IUT Aix-en-Provence Année 2014-2015
DUT Informatique TD Probabilités **feuille n° 3**

Probabilités conditionnelles

Exercice 1 Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$. De plus la probabilité de l'événement "la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne" est égale à $0,4$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Exercice 2 (Poker) Vous jouez au poker, version Texas Hold'em. Dans cette version du jeu, chaque joueur reçoit d'abord deux cartes issues d'un jeu de 52 cartes. Puis cinq cartes sont découvertes au centre de la table. Le joueur qui "gagne" (on ignore ici l'effet des mises) est celui qui fabrique la meilleure main de cinq cartes en composant avec les siennes et les cartes communes à tous les joueurs.

1. Quelle est la probabilité que vous obteniez une quinte flush royale ? (une série de cinq cartes dans la même couleur allant de l'as au 10).
2. Quelle est la probabilité que vous obteniez un full formé de trois as et de deux valets (on suppose qu'il n'y a pas quatre as ou trois valets dans les sept cartes proposées, sinon on a une main plus forte) ?
3. Le croupier distribue les cartes et vous recevez vos deux cartes : un as et un valet de pique. Déterminez alors la probabilité d'avoir une quinte flush royale, d'avoir un full formé de trois as et de deux valets ?

Exercice 3 On réalise une enquête sur le tabagisme dans deux universités :

Université 1 :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	420	75
Non fumeurs	280	225

Université 2 :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	440	360
Non fumeurs	110	90

On note A l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumer" et on note B l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin".

1. On choisit de manière équiprobable un individu parmi les 1000 personnes interrogées dans l'université 1. A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question pour la deuxième université

Exercice 4 Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2. On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par A l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_1".
On désigne par B l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_2".
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_1 est $\mathbf{P}(A) = 0,10$;
- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_2 est $\mathbf{P}(B) = 0,20$;
- la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.
2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2.
3. Les événements T_1 et T_2 sont ils indépendants ?

4. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
5. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant qu'il présente un défaut pour le traitement T_1.

Exercice 5 Un circuit électrique est formé de 3 composants, qui ont chacun pour probabilités d'être en panne p_1, p_2 et p_3, avec la propriété que les pannes des différents composants sont indépendantes. Calculer la probabilité que le circuit soit en panne dans chacun des cas suivants :

1. Les trois composants sont montés en parallèle.
2. Les 3 composants sont montés en série.
3. Deux sont en parallèle, et le troisième en série avec ce groupe de deux.
4. Dans chacun des cas précédents, calculer la probabilité que le composant 1 soit en panne sachant que le circuit ne fonctionne pas.

Exercice 6 Dans une population Ω, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% des individus. On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de M_1, sur 70% des malades M_2, et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu ω dans Ω, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour un individu ω, le test a réagi, donner les probabitités :
   — pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_1.
   — pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_2.
   — pour que le test ait réagi alors que l'individu n'est infecté par qu'aucune des deux maladies.

Exercice 7 (Reconnaissance de langage) On met au point un algorithme qui détecte si une page web écrite en anglais est rédigée par un natif (quelqu'un dont l'anglais est la langue maternelle). On évalue à 55% le pourcentage de pages sur le web qui sont écrites en anglais par des natifs. L'algorithme réussit à détecter correctement que la page est écrite par un natif dans 95% des cas lorsque la page est effectivement écrite par un natif. Elle affirme cependant incorrectement que la page est écrite par un natif alors que ce n'est pas le cas avec probabilité 1%.

Quelle est la probabilité qu'une page soit écrite par un natif lorsque l'algorithme l'affirme ?

Exercice 8 (Processus défectueux) Un contrôle est effectuée sur un ensemble de processeurs dont 15% présentent une panne non apparente. On réalise un test qui donne 95% de résultats positifs pour les processeurs défectueux, et 10% de résultats positifs pour les processeurs non défectueux. Quelle est la probabilité qu'un processeur pris au hasard présente la panne sachant que le test a donné un résultat positif ?

Exercice défi On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice défi Monty Hall propose le jeux télévisé suivant : un candidat doit choisir entre trois portes de garages fermées. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les autres portes se trouvent une chèvre. Lorsque le candidat a choisi une porte, Monty ouvre une des deux portes restantes pour faire apparaitre une chèvre (ce qui est possible). Il propose ensuite au candidat de rester devant la porte qu'il a choisi, ou bien de changer.

A votre avis, le candidat doit-il rester ? changer ? cela n'a aucune importance ?
(Justifier votre réponse)

IUT Aix-en-Provence Année 2014-2015
DUT Informatique TD Probabilités **feuille n° 3**

Probabilités conditionnelles (Solutions)

Correction 1 1. $\mathbf{P}(M1 \cap M2) = \mathbf{P}(M1)\mathbf{P}(M2/M1) = 0,01 \times 0,4 = 0,004$.

