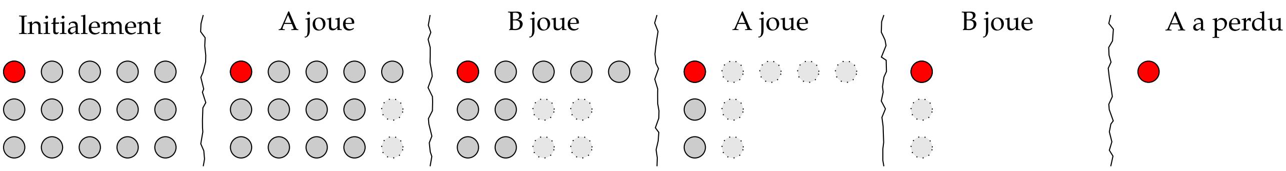
IUT Aix-en-Provence Année 2015-2016
DUT Informatique TD Graphes et Langages **feuille n° 4**

Jouons

Exercice 1 (Civilisation)

1. Grossbaff et Grossbouff, hommes préhistoriques, posent un paquet de 100 lézards sur la table. A tour de rôle, chacun en mange autant qu'il veut, au moins un. Celui qui ne peut plus manger a perdu. Grossbaff commence. Est ce qu'un des joueurs a une stratégie gagnante ?
2. Quelques centaines milliers d'années ont passé et les mœurs se sont adoucies. Grossbaff et Grossbouff, hommes préhistoriques, ont toujours un paquet de 100 lézards sur la table. A tour de rôle, chacun en mange au moins un, mais, civilité oblige, les bons moeurs interdisent d'en prendre plus de m où m est une limite arbitraire que l'on va fixer à 5. Grossbaff commence et celui qui ne peut plus manger a perdu. Qui va gagner ?
3. Quelles sont les valeurs de m que peut choisir Grossbouff pour être sûr de gagner si Grossbaff lui demande de fixer la limite à ne pas dépasser (c'est toujours Grossbaff qui commence) ?
4. Quelques centaines de milliers d'années ont (encore) passé et les mœurs se sont (encore) adoucies. M. de Grossbaff et M. de Grossbouff, pairs du royaume, ont maintenant un paquet de 100 ortolans est sur la table. A tour de rôle, chacun en mange au moins un, mais, civilité oblige, s'interdit d'en prendre plus que m. Celui qui mangera le dernier se sentira confus, et devra se retirer, ayant perdu l'estime du roi. M. de Grossbaff commence, qui va gagner ?

Exercice 2 (Chomp) Chomp est joué avec une "tablette de chocolat", c'est-à-dire un rectangle composé de blocs carrés. Les joueurs choisissent un carré à tour de rôle, et le "mange", ainsi que tous les carrés situés à sa droite ou plus bas. Le carré en haut à gauche est empoisonné et celui qui le mange perd la partie.
Voici un exemple de partie à partir d'une tablette de taille 3x5 :



1. Quelle est la stratégie gagnante dans le cas $1 \times n$?
2. A l'aide d'un graphe qui décrit tous les coups possible, trouver une stratégie gagnante pour une tablette 2×3.
3. On se propose d'étudier le cas $2 \times n$. Combien de positions sont possible ? Combien de coups sont possible (c'est à dire le nombre de façon de passer d'une position à une autre) ? Déterminer une stratégie gagnante.
4. Dans le cas général d'une tablette de taille $n \times m$, déterminer quel joueur a une stratégie gagnante (on ne demande pas de trouver la stratégie gagnante).
5. Déterminer une stratégie gagnante si la tablette est de taille $n \times n$.
6. Programmer le jeu de Chomp de telle sorte que la machine gagne dès que c'est possible.

Exercice 3 (Le jeu de Marienbad) On dispose 16 allumettes en quatre rangées de respectivement 1, 3, 5 et 7 allumettes. Chaque joueur à tour de rôle peut prendre autant d'allumettes qu'il veut mais dans une seule rangée. Le joueur qui prend la dernière allumette a gagné.

