IUT Aix-en-Provence Année 2012-2013
DUT Informatique TD Probabilités **feuille n° 4**

Probabilités conditionnelles

Exercice 1 Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement $0,01$ et $0,008$. De plus la probabilité de l'événement "la machine M2 est en panne sachant que M1 est en panne" est égale à $0,4$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Exercice 2 À l'IUT de Digne, 40% de garçons et 15% des filles mesurent plus de $1,80$m. De plus, 60% des élèves sont des filles. Sachant qu'un élève, choisi au hasard, mesure plus de $1,80$m, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 3 Dans une université, une enquête sur le tabagisme a donné les résultats suivants :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	420	75
Non fumeurs	280	225

On choisit au hasard l'une des 1000 personnes interrogées. On note A l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré fumer" et on note B l'événement "en réponse à l'enquête, la personne a déclaré être du sexe féminin".

1. A et B sont-ils indépendants pour l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ définie sur l'ensemble des 1000 personnes interrogées ?
2. Même question pour la même enquête dans une autre université ou les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Fumeurs	440	360
Non fumeurs	110	90

Exercice 4 Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2. On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par A l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_1".
On désigne par B l'événement : "la lentille présente un défaut pour le traitement T_2".
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_1 est $\mathbf{P}(A) = 0,10$;
- la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_2 est $\mathbf{P}(B) = 0,20$;
- la probabilité qu'une lentille présente aucun des deux défauts est $0,75$.

1. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.
2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2.
3. Les événements T_1 et T_2 sont ils indépendants ?
4. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
5. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant qu'il présente un défaut pour le traitement T_1.

Exercice 5 Dans une population Ω, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20%. On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de M_1, sur 70% des malades M_2, et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu ω dans Ω, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour un individu ω, le test a réagi, donner les probabitités :
   – pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_1.
   – pour que le test ait réagi à cause de la maladie M_2.
   – pour que le test ait réagi alors que l'individu n'est infecté par qu'aucune des deux maladies M_1 et M_2.

Exercice 6 Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :
– lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif ;
– lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif.
Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootesr est positif ?

Exercice 7 A l'IUT, parmi les étudiants 40% suivent l'option A_1, 30% suivent l'option A_2 et 30% suivent l'option A_3. Chaque étudiant suive une seule option. La proportion d'étudiants qui n'ont pas la moyenne dans l'option A_1 est de 10%, dans l'option A_2 de 5% et dans l'option A_3 de 5%. On choisit un étudiant au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas la moyenne.
2. Sachant qu'il n'a pas la moyenne, calculer la probabilité a posteriori qu'il ait suivi l'option A_1, A_2 ou A_3.

Exercice 8 On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice défi Monty Hall propose le jeux télévisé suivant : un candidat doit choisir entre trois portes de garages fermées. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les autres portes se trouvent une chèvre. Lorsque le candidat a choisi une porte, Monty ouvre une des deux portes restantes pour faire apparaitre une chèvre (ce qui est possible). Il propose ensuite au candidat de rester devant la porte qu'il a choisi, ou bien de changer.

A votre avis, le candidat doit-il rester ? changer ? cela n'a aucune importance ?
(Justifier votre réponse)

Pour vos révisions, vous pouvez vous aider du cours en ligne suivant :
`http://www.agro-montpellier.fr/cnam-lr/statnet/cours.htm`

Probabilités conditionnelles (Solutions)

Correction 1 1. $\mathbf{P}(M1 \cap M2) = \mathbf{P}(M1)\mathbf{P}(M2/M1) = 0,01 \times 0,4 = 0,004$.

2. $\mathbf{P}(\overline{M1} \cup \overline{M2}) = 1 - \mathbf{P}(M1 \cap M2) = 0,996$

Correction 2 T : “événement mesuré plus de $1,80$m”
F : “événement être une fille”
On a $\mathbf{P}(F) = 0,6$, $\mathbf{P}(T/\overline{F}) = 0,4$ et $\mathbf{P}(T/F) = 0,15$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F/T) &= \frac{\mathbf{P}(F \cap T)}{\mathbf{P}(T \cap F) + \mathbf{P}(T \cap \overline{F})} \\ &= \frac{\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(T/F)}{\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(T/F) + \mathbf{P}(\overline{F}) \times \mathbf{P}(T/\overline{F})} = 0,36.\end{aligned}$$

Correction 3 1. $\mathbf{P}(A) = 0,495$, $\mathbf{P}(B) = 0,3$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,075$. Comme $0,495 \times 0,3 = 0,1485 \neq 0,075$, les événements ne sont pas indépendants.

2. $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(B) = 0,45$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,36$. Comme $0,8 \times 0,45 = 0,36$, les événements sont indépendants.

