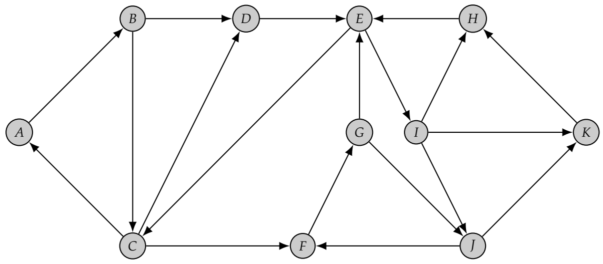
IUT Aix-en-Provence — Année 2015-2016
DUT Informatique — TD Graphes et Langages **feuille n° 2**

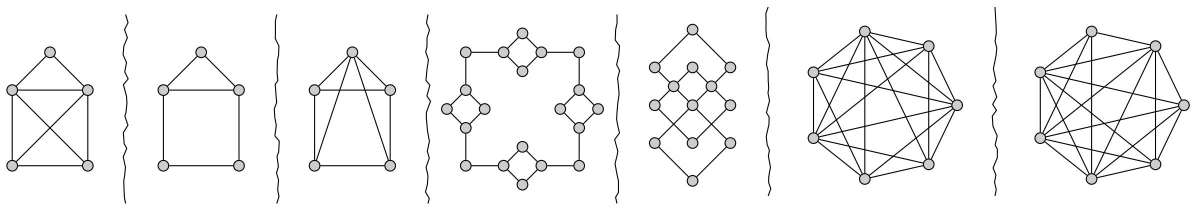
Cheminement

Exercice 1 (Promenade) Le graphe suivant représente une partie d'une ville où les rues sont à sens unique.



1. Donner la matrice d'adjacence du graphe orienté précédent (noté G) ainsi que celle du graphe non orienté associé (noté G').
2. Quel est le nombre de manières d'aller en voiture, en 5 étapes, de A à K ? Quel est le nombre de manières de faire le même itinéraire à pied (on n'est donc plus obligé de respecter les sens interdits) ?
3. Donner le diamètre de G et G'.

Exercice 2 (Tracé sans lever de crayon) Parmis les graphes suivants, lesquels admettent un cycle eulérien. Combien d'arêtes faut il rajouter au minimum pour obtenir un cycle eulérien ?



Exercice 3 (Algorithme et Euler) En vous basant sur la preuve inductive du théorème qui caractérise les graphes eulériens, décrivez un algorithme qui trouve un circuit eulérien en un temps $O(|A|)$.

Exercice 4 Etant donné un graphe non-orienté simple, pas nécessairement Eulérien, montrez qu'il est possible de transformer ce graphe en un graphe simple Eulérien en rajoutant des arêtes.

Exercice 5 (Fil de fer) On dispose d'un fil de fer de 120cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimun faut-il couper le fil de fer ?

Exercice 6 (Promenade) Dans une ville située au confluent de deux rivières, il y a n ponts. Représenter la situation par un graphe G à 3 sommets et n arêtes, et montrer que G admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

Exercice 7 (Autoroutes) Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ? Quel est le diamètre du graphe associé à ce réseau autoroutier ?

Exercice 8 (Réunions dans un club) 1. Un club de 9 personnes se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin ?

2. Généraliser la question précédentes au cas où le club à n personnes.
3. Le club de 9 personnes à cette fois deux tables, l'une de 4 places, l'autre de 5. Combien y a t'il de jours de réunion possibles ? Et avec trois tables de 3 places ?