1. Que se passe-t-il quand il ne reste plus que deux rangées d'allumettes ? Quelle est la stratégie gagnante dans ce cas ?
2. Pour analyser le jeu, sur chaque ligne d'un tableau on écrit en binaire le nombre d'allumettes de la rangée correspondante, puis on somme les colonnes du tableau. Par exemple pour la position initiale, on obtient :

rangée 1 (1 allumette) :			1
rangée 2 (3 allumettes) :		1	1
rangée 3 (5 allumettes) :	1	0	1
rangée 4 (7 allumettes) :	1	1	1
	2	2	4

On note N l'ensemble des positions pour lesquelles toutes ces sommes sont paires. Montrer que N est stable, c'est-à-dire que les positions de N sont deux à deux non adjacentes.

3. Montrer que de toute position qui n'est pas dans N on peut atteindre une position de N.
4. Au jeu de Marienbad, lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?
5. Programmer le jeu de Marienbad de telle sorte que la machine gagne dès que c'est possible.

Exercice 4 (Sprout) Sprouts (germe en anglais) se joue à deux joueurs avec un stylo et une feuille de papier. Au départ, il y a n points sur la feuille. Chaque joueur, à tour de rôle, relie deux points existants par une ligne et ajoute un nouveau point sur cette ligne de telle sorte que :

— les lignes ne peuvent se croiser (le graphe doit rester planaire),

— un point ne peut pas être relié à plus de trois lignes (le degré maximal des sommets est 3).

Celui qui ne peut plus jouer sans enfreindre les deux contraintes a perdu (Il existe également une version misère, où celui qui ne peut plus jouer est cette fois le gagnant).

1. Montrer que toute partie de Sprout à partir de n sommets se termine en au plus $3n - 1$ coups.
2. Etablir une stratégie pour $n = 1$.
3. Etablir une stratégie pour $n = 2$.
4. Montrer que toute partie de Sprout à partir de n sommets nécessite au moins $2n$ coups pour se terminer.
5. On a établit des stratégie gagnante informatiquement pour des valeurs de n inférieure à 50, la conjecture actuelle étant qu'avec n points au départ, le jeu sprout est gagnant pour le second joueur si $n = 0$, 1 ou 2 modulo 6 et il est gagnant pour le joueur 1 dans les autres cas. Pouvez vous faire mieux ?

Exercice 5 (La règle du gâteau) Dans certains jeux, le premier joueur est manifestement favorisé. Un moyen de rééquilibrer le jeu est d'appliquer la procédure suivante, qui s'inspire du partage d'un gâteau en deux (une personne découpe et l'autre choisit sa part). Le premier joueur A joue un coup avec les blancs. Le deuxième joueur B a ensuite le choix :

— soit il choisit de jouer la partie avec les blancs (s'il trouve que le premier coup est bon), et c'est alors à A de jouer avec les noirs,

— soit il choisit de jouer la partie avec les noirs (s'il trouve que le premier coup est mauvais), et c'est alors à lui de jouer avec les noirs. La partie se déroule ensuite normalement.

Quand on applique cette procédure, lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Jouons (Solutions)

Correction 2 1. Comme le graphe associé est sans cycle, on sait qu'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Par un argument de "vol de stratégie", on peut montrer que le joueur 1 a une stratégie gagnante. En effet, supposons que le joueur 2 possède une stratégie gagnante contre tous les premiers coups possibles du premier joueur. Supposons ensuite que le joueur 1 effectue son premier coup en mangeant le carré en bas à droite. Le joueur 2 répond avec sa stratégie gagnante en mangeant un certain carré (n, m). Mais dans ce cas, le joueur 1 aurait pu lui-même jouer le coup (n, m) dès le début, et appliquer ensuite lui-même la stratégie gagnante. Ceci prouve que le deuxième joueur ne peut pas posséder de stratégie gagnante. On parle de preuve par vol de stratégie parce que le deuxième joueur se fait voler toute stratégie potentielle possible par le premier.

Correction 3 1.

Correction 4 1. On appelle liberté d'un sommet s le nombre $3 - d(s)$. Etant donné une configuration de Sprout, lorsqu'on on relie deux sommet on perd deux libertés correspondant aux sommets reliés et on rajoute une liberté correspondant au nouveau sommet. Ainsi, après avoir joué le nombre total de liberté a baissé de un. Le jeu s'arrête nécessairement si il reste une seule liberté.

Ainsi le nombre de coup correspond au plus au nombre de liberté initiale moins 1, c'est à dire $3n - 1$.

Correction 5