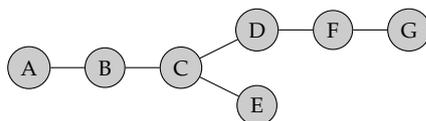


## Arbres

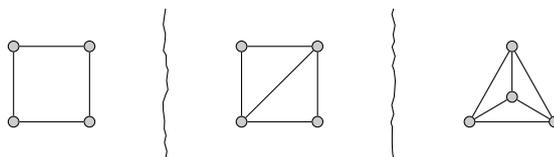
**Exercice 1** A isomorphisme près, donner tous les arbres non orientés d'ordre inférieur à 6.

**Exercice 2** Considérons l'arbre suivant :



1. Enraciné l'arbre par le sommet C et donner la liste des prédécesseurs.
2. Même question en enracinant par le sommet F.

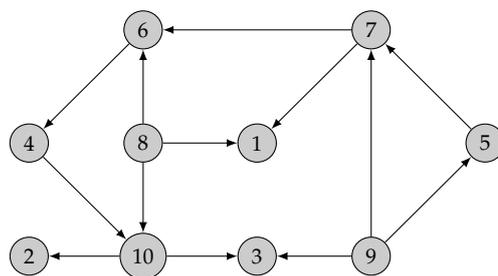
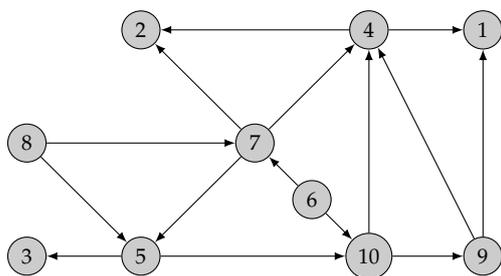
**Exercice 3 (Arbres couvrants)** Combien d'arbres couvrants différents les graphes ci-dessous possèdent-ils ?



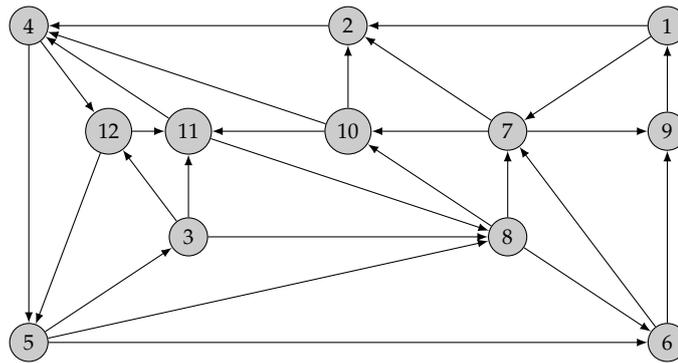
**Exercice 4** Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté (pas forcément connexe). On appelle forêt couvrante maximale tout sous-graphe de  $G$  couvrant, sans cycle, et telle que l'ajout quelconque d'une arête de  $A$  crée un cycle.

1. Montrer que si  $G$  est connexe, toute forêt couvrante maximale est un arbre couvrant.
2. Montrer que le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante maximale est  $|S| - k$ , où  $k$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ .

**Exercice 5 (Décomposition en niveau)** Décomposer les graphes suivants en niveaux :



**Exercice 6 (Exemples de parcours)** Soit  $G$  le graphe orienté suivant :



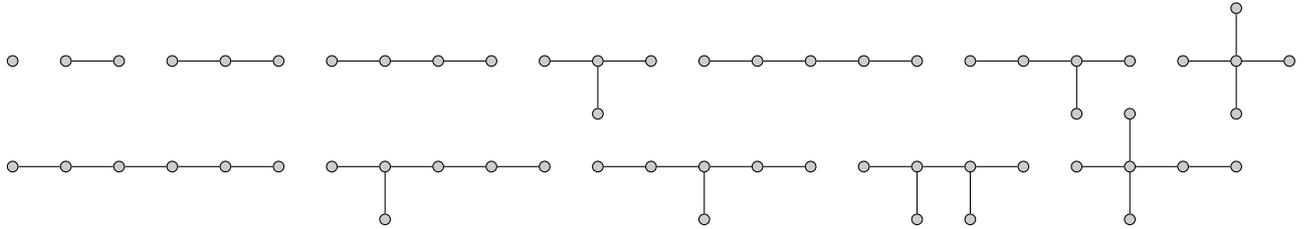
1. Faire le parcours en largeur de  $G$  depuis le sommet 1 par ordre croissant des sommets et représenter l'arbre de parcours obtenu. Donner la liste de prédécesseur correspondant à l'arbre de parcours ainsi que l'ordre de parcours des sommets.
2. Faire le parcours en profondeur de  $G$  depuis le sommet 1 par ordre croissant des sommets et représenter l'arbre de parcours obtenu. Donner la liste de prédécesseur correspondant à l'arbre de parcours ainsi que l'ordre de parcours des sommets.
3. Répondez aux mêmes questions en considérant le graphe non orienté associé à  $G$ .
4. Reprendre l'exercice en prenant comme point de départ le sommet 3.

**Exercice 7 (Utilisation des algorithmes de parcours)** En modifiant les algorithmes de parcours en largeur ou en profondeur, proposer des algorithmes pour résoudre les problèmes suivants et en donner leur complexité.

1. Déterminer s'il y a un chemin d'un sommet à un autre sommet.
2. Dénombrer le nombre de composantes connexes
3. Déterminer la distance entre deux sommets.
4. Déterminer s'il y a un circuit dans un graphe orienté.

## Arbres (Solutions)

**Correction 1** Les arbres non orienté d'ordre inférieur à 5 à isomorphisme près sont :



- Correction 4**
1. Soit  $G' = (S, A')$  une forêt couvrante maximale de  $G$ . On va montrer par l'absurde que  $G'$  est connexe. Soient  $s, s' \in S$ , comme  $G$  est connexe, il existe un chemin  $s = s_0, \dots, s_n = s'$  allant de  $s$  à  $s'$ . Soit  $i$  le premier entier tel que  $\{s_i, s_{i+1}\} \notin A'$ . Si on rejoue cette arête à  $A'$ , on obtient un cycle donc il existe un chemin dans  $G'$  allant de  $s_i$  à  $s_{i+1}$ . En raisonnant de proche en proche, on réalise un chemin allant de  $s$  à  $s'$  dans  $G'$ .
  2. D'après la question précédente, une forêt couvrante maximale est composée d'arbre sur chacune de ses composantes connexes. Le nombre d'arête d'un arbre est égal au nombre de sommet moins 1, on en déduit le résultat.

**Correction 5**