Coloriage et planarité

Exercice 1 (Animosité) On considère un groupe d'élèves de 7 élèves appelés A, B, C, D, E, F et G. Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves. Dans le tableau ci-dessous, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants. Combien d'équipes faudra-t-il créer au minimum ?

	A	B	C	D	E	F	G
A		X			X	X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		

Exercice 2 (Radio pirate) On désire implanter 7 stations radio dans 7 endroits dont les distances mutuelles en km sont données dans le tableau ci-dessous. En sachant que deux stations interférent si elles se trouvent à moins de 100 km l'une de l'autre, quel est alors le nombre minimum de longueurs d'onde qu'il faut prévoir pour éviter toute interférence ?

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	55	110	108	60	50	88
B		0	87	142	133	98	139
C			0	77	111	85	193
D				0	75	114	82
E					0	107	41
F						0	63

Exercice 3 Trois maisons doivent être reliées à 3 usines qui leur fournissent l'eau, le gaz et l'électricité ; on demande de tracer le plan du réseau de telle manière que les tuyaux ne se croisent pas.

Exercice 4 (Graphe planaire)

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple planaire avec au moins 2 arêtes. Montrer que $|A| \leq 3|S| - 6$.
2. Montrer que K_5 ne peut pas être un sous graphe de G.
3. Prouver que si G est un graphe simple et planaire, ayant un nombre fini de sommets, alors G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5.
4. Montrer par récurrence sur le nombre de sommets que pour un graphe simple planaire G on a $\chi(G) \leq 6$.
5. En analysant plus finement le passage de la récurrence, montrer que l'on peut avoir $\chi(G) \leq 5$.

Exercice 5 Soit $n > 1$ un entier. On considère le graphe simple G_n dont les sommets sont les entiers de 1 à n, les sommets a et b étant reliés par une arête si et seulement si $a + b$ est un nombre premier.

1. Déterminer le nombre chromatique de G_n.
2. Déterminer les entiers n pour lesquels G_n est planaire.

Exercice 6 (Graphes d'intervalles) Dans le problème suivant les questions sont assez indépendantes. Vous pouvez donc sauter certaines questions si vous êtes bloqué.
À une famille d'intervalles fermés $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ on associe un *graphe d'intervalle* $G = (S, A)$ dont les sommets S sont les intervalles et les arêtes A sont les paires (I_i, I_j) telles que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

1. Afin d'organiser les oraux d'un concours, on doit affecter à chaque épreuve des salles différentes. Voilà la répartition des horaires des différents oraux sur une journée :

Math	Info	Français	Anglais	Sport	Physique
$8h \ldots 11h00$	$9h \ldots 14h$	$9h30 \ldots 12h$	$11h30 \ldots 16h$	$16h15 \ldots 18h15$	$13h30 \ldots 16h30$

   Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe d'intervalles et donner le nombre de salles minimal nécessaire.

2. On note $\prec$ l'ordre sur les intervalles défini par $I \prec J$ si $\inf I \leq \inf J$. On utilise aussi la notation $Adj(I)$ correspondant à l'ensemble des sommets adjacent à I. Considérons l'algorithme de coloriage suivant :

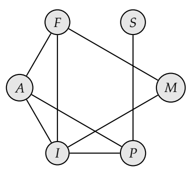
Algorithm 1: Coloriage d'un graphe d'intervalle

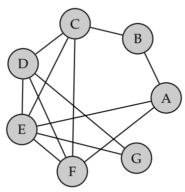
Data: Une famille S d'intervalles $I_1, \ldots, I_n$.
Result: Une fonction de coloriage $c : S \to \mathbb{N}$

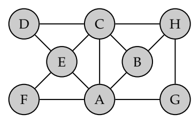
for $I \in S$ **do**
  $c(I) \leftarrow +\infty$;
while *il existe* $I \in S$ *tel que* $c(I) = +\infty$ **do**
  choisir $I \in S$ minimal pour $\prec$ tel que $c(I) = +\infty$;
  $c(I) \leftarrow \min\{n \geq 1 \text{ tel que } n \neq c(J) \text{ pour tout } J \in Adj(I)\}$;

   (a) Montrer que cet algorithme termine.
   (b) Montrer que cet algorithme donne un coloriage.
   (c) Montrer que si l'algorithme donne la couleur k a un sommet, alors ce sommet est dans une clique de taille au moins égal à k. On rappelle qu'une *clique* est un ensemble de sommets tous reliés deux à deux par des arêtes du graphe.
   (d) Montrer que le coloriage obtenu est optimal, c'est à dire donne le nombre chromatique du graphe d'intervalles associé.
   (e) Quel est la complexité de cet algorithme, c'est à dire le nombre d'étapes intermédiaire nécessaire pour traiter un graphe à $|S|$ sommets et $|A|$ arêtes.

