Variables aléatoires continues

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F_X. Est ce que X est une variable discrète ? Une variable à densité ?
2. Donner les valeurs de $P(X = \frac{1}{2})$, $P(X = 1)$, $P(\frac{3}{4} < X \leq 1)$ et $P(\frac{3}{4} \leq X \leq 1)$.

Exercice 2 Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ Ae^{-\frac{x}{82}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la constante A pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2. Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km, soit supérieure à 25 km.
3. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ? Comparez avec le résultat précédent.
4. On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. À l'aide d'une intégration par partie, calculer l'espérence $E(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.
5. L'entreprise possède n autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle donné par la densité f. On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km. Montrer que X_d suit une loi binomiale et déterminez les paramètres. En déduire le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

Exercice 3 On considère deux variables aléatoires T_1 et T_2 prenant pour valeur les durées de vie en heure de deux composants de type A et B. On suppose que ces deux composants suivent respectivement les lois $\mathcal{E}xp(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}xp(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 = 0,0011$ et $\lambda_2 = 0,0008$. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ si elle a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Quelle la durée de vie moyenne des composants de type A et B.
2. Quelle est la probabilité qu'un composant de type A soit encore en état de marche après 1000 heures de fonctionnement ? Même question pour un composant de type B.
3. Déterminer à partir de combien d'heures 70% des composants de type A auront eu leur première défaillance.
4. Pour essayer d'améliorer la fiabilité, on associe deux composants de type A : quelle est la probabilité qu'un tel système connaisse sa première panne avant 1000 heures de fonctionnement ? (On suppose que les deux composants fonctionnent indépendamment l'un de l'autre)
5. On constitue un système associant en série un composant de type A et un composant de type B. Quelle est la probabilité que ce système fonctionne encore au-delà de 1000 heures ?

Exercice 4 Le délai de livraison d'une pièce suit une loi normale de moyenne 30 jours et d'écart-type 5 jours.

1. Quelle est la probabilité pour que le délai soit inférieur à 38 jours ? Compris entre 22 et 38 jours ?
2. Même question si la moyenne passe à 32 jours avec un écart-type de 8 jours.

Exercice 5 Une usine assure le conditionnement d'un très grand nombre de bouteilles d'un certain type. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard, associe sa contenance exprimée en litres. On admet que lorsque la machine est bien réglée X suit la loi normale de moyenne $1L$ et d'écart type $0,01L$.

1. Quelle est la probabilité qu'une bouteille, prise au hasard, contienne moins de $0,98L$
2. La capacité maximale d'une bouteille est de $1,025L$; quelle est la probabilité qu'une bouteille, prise au hasard, contienne plus de $1,025L$?

Exercice 6 On suppose qu'avec une certaine balance de laboratoire, l'erreur (en g) sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 0,08$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte $72,37$g.

1. Quelle est la probabilité $P(72,3 < X < 72,5)$?
2. Déterminer un intervalle centré I sur $72,37$ tel que $P(X \in I) = 0,98$.

Exercice 7 La taille d'une femme française suit une loi normale de moyenne 167cm et d'écart-type 5cm.

1. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille supérieure à 1m70 ?
2. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille inférieure à 1m60 ?
3. Quelle est la proportion de femmes ayant une taille comprise entre 1m63 et 1m69 ?
4. Pour une place de pilote d'avion, 50 femmes ont postulé et 23 ont été refusées parce qu'elles étaient trop grandes et 2 ont été refusées parce qu'elles étaient trop petites.
   (a) Calculer le pourcentage de femmes refusées parce qu'elles étaient trop grandes et celui des femmes refusées parce qu'elles étaient trop petites.
   (b) En supposant que l'on obtiendrait des résultats identiques (en proportion) en considérant l'ensemble des femmes françaises, donner la taille minimale et la taille maximale imposées pour être pilote d'avion.

