IUT Aix-en-Provence — Année 2012-2013
DUT Informatique — TD Probabilités **feuille n° 5**

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 On lance deux dés bien équilibrés. On considère la variable aléatoire X qui est la somme des deux chiffres obtenus.

1. Donner la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
2. Tracer sa fonction de répartition.
3. Donner son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 2 Dans un jeu video, on vise une cible circulaire formée de trois cercles concentriques de rayon $r_1 = 10$cm, $r_2 = 20$cm et $r_3 = 30$cm. L'intérieur du cercle de rayon r_1 est coloriée en bleue, la zone comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2 est coloriée en vert et celle comprise entre les cercles de rayons r_2 et r_3 en rouge. Chaque lancer de rayon laser touche une zone de la cible avec une probabilité proportionnelle à l'aire de la zone.

1. Pour chaque zone, calculer la probabilité d'être atteinte par le laser.
2. Une partie se déroule en deux lancer supposé indépendant. Si l'on touche la zone bleue, on marque 10 points, la zone verte 5 points et la zone rouge 1 point. On appelle Y la variable aléatoire comptabilisant le nombre de point. Déterminer les valeurs prises par Y, la loi de Y ainsi que l'espérance et l'écart type.

Exercice 3 Dans un jeu, une urne contient trois boules vertes, deux boules rouges et quatre boules noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne. Le tirage d'une boule verte fait gagner 2 euros, celui d'une boule rouge fait gagner 1 euros et celui d'une boule noire fait perdre 3 euros. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain.

1. Déterminer les valeurs prises par X et la loi de probabilité associée.
2. Tracer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer la probabilité de perdre de l'argent.
4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type associés à X.

Exercice 4 Un chantier nécessite l'exécution de 3 tâches successives A, B et C et on note respectivement X_A, X_B et X_C les variables aléatoires qui, à chaque tâche, associent le nombre de jour pour les réaliser.

Tâche A		
Durée x_i en jours	3	4
$P(X_A = x_i)$	0.6	0.4

Tâche B				
Durée x_i en jours	8	9	10	11
$P(X_B = x_i)$	0.1	0.3	0.4	0.2

Tâche C			
Durée x_i en jours	4	5	6
$P(X_C = x_i)$	0.3	0.6	0.1

1. Calculer les espérances et les écarts type de X_A, X_B et X_C.
2. On définit la variable aléatoire $X = X_A + X_B + X_C$ qui à un chantier associe le nombre de jours nécessaire à sa réalisation. Calculer $E(X)$ et dire ce que cela représente.
3. Quelle sont les valeurs minimale et maximale prises par X et donner les probabilités d'atteindre ces valeurs. On supposera que les tâches A, B et C sont réalisées de manière indépendante.

Exercice 5 Une machine produit des pièces en série. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est estimé à $0,03$. On prélève au hasard 10 pièces, on admet que le tirage peut être fait de manière indépendante. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

1. Quelle valeur peut prendre la variable aléatoire X et donner sa loi. En déduire l'espérance et l'écart type.
2. Donner la probabilité pour qu'il y ait au plus 8 pièces défectueuses.
3. Donner la probabilité pour qu'il y ait au moins 2 pièces défectueuses.

Exercice 6 On suppose qu'un virus est présent chez 20% des individus d'une population. On considère la variable aléatoire X qui est le nombre de personnes porteuses parmi six prises au hasard.

1. Interpréter l'énoncé pour préciser la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins deux personnes parmi les six choisies soient porteuses du virus.
3. Donner l'espérance et l'écart type de X.

Exercice 7 Dans un certain magasin, le nombre X de téléphones mobiles vendus chaque jour suit une loi de Poisson de moyenne 4,2 unités. Donner l'espérance et l'écart type de X. Quelle est la probabilité que la vente d'une journée soit de 4 unités ? Quelle est la probabilité que l'on vende au moins un téléphone ?

Exercice 8 Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25mm. On suppose que 3% des disques de la production sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 60 disques dans la production. La production étant très importante, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux.

1. Quelles valeurs peut prendre Y ? Quelle est la loi suivie par Y ? Calculer $E(Y)$.
2. Calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux.
3. On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson. Donner les paramètres de cette loi (arrondir au millième).
4. En utilisant la loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième).

Exercice 9 On a observé que 2% des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation (ces pannes survenaient d'une façon indépendante). Une entreprise utilise 150 micros de ce type. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de pannes prévisibles pour ce parc de 150 machine.