3. Un graphe est *triangulé* si tout cycle de longueur supérieur ou égal à 4 admet une corde, c'est à dire une arête reliant deux sommets non consécutifs.
   (a) Est ce que les graphes suivant sont triangulés ?

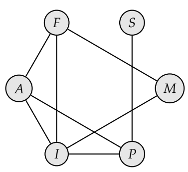


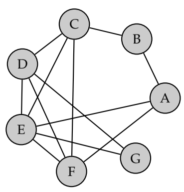


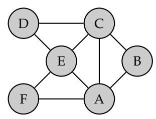


   (b) Montrer que tout graphe d'intervalles est triangulé.

4. Étant donné un graphe simple $G = (S, A)$, le *complémentaire* d'un graphe est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où l'arête $\{s_1, s_2\} \in \overline{A}$ si et seulement si $\{s_1, s_2\} \notin A$. Un graphe $G = (S, A)$ est un graphe de *comparaison* s'il est possible d'orienter les arêtes de telle sorte que s'il existe un arc de s_1 vers s_2 et un autre de s_2 vers s_3 alors il existe un arc de s_1 vers s_3.
   (a) Est ce que le complémentaire des graphes suivant sont des graphes de comparaison ?







   (b) Montrer que pour tout graphe d'intervalles G, le complémentaire $\overline{G}$ est un graphe de comparaison.

5. Par un beau matin de novembre, le duc de Densmore est trouvé mort suite à l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Les enquêteurs constatent que le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château. Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île. Lorsqu'elles sont interrogées, elles ne peuvent se souvenir des dates précises auxquelles chacune est venue au château, mais elles se rappellent quelles autres femmes elles ont croisées au château pendant leur séjour, et chacune jure que si quiconque d'autre avait été là en même temps qu'elle, elle s'en serait aperçue, à moins qu'une personne ne se soit volontairement cachée dans le labyrinthe. Le marin qui faisait la navette vers l'île a lui aussi oublié les dates, mais il atteste n'avoir transporté chacune que pour un seul aller retour. Les enquêteurs établissent le rapport suivant :
   — Ann dit avoir vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia.
   — Betty dit avoir vu Ann, Cynthia et Helen.
   — Cynthia dit avoir vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen.
   — Diana dit avoir vu Cynthia et Emily.
   — Emily dit avoir vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia.
   — Felicia dit avoir vu Ann et Emily.
   — Georgia dit avoir vu Ann et Helen.
   — Helen dit avoir vu Betty, Cynthia et Georgia.

   Qui est le principal suspect ? (Indication : On suppose que l'assassin a agit seul et se soit caché sur l'île. Lorsqu'on retire un suspect du graphe des rencontres, si le graphe obtenu reste un graphe qui n'est pas un graphe d'intervalles, alors c'est que ce suspect est innocent.)
6. Montrer qu'un graphe G est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe une énumération $C_1, \ldots, C_n$ des cliques de G, telles que pour tout sommet v, les indices k tels que $v \in C_k$ sont consécutifs.
7. Montrer que si G est un graphe triangulé et $\overline{G}$ est un graphe de comparaison alors G est un graphe d'intervalles.

Exercice 7

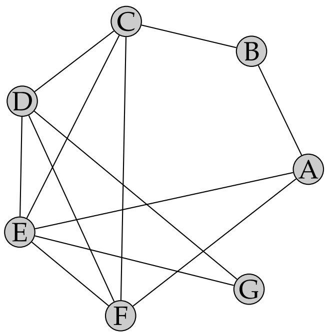
1. Prouver que dans toute soirée de 6 personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux.
2. Dans une soirée à laquelle participent 17 personnes, certaines sont amies, d'autres sont ennemies et certaines ne se connaissent pas. Prouver qu'il existe un groupe de trois personnes qui ont deux à deux les mêmes sentiments les unes envers les autres.
3. Dans un groupe de 18 personnes, deux quelconques sont toujours amies ou ennemies. Prouver qu'il existe quatre de ces personnes qui ont toutes les mêmes sentiments les unes envers les autres.