Exercice 8 Dans une revue, on peut lire : "On estime à $60,5\%$ le pourcentage de français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année." On considère 100 personnes prises au hasard, avec remise, parmi la population française. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement de 100 personnes associe le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, on donnera son espérance et l'écart type.
2. Calculer la probabilité de l'évènement "$X = 45$".
3. On décide d'approcher X par une loi normale noté Y. Donner les paramètres de cette loi normale et calculer $P(44,5 \leq Y \leq 45,5)$.
4. Déterminer la probabilité qu'au plus 30 de ces 100 personnes ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

Exercice 9 Au marché de Brive-la-Gaillarde, on a pesé les bottes d'oignons : sur 2000 bottes, 120 pèsent moins de 900 grammes et 112 pèsent plus de $1,150$ kilogrammes. En admettant que la variable aléatoire X égale à la masse en kilogramme d'une botte d'oignons suit une loi normale, donner une estimation de ses paramètres.

Exercice 10 Albert et Bernard décident de faire n parties de pile ou face, avec un enjeu de 1€ par partie. Chacun d'eux dispose de la somme de 20€. Le règlement aura lieu à la fin de la $n^{\text{ième}}$ partie.

1. Soit X le nombre de parties que gagnera Albert. Quelle double inégalité doit satisfaire X pour que le règlement puisse s'effectuer sans dette de l'un ou de l'autre joueur (c'est à dire que le perdant peut régler immédiatement le gagnant) ?
2. Déterminer une valeur n pour que la probabilité d'un règlement sans dette soit au moins égale à $0,68$.

Exercice 11 La longueur des tiges de chrysanthèmes en fleurs coupées intervient dans le classement par catégorie. Pour simplifier, on supposera par la suite que cette longueur sera le seul critère de classement. Un chrysanthème sera classé en catégorie extra si la longueur de sa tige est supérieure ou égale à 80cm.
Au 1^er^ décembre, on évalue la production d'une certaine serre à 6000 chrysanthèmes pour le mois. A cette époque, les chrysanthèmes classés en catégorie extra, sont payés au producteur 26€ les dix, et les autres 16€ les dix seulement. La qualité de la production ayant été étudiée sur un échantillon de 100 tiges coupées de chrysanthèmes, on en conclut que la longueur des tiges coupées est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 92cm et d'écart-type 8cm.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une fleur soit classée en catégorie extra ?
2. Quelle est l'espérance mathématique du nombre de fleurs qui seront classées en catégorie extra sur les 6000 fleurs de la production de décembre ?
3. En déduire l'espérance de la recette pour le total de la production de la serre pendant ce mois.

Exercice 12 Des ornithologues tentent d'estimer le nombre N d'oiseaux présents dans une réserve naturelle. Pour cela, ils commencent par capturer q oiseaux, auxquels ils accrochent un petit bracelet autour de la patte, puis il les relâchent. Par la suite ils procèdent de la manière suivante. Ils capturent des oiseaux au hasard dans la réserve, et notent $X_i = 1$ si le i-ème oiseau capturé possède un bracelet, et $X_i = 0$ sinon. Ils relâchent ensuite l'oiseau.

1. Par quelle loi modéliseriez-vous la variable X_i ? On donnera $E(X_i)$ et $\sigma(X_i)$.
2. On suppose que $q = 100$ et que les ornithologues ont capturé $n = 500$ oiseaux supplémentaires parmi lesquels ils ont trouvé 12 oiseaux portant un bracelet. On note $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ le proportion d'oiseaux bagués parmi les n capturés. Par quelle loi peut-on approximer $\overline{X_n}$? En déduire un intervalle pour la valeur N avec une erreur de 5%.

Exercice 13 Une machine automatique fabrique des pièces.

1. On choisit au hasard un lot de 10000 pièces et on mesure les longueurs en mm de ces pièces. On obtient le tableau suivant :

longueur(mm)	$[244; 246[$	$[246; 248[$	$[248; 250[$	$[250; 252[$	$[252; 254[$	$[254; 256[$
Effectif	113	1318	3510	3530	1390	139

   Calculer au 1/100ème près, la moyenne et l'écart-type de ce lot.
2. On considérera dans la suite que la distribution de ce lot est normale, de moyenne $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 1,94$. On examine un échantillon de 36 pièces de ce lot. Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon soit extérieure à l'intervalle $[249,1; 250,9]$?
3. On fabrique maintenant un nouveau lot de pièces. On règle la machine pour que la longueur des pièces suive une loi normale de moyenne 400, l'écart-type restant 1,94. La longueur d'une pièce est acceptable si elle est comprise entre 397 et 403mm. Quel est le pourcentage de pièces dont la longueur est acceptable ?

