variété 7 rapporte 10€. On suppose qu'il y a équiprobabilité de la demande d'une variété quelconque de cet article. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout article choisi au hasard, le profit.

1. Donner la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
2. Tracer sa fonction de répartition.
3. Donner son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 2 Dans un jeu video, on vise une cible circulaire formée de trois cercles concentriques de rayon $r_1 = 10$cm, $r_2 = 20$cm et $r_3 = 30$cm. L'intérieur du cercle de rayon r_1 est coloriée en bleue, la zone comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2 est coloriée en vert et celle comprise entre les cercles de rayons r_2 et r_3 en rouge. Chaque lancer de rayon laser touche une zone de la cible avec une probabilité proportionnelle à l'aire de la zone.

1. Pour chaque zone, calculer la probabilité d'être atteinte par le laser.
2. Une partie se déroule en deux lancer supposé indépendant. Si l'on touche la zone bleue, on marque 10 points, la zone verte 5 points et la zone rouge 1 point. On appelle Y la variable aléatoire comptabilisant le nombre de point. Déterminer les valeurs prises par Y et la loi de Y
3. Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

Exercice 3 Dans un jeu, une urne contient trois boules vertes, deux boules rouges et quatre boules noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne. Le tirage d'une boule verte fait gagner 2 euros, celui d'une boule rouge fait gagner 1 euros et celui d'une boule noire fait perdre 3 euros. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain.

1. Déterminer les valeurs prises par X et la loi de probabilité associée.
2. Tracer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type associés à X.

Exercice 4 Un projet nécessite l'exécution de 3 tâches successives A, B et C et on note respectivement X_A, X_B et X_C les variables aléatoires qui, à chaque tâche, associent le nombre de jour pour les réaliser.

Tâche A		
Durée x_i en jours	3	4
$P(X_A = x_i)$	0.6	0.4

Tâche B				
Durée x_i en jours	8	9	10	11
$P(X_B = x_i)$	0.1	0.3	0.4	0.2

Tâche C			
Durée x_i en jours	4	5	6
$P(X_C = x_i)$	0.3	0.6	0.1

1. Calculer les espérances et les écarts type de X_A, X_B et X_C.
2. On définit la variable aléatoire $X = X_A + X_B + X_C$ qui à un chantier associe le nombre de jours nécessaire à sa réalisation. Calculer $E(X)$ et dire ce que cela représente.
3. Quelle sont les valeurs minimale et maximale prises par X et donner les probabilités d'atteindre ces valeurs. On supposera que les tâches A, B et C sont réalisées de manière indépendante.

Exercice 5 (Analyse d'algorithme) On se propose d'analyser la complexité (temps de calcul) en moyenne d'un algorithme. On considère l'algorithme ci-dessous pour trouver le plus grand élément dans un tableau non vide L de n entiers :

Algorithm 1: Détermination du maximum d'un tableau

Data: Un tableau L de taille n
Result: Le maximum du tableau

```
M ← L[1]
for j := 2 à n do
    if L[j] > M then
        M ← L[j]
    end
end
return M
```

---

1. Lors du traitement d'un tableau de taille n. Quel est le nombre de comparaisons effectuées (ligne 3) ?
2. Quel est le nombre d'affectations (lignes 1 et 4) dans le cas le plus favorable ? le plus défavorable ?
3. Dans la suite, on suppose que les éléments du tableau sont les entiers de 1 à n deux-à-deux distincts et que les $n!$ permutations possibles ont la même probabilité d'apparaître dans le tableau.
   On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'affectations lors du déroulement de l'algorithme. Ainsi $\mathbf{P}(X_n = k)$ correspond à la probabilité pour que k affectations soient nécessaires lors du déroulement de l'algorithme sur un tableau L de taille n tirée aléatoirement de manière équiprobable parmi les $n!$ possibles. Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$
4. Montrez la récurrence suivante :
   $$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) + \frac{n-1}{n}\mathbf{P}(X_{n-1} = k) \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n.$$
   Il faut distinguer deux cas de figures et raisonner selon que le $n^{\text{ème}}$ élément est maximal ou non.
5. L'espérance $\mathbf{E}(X_n)$ correspond au nombre moyen d'affectations effectuées lors du traitement d'un tableau de taille n. Montrer la récurrence $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \mathbf{E}(X_{n-1})$ et en déduire une expression de $\mathbf{E}(X_n)$.
6. Montrez que l'ordre de grandeur de $\mathbf{E}(X_n)$ se compare à $\log(n)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6 Au casino, un croupier choisit deux nombres $m, n \in [0, N]$, avec $m \leq n$, qu'il ne vous dévoilent pas. Il écrit ces deux nombres sur deux bouts de papier qu'il place secrètement sous deux chapeaux. Il demande ensuite de choisir l'un des chapeaux et dévoile le nombre qui y était caché. Vous devez ensuite parier en répondant à la question : le nombre resté sous l'autre chapeau est-il strictement plus grand que celui que l'on vient de vous dévoiler ?
A priori, à choisir sans stratégie particulière mais seulement au hasard (en jouant à pile ou face, par exemple), vous n'avez qu'une chance sur deux de gagner. Existe t-il une stratégie de réponse qui vous garantit que vous avez plus de chances de donner la bonne réponse ?
C'est ce que nous allons voir : Choisissez un nombre Z dans $[0, N]$ au hasard et selon une distribution de probabilité quelconque. Si Z est strictement plus grand que le nombre dévoilé, pariez que le nombre resté secret est plus grand que celui qui a été dévoilé. Montrez que cette stratégie est avantageuse.