Exercice 8 (Théorème de König) Soit G un graphe de n sommets. Prouver que G admet une bicoloration si et seulement s'il ne possède pas de cycle de longueur impaire.

Exercice 9 Dans un pays, 11 villes sont reliées deux à deux directement soit par une autoroute soit par une ligne de chemin de fer (qui fonctionnent dans les deux sens). Prouver qu'il existe forcément un pont sur lequel soit une autoroute passe au-dessus d'une autre, soit une voie de chemin de fer passe au-dessus d'une autre.

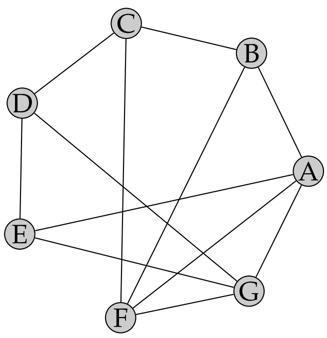
Coloriage et planarité (Solutions)

Correction 1 On trace le graphe G où les sommets correspondent aux individus et il y a une arête entre deux sommets si il y'a incompatibilité. Une répartition des élèves correspond à un coloriage du graphe G. Le problème se ramène à trouver le nombre chromatique du graphe suivant.



L'algorithme Welsh-Powell fournit un 4 coloriage ainsi $\chi(G) \leq 4$ (faire tourner l'algol). Le graphe induit par les sommets $\{E, F, C, D\}$ est complet, il est donc nécessaire d'avoir 4 couleur pour colorier le graphe G d'ou $\chi(G) \geq 4$. Ainsi $\chi(G) = 4$.

Correction 2 On trace le graphe G où les sommets correspondent aux stations et il y a une arête entre deux sommets si les deux station sont à une distance inférieure à 100km. Une répartition des élèves correspond à un coloriage du graphe G. Le problème se ramène à trouver le nombre chromatique du graphe suivant.



L'algorithme Welsh-Powell fournit un 4 coloriage ainsi $\chi(G) \leq 4$ (faire tourner l'algol).
Supposons qu'il existe un 3-coloriage $c : S \to \mathbb{N}$. Si on considère les triangles EDG et AEG, on en déduit que D et A sont de la même couleur. Ainsi lorsqu'on regarde le sous-graphe ABCF, les sommets A et C doivent être de couleurs différentes. Il faut donc une quatrième couleur pour pouvoir le colorier ce qui amène une contradiction. Ainsi $\chi(G) \geq 4$ et donc $\chi(G) = 4$.

Correction 3

Correction 4

1. Notons que d'après la formule d'Euler, que G soit connexe ou non, on a $s + f \geq a + 2$. Puisque G est simple, chacune de ses faces utilise au moins 3 arêtes. Réciproquement, chaque arête intervient sur deux faces. Ainsi, on a $3f \leq 2a$. En, reportant dans la relation d'Euler, il vient $2 + a \leq s + f \leq s + \frac{2}{3}a$. Et ainsi : $a \leq 3s - 6$.
2. Le graphe K_5 est un graphe connexe à $s = 5$ sommets et $a = 10$ arêtes. Comme $10 > 3 \times 5 - 6$, il ne vérifie pas l'inégalité précédente et ne peut donc pas être planaire.
3. Il suffit de travailler sur une composante connexe. On note $s_1, \ldots, s_n$ les sommets de G. Soit a le nombre d'arêtes de G. Par l'absurde : Supposons que, pour tout i, on ait $d(s_i) \geq 6$. Alors $2a = \sum_i d(s_i) \geq 6n$ et donc $3n \leq a$. Puisque G est planaire, on sait que $a \leq 3n - 6$. Cela conduit à $a \leq a - 6$, ce qui est clairement absurde. La conclusion en découle.

4. On prouve le résultat par récurrence sur le nombre n de sommets. Pour $n = 1$, la conclusion est évidente (comme pour $n = 6$ d'ailleurs).

   Soit $n \geq 1$ fixé. On suppose que la conclusion est établie pour tout graphe simple planaire n'ayant pas plus de n sommets. Soit alors un graphe simple planaire G de $n + 1$ sommets. G possède un sommet de degré au plus égal à 5. Soit s un tel sommet, et G' le graphe induit en supprimant s et les arêtes correspondantes. D'après l'hypothèse de récurrence, chaque composante connexe de G' est 6-colorable (bien sûr, on utilise les mêmes couleurs pour chaque composante). Comme s n'est pas adjacent à plus de 5 sommets, quelles que soient les colorations choisies sur chaque composante, il restera toujours au moins une couleur disponible pour être attribuée à s, et construire ainsi une 6-coloration de G.