Correction 4 1. $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$

2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$
3. Non car $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
4. L'événement ”la lentille présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2” est représenté par :

$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

Ainsi $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = \cdots = 0,2$
5. $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

Correction 5 On note :
– M_1 =”être atteint par M_1”,
– M_2 =”être atteint par M_2”,
– N =”être atteint par aucune maladie”
– R =”le test réagit”.
Le texte dit : $\mathbf{P}(M_1) = 0,1$, $\mathbf{P}(M_2) = 0,2$, $\mathbf{P}(N) = 0,7$, $\mathbf{P}(R|M_1) = 0,9$, $\mathbf{P}(R|M_2) = 0,7$ et $\mathbf{P}(R|N) = 0,1$,

1. $\mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(M_1 \cap R) + \mathbf{P}(M_2 \cap R) + \mathbf{P}(N \cap R) = \mathbf{P}(M_1) \times \mathbf{P}(R|M_1) + \mathbf{P}(M_2) \times \mathbf{P}(R|M_2) + \mathbf{P}(N) \times \mathbf{P}(R|N) = 0,3$.
2. – $\mathbf{P}(M_1|R) = \frac{\mathbf{P}(M_1 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = 0,3$
   – $\mathbf{P}(M_2|R) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{15} \approx 0,47$
   – $\mathbf{P}(N|R) = \frac{\mathbf{P}(N \cap R)}{\mathbf{P}(R)} = \frac{7}{30} \approx 0,23$

Correction 6 Soient E = ” la personne contrôlée est en état d'ébriété ” et A = ”l'alcootest est positif”. Les indications fournies peuvent s'écrire : $\mathbf{P}(E) = 0,02$, $\mathbf{P}(A|E) = 0,95$ et $\mathbf{P}(\overline{A}|\overline{E}) = 0,96$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E|A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap E)}{\mathbf{P}((A \cap E) \cup (A \cap \overline{E}))} \\ &= \frac{\mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(A|E)}{\mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(A|E) + \mathbf{P}(\overline{E}) \times \mathbf{P}(A|\overline{E})} \approx 0,326\end{aligned}$$

Correction 7 Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note B_i = "suivre l'option A_i". On note C l'événement ne pas avoir la moyenne. On a

$$\mathbf{P}(A_1) = 0,4 \ \mathbf{P}(A_2) = 0,3 \ \mathbf{P}(A_3) = 0,3 \ \mathbf{P}(C|A_1) = 0,1 \ \mathbf{P}(C|A_2) = 0,5 \ \mathbf{P}(C|A_3) = 0,5.$$

1. $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C|A_1) \times \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(C|A_2) \times \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(C|A_3) \times \mathbf{P}(A_3)$.
2. $\mathbf{P}(A_i|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(C)}$

Correction 8 On note :
– $A =$"le tableau est authentique",
– $B =$ "le premier expert déclare le tableau authentique, le deuxième le déclare faux" $= E_1 \cap \overline{E_2}$,
– $E_1 =$"le premier expert a raison",
– $E_2 =$"le deuxième expert a raison".
On a $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0,2$, $\mathbf{P}(E_1) = 0,4$, $\mathbf{P}(E_2) = \frac{9}{11}$. On a $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(\overline{E_1}|A)\mathbf{P}(E_2|A)$ et $\mathbf{P}(B|\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{E_2}|A)\mathbf{P}(E_1|A)$.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B|\overline{A})} \approx 0,84$$

Probabilités conditionnelles (Méthodes)

☞ **Comment calculer des probabilités conditionnelles ?**

Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. On cherche à calculer $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A/B)$.

- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non.
- Utiliser la définition : $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.
- Si on connaît $\mathbf{P}(B/A)$ et $\mathbf{P}(B/\overline{A})$ alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A/B) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)}{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)+\mathbf{P}(\overline{A})\times\mathbf{P}(B/\overline{A})}\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Bayes !

☞ **Comment vérifier que deux événements sont indépendants pour une probabilité ?**

Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

1. Déterminer l'événement représenté par $A\cap B$ et calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

Les deux événements sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

☞ **Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux événements ?**

Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. On cherche à calculer $\mathbf{P}(A\cap B)$.

- On sait que A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$. Utiliser la formule :

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B).$$

- On ignore si A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}$, alors :
  - si $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B/A)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A).$$

  - si $\mathbf{P}(B)\neq 0$ et $\mathbf{P}(A/B)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(B)\times\mathbf{P}(A/B).$$

  - si $\mathbf{P}(A\cup B)$ est connue, utiliser la formule :

  $$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cup B).$$

  - si $\mathbf{P}(\overline{A\cap B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B})$ ou $\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$ sont connues, exprimer $A\cap B$ en fonction de $\overline{A\cap B}$ ou $\overline{A}\cup\overline{B}$ ou $\overline{A}\cap\overline{B}$ et utiliser les formules de probabilité classique. Par exemple on obtient les expressions suivantes :

  $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A\cap B})\\ \mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A}\cup\overline{B})\\ \mathbf{P}(A\cap B) &= 1-\mathbf{P}(\overline{A})-\mathbf{P}(\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B})\end{aligned}$$

  - sinon, essayer de trouver un événement E de probabilité connue, incompatible avec $A\cap B$, tel que $(A\cap B)\cup E$ forme un événement de probabilité connue, et utiliser la formule $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}((A\cap B)\cup E)-\mathbf{P}(E)$.