Exercice 14

1. On lance un dé n fois et on considère la variable aléatoire N correspondant au nombre de six obtenu. A partir de quelle valeur de n aura-t-on 9 chances sur 10 d'avoir $\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0,01$?
2. On lance 3600 fois un dé. Evaluer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris entre 540 et 660.

Exercice 15 Avant le second tour d'une élection, opposant les candidats D et G, un institut de sondage interroge au hasard 1000 personnes dans la rue. On note p la proportion d'électeurs décidés à voter pour G dans la population totale et on suppose l'échantillon de personnes intérrogées représentatif. Dans l'échantillon sondé, cette proportion est égale à $0,54$.

1. Peut on proposer un intervalle de confiance pour p avec un risque d'erreur de 5%.
2. Combien de personnes faut-il interroger pour donner une fourchette à 1% avec un seuil de 95% ?

Fonction de répartition $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}or(0;\, 1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Variables aléatoires continues (Méthodes)

☞ Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue ?

• On suppose donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est bien une densité de probabilité, c'est-à-dire, s'assurer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$,
2. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

• On suppose donnée la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Pour déterminer sa densité de probabilité f :

1. Déterminer les intervalles I sur lesquels F est dérivable.
2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = F'(x)$.

☞ Comment déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Comment calculer l'espérance, l'écart-type d'une variable aléatoire continue ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X.
Pour l'espérance mathématique :

1. Utiliser la formule $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

Pour l'écart-type :

2. Calculer $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$
3. Calculer la variance par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
4. Calculer enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☞ Comment calculer la probabilité d'une loi normale ?

Soit X une loi normale $\mathcal{N}or(\mu;\sigma)$. On cherche à calculer $\mathbf{P}(x_1 \leq X \leq x_2)$.

1. Il faut se ramener systématiquement à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}or(0;1)$ par le changement de variable $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= \mathbf{P}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{P}(u_1 \leq X \leq u_2) \\ &= \Pi(u_2) - \Pi(u_1) \end{aligned}$$

   en posant $u_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ et $u_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$ e où Π est la fonction de répartition de $\mathcal{N}or(0;1)$.

2. Les calculs sont ensuite effectués avec la table qui fournit les valeurs, pour $u \geq 0$, de $\mathbf{P}(U \leq u) = \Pi(u)$. Pour $u < 0$, on utilise la formule :

$$\mathbf{P}(U < u) = \mathbf{P}(U \leq u) = 1 - \mathbf{P}(U \leq -u) = 1 - \Pi(-u).$$

Remarque : Pour calculer $\mathbf{P}(U \geq u)$, on utilise la formule $\mathbf{P}(U \geq u) = 1 - \mathbf{P}(U < u) = 1 - \Pi(u)$.

☞ **Quand utiliser une loi Normale pour approcher une loi binomiale ?**

Pour n très grand ($n \geq 30$), p pas trop proche de 0 ou 1, et $np(1-p) > 3$, la loi normale constitue une bonne approximation de la loi binomiale. C'est-à-dire que, pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{B}in(n;p)$ par $\mathcal{N}or\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$.

☞ **Quand utiliser une loi Normal pour approcher une loi de Poisson ?**

Pour $\lambda \geq 20$, la loi normale constitue une bonne approximation de la loi de Poisson. C'est-à-dire que, pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{P}oi(\lambda)$ par $\mathcal{N}or(\lambda; \sqrt{\lambda})$.

☞ **Quand utiliser une loi Normal pour approcher une moyenne de variable aléatoire ?**

Soit X_1, X_2, ... , X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi et d'espérance $E(X) = E(X_1) = \cdots = E(X_n) < +\infty$ et d'écart type $\sigma(X) = \sigma(X_1) = \cdots = \sigma(X_n)$. On considère la moyenne de ces variables aléatoires $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$. Pour n suffisamment grand ($n \geq 30$), la loi de $\overline{X_n}$ peut être approché par une loi normale $\mathcal{N}or\left(E(X); \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)$.