5. Soit G un graphe planaire simple à n sommets. On va montrer par récurrence sur le nombre de sommets que $\chi(G) \leq 5$

   On a clairement $\chi(G) \leq 5$ pour $n \leq 5$.

   On suppose le propriété vrai pour tout graphe avec au plus n sommet et montrons que la propriété est vrai pour un graphe planaire simple G à $n + 1$ sommets. On sait que G admet un sommet s de degré au plus 5. Si on supprime se sommet, on obtient un graphe G' planaire simple à n sommets qui est donc 5-coloriable par hypothèse de récurrence. On note s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 les sommets reliés à s.

   Si c'est sommets sont coloriés seulement avec 4 couleur, il suffit de colorier s avec la couleur restante pour obtenir un 5-coloriage $c : S \setminus \{s\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

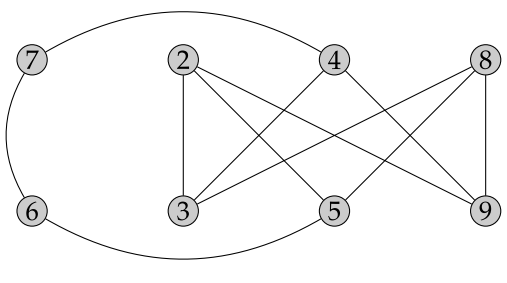
   Supposons que s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 sont répartis circulairement autour de s avec des couleurs c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 distinctes. Considérons le sous graphe induit G_2 de G' dont les sommets sont coloriés par les couleurs c_1 et c_3. Deux cas sont possibles :

   — s_1 et s_3 font partis de deux composantes connexe dans G_2. Dans la composante connexe de s_3, on peut inverser les couleurs c_1 et c_3, on obtient encore un coloriage de G' dans lequel s_1 et s_3 sont coloriés avec la couleur c_1. Il suffit donc de colorier s en c_3 pour obtenir un 5-coloriage de G.

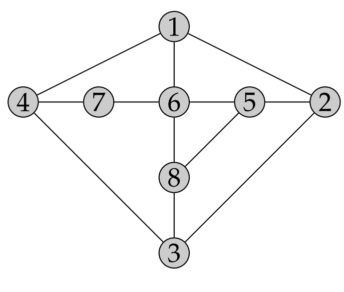
   — s_1 et s_3 font partis de deux composantes connexe dans G_2. Dans G', on a donc un chemin allant de s_1 à s_3 dont les sommets sont coloriés alternativement avec les couleurs c_1 et c_3. Si on supprime ce chemin dans G', par planarité s_2 et s_4 sont dans deux composantes connexes distinctes. Dans la composante correspondant au sommet s_4, on peut inverser les couleurs c_2 et c_4, on obtient un coloriage valide de G' où s_2 et s_4 sont coloriés en c_4. On eut donc colorier s en c_2 pour obtenir un 5-coloriage de G.

Correction 5 1. Il est évident qu'une coloration propre de G_n nécessite au moins deux couleurs. Il suffit ensuite de constater que si a et b sont de même parité et distincts, alors $a + b$ est pair et plus grand que 2 donc ils ne sont pas adjacents. Par conséquent, on peut construire une 2-coloration de G_n en coloriant tous les nombres pairs en bleu et tous les impairs en rouge. On a donc $\chi(G_n) = 2$.

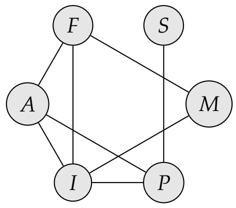
2. Considérons le graphe induit par l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on obtient une subdivision de $K_{3,3}$ qui n'est pas planaire. On en déduit que G_n n'est pas planaire pour $n \geq 9$.



