Premières notions en probabilités

Exercice 1 Un sac contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard deux jetons l'un après l'autre et on note les numéros sortis sous la forme (a, b) où a est le premier tirage et b le second.

1. Écrire toutes les issues possibles.
2. (a) "La somme $a + b$ est égale à 3" est-il un événement élémentaire ?
   (b) "La somme $a + b$ est égale à 8" est-il un événement élémentaire ?
3. Écrire la liste des issues de chacun des événements suivants :

$A : \; a \leq b$	$B : \; b = a + 1$	$C : \; a + b$ est impair
$D : \; b = 3$	$E : \; \lvert a - b \rvert = 1$	$F : \; ab < 9$

4. Écrire la liste des issus de chacun des événements suivants :

$$\overline{A}, \quad \overline{C}, \quad E \cap \overline{B}, \quad A \cap D, \quad \overline{A} \cup B, \quad F \cup D, \quad F \cap D.$$

5. Répondre par vrai ou faux en justifiant à chacune des affirmations suivantes :

$$B = A \cap C; \quad A \cup E = B; \quad F \cap D = A \cap D; \quad F \cap B \subset C.$$

Exercice 2 Une entreprise possède deux machines A et B. On note A_n (respectivement B_n) l'événement "la machine A (respectivement B) tombera en panne n fois aujourd'hui". Avec ces notations, écrire les évènements suivants :

1. La machine A ne tombera pas en panne aujourd'hui.
2. Aujourd'hui la machine A tombera en panne 2 fois et la machine B une fois.
3. La machine A tombera en panne moins de trois fois aujourd'hui.
4. La machine A tombera en panne plus de trois fois aujourd'hui.

Exercice 3 Soient A et B, deux événements, trouver une expression simple pour les évènements suivants :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

Exercice 4 Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. Montrer les relations suivantes :

1. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
2. $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
3. $\mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$

Exercice 5 Soit une probabilité $\mathbf{P}$ sur un univers Ω et deux évenements A et B.

1. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,03$, $\mathbf{P}(B) = 0,07$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,1$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$.
2. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,3$ et $\mathbf{P}(B) = 0.6$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,8$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap \overline{B})$
3. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,35$, $\mathbf{P}(B) = 0,75$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,84$. Calculer $\mathbf{P}(A \cup \overline{B})$.

Exercice 6 Dans une population, les groupes sanguins sont répartis en quatre groupes : A, B, AB et O ; d'autres part, ils sont répartis suivant le rhésus (+ ou −). Nous avons consigné ces répartitions en % dans le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	32.8	8.1	4.15	36
Rhésus −	7.2	1.9	0.85	9

Un individu est pris au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité :

1. qu'il soit du groupe A ?
2. qu'il ait un rhésus + ?
3. qu'il soit du groupe A ou qu'il ait un rhésus + ?

Exercice 7 Un dé dont les six faces portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 est truqué de sorte que la probabilité qu'une face apparaisse est donnée par le tableau suivant. On lance ce dé une fois. Voici la distribution de probabilité :

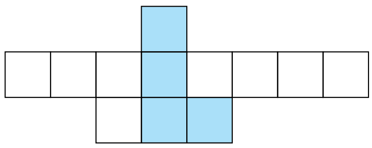
Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,25	0,3	0,05	?

Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "Le numéro qui apparait est le 6" ;
B : "Le numéro qui apparait est pair" ;
C : "Le numéro qui apparait est différent de 3".

Exercice 8 Soit $\Omega = \{1, \dots, 9\}$.

1. Déterminer la loi $\mathbf{P}$ de probabilité sur Ω telle que la probabilité de l'événement élémentaire $\{i\}$ soit proportionnelle à i pour tout $i \in \Omega$.
2. Calculer la probabilité des événements "pair" et "premier".