1. Déterminer la loi de probabilité X et calculer la probabilité des événements suivants :
   - le nombre mensuel de pannes est 5 ;
   - le nombre mensuel de pannes est au plus égal à 3.
2. Expliquer pourquoi X peut être approché par une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson et déterminer son paramètre. En utilisant cette approximation calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. Déterminer le nombre minimum N tel que la probabilité de l'événement “le nombre de panne est au plus N” soit supérieur à $0,99$.

Exercice 10 Des sondages permettent de constater que 10% de la population est constituée de gauchers. On considère donc, dans cet exercice, que la probabilité qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à $0,1$ et celle qu'il soit droitier est égale à $0,9$.

1. On note G la variable aléatoire correspondant au nombre de gauchers dans un groupe de 8 personnes. Donner la loi de probabilité de G.
2. Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :
   a) un seul gaucher ;
   b) au moins un gaucher ;
   c) exactement trois gauchers.
3. Un atelier de couture est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité que chacun des huit membres du personnel trouve une paire de ciseaux lui convenant ?
4. Soit X la variable aléatoire : “nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à sa convenance”. Dressez un tableau donnant X en fonction du nombre G de gauchers dans les huits membres du personnel. Déduisez-en la loi de probabilité de X et calculez son espérance mathématique.

Exercice défi Les probabilités des différents totaux qu'on peut obtenir en lançant deux dés et sommant les résultats obtenus sur les deux faces étonnent les personnes non familière aux probabilités. En effet, par exemple, la probabilité d'obtenir un total de 2 est de $\frac{1}{36}$ alors que la probabilité d'obtenir un total de 4 est de $\frac{1}{12}$, c'est à dire trois fois plus grande !

Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce que la probabilité d'obtenir chacun des résultats $2, 3, \ldots, 12$, soit égal à $\frac{1}{11}$?

IUT Aix-en-Provence Année 2012-2013
DUT Informatique TD Probabilités **feuille n° 5**

Variables aléatoires discrètes (Méthodes)

☞ **Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?**

On suppose connus tous les événements élémentaires $\omega \in \Omega$ ainsi que leur probabilité $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$.

1. Déterminer $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$, on trouve un nombre fini ou dénombrable de valeurs.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$ déterminer $X^{-1} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.
3. Poser alors
$$p_x = \mathbf{P}(X^{-1}(x)) = \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$
4. La loi de probabilité de X est donné par les couples (x, p_x). On représente généralement les résultats sous la forme d'un tableau. On peut vérifier que l'on a bien $\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1$.

☞ **Comment déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?**

On suppose connue la loi de probabilité de X définie par les couples $(x_k, p_{x_k})_{k\in\mathbb{K}}$ $K \subset \mathbb{N}$. De plus on suppose que $x_{k'} < x_{k''}$ si $k' < k''$.

1. Pour tout $k \in K$, calculer :
$$F(x_k) = \mathbf{P}(X \leq x_k) = \mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_k) = p_{x_1} + \cdots + p_{x_k}.$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver x_k et x_{k+1} tel que $x_k \leq x < x_{k+1}$. On a alors $F(x) = F(x_k)$.

☞ **Comment calculer l'espérance, l'écart type d'une variable aléatoire ?**

On suppose connue la loi de probabilité de X définie par les couples $(x_k, p_{x_k})_{k\in\mathbb{K}}$ $K \subset \mathbb{N}$.
Pour l'espérance mathématique :

1. Utiliser la formule $E(X) = \sum_{k\in K} p_{x_k} x_k$.

Pour l'écart type :

2. Calculer $E(X^2) = \sum_{k\in K} p_{x_k} x_k^2$
3. Calculer la variance par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
4. Calculer enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

☞ **Comment vérifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale ?**

Une variable aléatoire X étant donnée,

1. Vérifier les assertions suivantes :
   (a) on a affaire à une épreuve de Bernoulli comportant deux issues complémentaires M et $\overline{M}$, avec $\mathbf{P}(M) = p$ et $\mathbf{P}(\overline{M}) = 1 - p$;
   (b) on réitère l'épreuve n fois les n réalisations sont indépendantes ;
   (c) X dénombre les réalisations de M.
2. Conclure : si X dénombre les réalisations de M, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
3. On a automatiquement $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

☞ **Quand utiliser une loi de Poisson pour approcher une loi binomiale ?**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geq 50$ et $p < 0,1$ on peut approcher la loi de probabilité de X par une variable aléatoire Y qui suit une de Poisson $\mathcal{P}(np)$ (X et Y doivent avoir la même espérance $E(X) = E(Y) = np$). On a alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) \approx \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}.$$