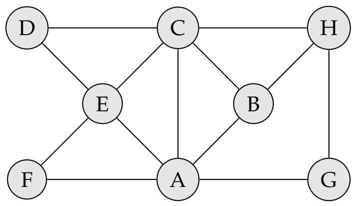
   Par contre G_n est planaire pour $n \leq 8$:



Correction 6 1. Il faut 3 couleurs pour colorier le graphe suivant :



2. (a) A chaque fois que l'on passe dans la boucle while, on colorie un sommet donc il arrive un moment où tous les sommets sont coloriés.
   (b) L'algorithme donne bien une coloration du graphe car chaque fois que l'on colorie un sommet on utilise une couleur différentes des sommets voisins déjà coloriés.
   (c) Si l'algorithme donne la couleur k à un sommet, cela signifie qu'elle a donner les couleurs $\{1, \ldots, k-1\}$ aux intervalles plus petit pour $\prec$. Ces k intervalles ont donc un point en commun et tome une clique.
   (d) D'après la question précédente, si on a colorié le graphe d'intervalles avec k couleurs alors il y a une clique de taille k, on a donc $k \geq \chi(G) \geq k$.
   (e) Tel qu'il est écrit l'algorithme est en $O(n^2)$, en triant préalablement les intervalles on peut faire du $O(n \log(n))$.
   (*Indication: L'algorithme et la question sur la complexité est volontairement un peu vague pour discuter brièvement sur la façon de coder le graphe d'intervalle. La bonne façon est de donner les extrémité des intervalles. Pour le calcul de la complexité on compte donc le nombre de comparaisons.*)
3. Si un cycle $x_1, \ldots, x_k$ d'un graphe d'intervalles n'admet pas de corde, alors les sommets représentent des intervalles $(I_i)_{i \in [1,k]}$ tels que I_i et I_{i-2} ne s'intersectent pas. Les extrémités sont donc totalement ordonnées et donc I_1 ne peut pas intersecter I_k ce qui contredit le cycle.
4. Soit u et v deux sommets adjacents de $\overline{G}$, on dit que $v \to u$ si $\max I_u < \min I_v$. On vérifie que l'on obtient un graphe sans circuit.
5. (*Indication: On suppose que l'assassin a agit seul et se soit caché sur l'île. Lorsqu'on retire un suspect du graphe des rencontres, si le graphe obtenu reste un graphe qui n'est pas un graphe d'intervalles, alors c'est que ce suspect est innocent*)



   Ce graphe n'est pas triangulé car les cycles (A, B, H, G) et (A, C, H, G) sont sans cordes. D'autre part le sous graphe induit (A, B, C, D, E, F) bien qu'étant triangulé n'est pas un graphe d'intervalle. La personne commune au 3 cycles posant problème est A.
6. $\Longrightarrow$ On classe les intervalles $I_1 \prec \cdots \prec I_n$ avec l'ordre $\prec$ et $C_i = Adj(I_i)$.
   $\Longleftarrow$ Pour un sommet $v \in V$, on définit l'intervalle $I_v = [a_v, b_v]$ où $a_v = \min\{k : v \in C_k\}$ et $b_v = \max\{k : v \in C_k\}$.
7. Supposons que $\overline{G}$ soit un graphe de comparaison à l'aide de la relation $\mathcal{R}$ et considérons une orientation transitive. Supposons que G soit triangulé.
   (*Indication: Considérer X l'ensemble des cliques de G et trouver une numérotation compatible avec $\mathcal{R}$.*)
   Soit X l'ensemble des cliques maximales de G. On les numérote de 1 à $|X|$ de telle sorte que $i < j$ s'il existe deux sommets non adjacent u, v vérifiant $u\mathcal{R}v$, $u \in K_i$ et $v \in K_j$. Cette numérotation est définie sans équivoque :
   — s'il existe v et v' dans K_j non adjacents à u alors on ne peut pas avoir $u\mathcal{R}v$ et $v'\mathcal{R}u$ car sinon on devrait avoir $v'\mathcal{R}v$ ce qui n'est pas possible car v et v' font partie de K_j et ne sont donc pas reliés dans $\overline{G}$.
   — si on a $u\mathcal{R}v$ et $v'\mathcal{R}u$ dans $\overline{G}$ pour $u, u' \in K_i$ et $v, v' \in K_j$, pour ne pas tomber dans le cas ci-dessus, (u, v') et (u', v) sont des arêtes dans G ce qui implique que G contient un cycle (u, v', u', v, u) sans corde.

(*Indication: Utiliser la numérotation des cliques définit précédemment pour associé un intervalle à chaque sommet suivant l'appartenance de ce dernier aux cliques.*)

Pour tout sommet x de G on définit E_x le plus petit intervalle contenant les indices i tels que $x \in K_i$.