Exercice défi Les probabilités des différents totaux qu'on peut obtenir en lançant deux dés et sommant les résultats obtenus sur les deux faces étonnent les personnes non familière aux probabilités. En effet, par exemple, la probabilité d'obtenir un total de 2 est de $\frac{1}{36}$ alors que la probabilité d'obtenir un total de 4 est de $\frac{1}{12}$, c'est à dire trois fois plus grande !

Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce que la probabilité d'obtenir chacun des résultats $2, 3, \ldots, 12$, soit égal à $\frac{1}{11}$?

Variables aléatoires discrètes (Méthodes)

☞ Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?

On suppose connus tous les événements élémentaires $\omega \in \Omega$ ainsi que leur probabilité $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$.

1. Déterminer $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$, on trouve un nombre fini ou dénombrable de valeurs.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$ déterminer $X^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.
3. Poser alors
$$p_x = \mathbf{P}(X^{-1}(x)) = \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$
4. La loi de probabilité de X est donné par les couples (x, p_x). On représente généralement les résultats sous la forme d'un tableau. On peut vérifier que l'on a bien $\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1$.

☞ Comment déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

On suppose connue la loi de probabilité de X définie par les couples $(x_k, p_{x_k})_{k \in \mathbb{K}}$ $K \subset \mathbb{N}$. De plus on suppose que $x_{k'} < x_{k''}$ si $k' < k''$.

1. Pour tout $k \in K$, calculer :
$$F(x_k) = \mathbf{P}(X \leq x_k) = \mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_k) = p_{x_1} + \cdots + p_{x_k}.$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver x_k et x_{k+1} tel que $x_k \leq x < x_{k+1}$. On a alors $F(x) = F(x_k)$.

☞ Comment calculer l'espérance, l'écart type d'une variable aléatoire ?

On suppose connue la loi de probabilité de X définie par les couples $(x_k, p_{x_k})_{k \in \mathbb{K}}$ $K \subset \mathbb{N}$.
Pour l'espérance mathématique :

1. Utiliser la formule $E(X) = \sum_{k \in K} p_{x_k} x_k$.

Pour l'écart type :

2. Calculer $E(X^2) = \sum_{k \in K} p_{x_k} x_k^2$
3. Calculer la variance par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
4. Calculer enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☞ Comment vérifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale ?

Une variable aléatoire X étant donnée,

1. Vérifier les assertions suivantes :
   (a) on a affaire à une épreuve de Bernoulli comportant deux issues complémentaires M et $\overline{M}$, avec $\mathbf{P}(M) = p$ et $\mathbf{P}(\overline{M}) = 1 - p$;
   (b) on réitère l'épreuve n fois les n réalisations sont indépendantes ;
   (c) X dénombre les réalisations de M.
2. Conclure : si X dénombre les réalisations de M, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
3. On a automatiquement $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

☞ Quand utiliser une loi de Poisson pour approcher une loi binomiale ?

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geq 50$ et $p < 0,1$ on peut approcher la loi de probabilité de X par une variable aléatoire Y qui suit une de Poisson $\mathcal{P}(np)$ (X et Y doivent avoir la même espérance $E(X) = E(Y) = np$). On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) \approx \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}.$$