Exercice 9 Trois personnes, Anne, Bernard et Clotilde choisissent une case au hasard dans la figure suivante :



On s'intéresse à l'évènement V : "la case choisie est colorée". Anne affirme "$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{3}$", Bernard répond "mais non, $\mathbf{P}(V) < \frac{1}{4}$", enfin Clotilde prétend : "$\mathbf{P}(V) > \frac{1}{2}$". Envisager les trois protocoles suivants du choix de case :

- *Protocole A :* choix d'une case parmi douze ;
- *Protocole B :* choix d'une colonne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette colonne ;
- *Protocole C :* choix d'une ligne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette ligne.

Dans chaque cas, calculer $\mathbf{P}(V)$. Quelle est la morale de cette histoire ?

Pour vos révisions, vous pouvez vous aider du cours en ligne suivant :

`http://www.agro-montpellier.fr/cnam-lr/statnet/cours.htm`

Premières notions en probabilités (Solutions)

Correction 2 1. A_0

2. $A_2 \cap B_1$
3. $A_0 \cup A_1 \cup A_2$
4. $\overline{A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

Correction 3 1. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B$
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$

Correction 8 1. $\mathbf{P}(\{i\}) = k \times i$ pour tout $i \in \Omega$ et $\sum_{i=1}^{9} \mathbf{P}(\{i\}) = 1 = k \sum_{i=1}^{9} i = 45 \times k$. D'ou $k = \frac{1}{45}$ et $\mathbf{P}(\{i\}) = \frac{i}{45}$

2. $\mathbf{P}(\text{“pair”}) = \frac{2+4+6+8}{45} = \frac{20}{45}$, $\mathbf{P}(\text{“impair”}) = 1 - \mathbf{P}(\text{“pair”}) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ et $\mathbf{P}(\text{“premier”}) = \frac{2+3+5+7}{45} = \frac{17}{45}$.

Correction 9 - *Protocole A :* On choisit une case parmi 12, 4 issues sur 12 sont favorables, donc $\mathbf{P}(V) = 12$.

- *Protocole B :* On choisit une colonne au hasard, puis une case au hasard dans cette colonne :

$$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 = \frac{3}{16} < \frac{1}{4}.$$

- *Protocole C :* On choisit une ligne au hasard, puis une case au hasard dans cette ligne :

$$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{43}{72} \geq \frac{1}{2}.$$

Le choix d'une case “au hasard” n'est pas assez précis pour conduire de façon sûre à un calcul de probabilités. Chacun des protocoles proposés permet le choix d'une case au hasard.

Premières notions en probabilités (Méthodes)

☞ Comment calculer des probabilités grâce au calcul ensembliste ?

Dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités de certains événements et on cherche à calculer celles d'événements pouvant s'exprimer en fonction des premiers (dans le langage ensembliste).
On cherche à calculer la probabilité d'un événement E :

1. Rechercher et exprimer les probabilités des événements présents dans l'énoncé du problème.
2. Exprimer E en fonction des événements de probabilités connues.
3. Exprimer E en langage ensembliste. Cette traduction se fait en remplaçant les "et" par des "$\cap$", les "ou" par des "$\cup$" et les négations par des complémentaires.
4. Simplifier ou transformer l'expression obtenue grâce au calcul ensembliste de façon à pouvoir appliquer les formules du calcul des probabilités.

☞ Rappels sur les relations ensemblistes :

Quelques propriétés sur les opérations sur les ensembles qui doivent facilement être retrouvées :

$$
\begin{array}{r|l}
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \emptyset = A \\
A \cap \Omega = A & A \cup \Omega = \Omega \\
A \cap A = A & A \cup A = A \\
A \cap B = B \cap A & A \cup B = B \cup A \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap \overline{A} = \emptyset & A \cup \overline{A} = \Omega \\
\text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cap B = B & \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cup B = A
\end{array}
$$

☞ Quelle sont les formules à retenir pour le calcul des probabilités ?

Soient un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. On a les formules suivantes :

Parties de Ω	Vocabulaire des évènements	Propriétés sur les probabilités
A	A quelconque	$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$
$\emptyset, \Omega$	événement *impossible*, *certain*	$\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B *incompatibles*	$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement *contraire* de A	$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
A, B	A et B quelconques	$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	Univers fini	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$
$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$	Univers discret	$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$