2. $\mathbf{P}(\overline{M1} \cup \overline{M2}) = 1 - \mathbf{P}(M1 \cap M2) = 0,996$

Correction 2 L'expérience aléatoire s'intéresse au carte disponible pour un joueur. Ainsi Ω est l'ensemble des tirages de 7 carte parmi 52 non-ordonné et sans remise. On a $|\Omega| = C_{52}^{7}$.

1. Soit A l'événement obtenir une quinte flush royale. $|A| = 4C_{47}^{2}$ d'ou $\mathbf{P}(A) = 3,16.10^{-5}$.
2. Soit C l'événement le croupier m'a distribué un as et un valet de pique. On a $|C| = C_{50}^{5}$, $|A \cap C| = C_{47}^{2}$, $|B \cap C| =$. $\mathbf{P}_C(A) = 5,10.10^{-4}$ $\mathbf{P}_B(A) =$

Correction 3 1. $\mathbf{P}(A) = 0,495$, $\mathbf{P}(B) = 0,3$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,075$. Comme $0,495 \times 0,3 = 0,1485 \neq 0,075$, les événements ne sont pas indépendants.

2. $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(B) = 0,45$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,36$. Comme $0,8 \times 0,45 = 0,36$, les événements sont indépendants.

Correction 4 1. $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$

2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$
3. Non car $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
4. L'événement "la lentille présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2" est représenté par :

$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

Ainsi $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = \cdots = 0,2$

5. $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

Correction 6 On note :

— M_1 ="être atteint par M_1",
— M_2 ="être atteint par M_2",
— N ="être atteint par aucune maladie"
— R ="le test réagit".

Le texte dit : $\mathbf{P}(M_1) = 0,1$, $\mathbf{P}(M_2) = 0,2$, $\mathbf{P}(N) = 0,7$, $\mathbf{P}(R|M_1) = 0,9$, $\mathbf{P}(R|M_2) = 0,7$ et $\mathbf{P}(R|N) = 0,1$,

1. $\mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(M_1 \cap R) + \mathbf{P}(M_2 \cap R) + \mathbf{P}(N \cap R) = \mathbf{P}(M_1) \times \mathbf{P}(R|M_1) + \mathbf{P}(M_2) \times \mathbf{P}(R|M_2) + \mathbf{P}(N) \times \mathbf{P}(R|N) = 0,3$.
2. — $\mathbf{P}(M_1|R) = \frac{\mathbf{P}(M_1 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = 0,3$
   — $\mathbf{P}(M_2|R) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{15} \approx 0,47$
   — $\mathbf{P}(N|R) = \frac{\mathbf{P}(N \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{30} \approx 0,23$

Correction On note :

— A ="le tableau est authentique",
— B = "le premier expert déclare le tableau authentique, le deuxième le déclare faux" $= E_1 \cap \overline{E_2}$,
— E_1 ="le premier expert a raison",
— E_2 ="le deuxième expert a raison".

On a $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0,2$, $\mathbf{P}(E_1) = 0,4$, $\mathbf{P}(E_2) = \frac{9}{11}$. On a $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(\overline{E_1}|A)\mathbf{P}(E_2|A)$ et $\mathbf{P}(B|\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{E_2}|A)\mathbf{P}(E_1|A)$.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B|\overline{A})} \approx 0,84$$

Probabilités conditionnelles (Méthodes)

☞ Comment calculer des probabilités conditionnelles ?

Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$. On cherche à calculer $\mathbf{P}_B(A)$.

- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non.
- Utiliser la définition : $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.
- Si on connaît $\mathbf{P}_A(B)$ et $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)}{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}_A(B)+\mathbf{P}(\overline{A})\times\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Bayes !

☞ Comment vérifier que deux événements sont indépendants pour une probabilité ?

Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

1. Déterminer l'événement représenté par $A\cap B$ et calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

Les deux événements sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

☞ Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux événements ?

Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. On cherche à calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.

- On sait que A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$. Utiliser la formule :

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B).$$

- On ignore si A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$, alors :
  - si $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}_A(B)$ est connue, utiliser la formule :
  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A).$$
  - si $\mathbf{P}(B)\neq 0$ et $\mathbf{P}_B(A)$ est connue, utiliser la formule :
  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(B)\times\mathbf{P}_B(A).$$
  - si $\mathbf{P}(A\cup B)$ est connue, utiliser la formule :
  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cup B).$$
  - si $\mathbf{P}(\overline{A\cap B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$ sont connues, exprimer $A\cap B$ en fonction de $\overline{A\cap B}$ ou $\overline{A}\cup\overline{B}$ ou $\overline{A}\cap\overline{B}$ et utiliser les formules de probabilité classique. Par exemple on obtient les expressions suivantes :
  $$\begin{aligned}
  \mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A\cap B}) \\
  \mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) \\
  \mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A})-\mathbf{P}(\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})
  \end{aligned}$$
  - sinon, essayer de trouver un événement E de probabilité connue, incompatible avec $A\cap B$, tel que $(A\cap B)\cup E$ forme un événement de probabilité connue, et utiliser la formule $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}((A\cap B)\cup E)-\mathbf{P}(E)$.