— Si on a une arête (x, y) dans G alors il existe une clique K_i contenant x et y et on a donc $i \in E_x \cap E_y$.

— Si $E_x \cap E_y \neq \emptyset$ alors considérons $i \in E_x \cap E_y$ et soit $E_x = [a_x, b_x]$ et $E_y = [a_y, b_y]$. Montrons que $x \in K_i$. C'est évident si $i = a_x$ ou b_x. Si $a_x < i < b_x$ et $x \notin K_i$ alors il existe $z \in K_i$ tel que x et z sont non adjacents : mais alors $a_x < i$, $x \in K_{a_x}$ et $z \in K_i$ impliquent $x\mathcal{R}z$ dans G alors que $i < b_x$, $x \in K_{b_x}$ et $z \in K_i$ impliquent $z\mathcal{R}x$ dans G, contradiction. On montre de même que $y \in K_i$ et on déduit donc qu'il existe une arête entre x et y.

Le graphe G est donc bien le graphe d'intersection des intervalles (E_x).

Correction 7 Puisqu'il y a trois types de relations, on peut choisir de représenter la situation par un graphe non orienté (on suppose qu'une relation quelconque est symétrique) de n sommets, un par personne, et de relier ces sommets par une arête bleue, rouge ou verte selon que les deux personnes en question sont amies, ennemies ou indiférentes.

1. Le problème revient à chercher un triangle monochromatique lorsqu'on colorie les arêtes de K_6 de deux couleurs différentes (bleu et rouge). Soit s_1 un sommet du graphe, parmi les 5 arêtes d'extrémités, le principe des tiroirs assure qu'au moins trois sont d'une même couleur, disons bleue et que les personnes soient s_2, s_3, s_4. Alors, soit l'une des trois arêtes reliant s_2, s_3, s_4 est bleue et, avec s_1, on forme ainsi un triangle bleu. Soit, ces trois arêtes sont rouges, et forment alors un triangle rouge.
2. Ici, le problème revient à chercher un triangle monochromatique lorsqu'on colorie les arêtes de K_{17} de trois couleurs différentes (bleu, rouge et vert). Etant donné un sommet s, d'après le principe des tiroirs il existe 6 sommet tels que les arêtes qui les relie à s soit de la même couleur disons bleu. Si une des arêtes reliant ces 6 sommets est bleue, on a trouvé un triangle monochromatique. Sinon on a K_6 comme sous graphe dont les arêtes sont coloriés avec seulement deux couleurs. D'après la question précédente, on a un triangle monochromatique.
3. Le problème revient à chercher un sous graphe isomorphe à K_4 monochromatique lorsqu'on colorie les arêtes de K_{18} de deux couleurs différentes (bleu et rouge).

Correction 8 Si un graphe est 2-coloriable, lorsqu'on parcoure un cycle on alterne les couleurs donc le cycle est forcément de longueur paire.
Soit G un graphe qui ne possède pas de cycle de longueur impaire. Quitte à se placer sur une composante connexe, on peut supposer que G est connexe. Soit s_0 un sommet et pour tout sommet s de G on note $d(s_0, s)$ la distance de s_0 à s. On colorie $s \in S$ avec la couleur 1 ou 2 suivant que $d(s_0, s)$ est paire ou impaire. Montrons que se coloriage est valide. Supposons qu'il existe $x, y \in S$ relié par une arête de couleur différente. Soit $s_0, s_1, \ldots, s_k = x$ un chemin minimal de s_0 à x et $s'_0, s'_1, \ldots, s'_k = y$ un chemin minimal de s_0 à y. C'est deux chemins ont des longueurs de parité différentes, ils forment donc un cycle de longueur impaire. Ce qui est contradictoire.

Correction 9 Par l'absurde : Supposons qu'il n'existe pas une qui autoroute passe au-dessus d'une autre, ni une voie de chemin de fer qui passe au-dessus d'une autre. Il y a 11 villes reliées deux à deux, d'où 55 liaisons de deux natures (train ou route). D'après le principe des tiroirs, il existe donc au moins 28 liaisons d'une même nature. Par symétrie des rôles, on peut supposer qu'il y a au moins 28 autoroutes. Considérons alors le graphe simple G dont les sommets sont les villes et les arêtes sont les routes. De notre hypothèse on déduit que G est planaire. On a vu qu'il alors devait vérifer la relation $a \leq 3s - 6$. Or, ici $3s - 6 = 27 < 28 \leq a$. Contradiction.