Exercice 9 (Craquage de digicode) L'accès d'un bâtiment est contrôlé par un digicode dont la combinaison est formée d'une suite de 4 lettres $x_1x_2x_3x_4$, appelé mot, ne pouvant prendre que 2 valeurs $x_i = 0$ ou 1. Pour entrer, sans connaître le code, il faut normalement tenter chacune des combinaisons possibles (1111, 1110, . . .). Nous allons voir qu'il est possible d'entrer avec bien moins de tentatives.
En effet lorsqu'on saisit une chaîne de p lettres $x_1x_2x_3 \dots x_p$ le digicode teste successivement les sous-chaînes $x_1x_2x_3x_4$, $x_2x_3x_4x_5$,. . . , $x_{p-3}x_{p-2}x_{p-1}x_p$ (par exemple taper 111001 revient à tester 1110, 1100, 1001). Pour trouver la chaîne la plus courte possible permettant d'entrer dans le bâtiment sans connaître le code, on représente le problème par un graphe orienté G dont :

- les sommets représentent les mots de trois lettres $x_1x_2x_3$;
- on a un arc du sommet $x_1x_2x_3$ à $y_1y_2y_3$ si $x_2x_3 = y_1y_2$ successivement par ajout d'une lettre à la fin de la combinaison précédente, par exemple en ajoutant 0 à la fin de 111 on obtient une nouvelle chaîne 1110 donc on aura un arc : 111 $\to$ 110.

1. Quel est le nombre de sommet du graphe ? Quel sont les degrés entrant et sortant de chaque sommet ? En déduire le nombre d'arcs et si le graphe est eulérien.
2. Donner une représentation planaire du graphe G.
3. On cherche un suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 4 caractères apparaît exactement une fois. Que doit vérifier le chemin associé et en déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété.
4. Quel est la longueur minimale lorsque le code est un mot de longueur d sur un alphabet à n symboles ?

Exercice 10 Vingt équipes de football participent à un tournoi. Le premier jour, chacune dispute un match. Le second jour, chaque équipe joue un autre match, contre une équipe différente de celle de la veille. Prouver qu'après ce second jour, il est possible de trouver un groupe de 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore rencontrées.

Exercice défi Le roi Arthur fait s'asseoir ses $2n$ chevaliers autour de la Table Ronde. Chacun des chevaliers possède au plus $n-1$ ennemis parmi les autres chevaliers. Prouver que Merlin l'Enchanteur peut trouver un arrangement des $2n$ chevaliers de sorte qu'aucun ne soit assis à côté d'un de ses ennemis (bien sûr, l'animosité est réciproque, et seuls les chevaliers s'assoient autour de la table).

Cheminement (Solutions)

Correction 3 Il faut utiliser la preuve du théorème d'Euler "Un graphe connexe est eulérien ssi tous les sommets sont de degré pair"
La deuxième partie de la preuve consiste en la construction d'un parcours eulérien, cela nous donne aussi un algorithme pour trouver un parcours eulérien.
Le principe de l'algorithme est simple :

- on prend un nœud non parcouru encore ;
- on prend les arêtes non parcourues encore jusqu'à revenir sur le noeud de départ ;
- on merge ce parcours avec ceux déjà trouvés ;
- si il n'y a plus de nœuds non explorés, on a fini. Sinon on reprend au point 1.

Algorithm 1: Algorithme de recherche de cycle eulérien

Data: $G = (S, A)$ un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, x un sommet de S
Result: C un cycle eulérien sur la composante connexe de x

```
C ← (x);
;                  /* C: LISTE des sommets du cycle dans l'ordre de parcours */
if x est un sommet isolé then
    Retourner C;                        /* Base de la récursivité : est isolé */
else
    y ← x ;                                                  /* Initialiser  */
    while y n'est pas un sommet isolé do
        Choisir z l'un de ses voisins;
        Supprimer l'arête {y,z};
        y est rajouté à C ;    /* on ajoute le sommet y au cycle afin de construire un
        cycle contenant x */
    Retourner Euler(G,(1))... Euler(G,(k)) ; /* Appel récursif sur chacun des k sommets du
    cycle en concaténant les réponses */
```

Preuve : Tout d'abord remarquons que la première phase de l'algorithme construit bien un cycle contenant x. En effet chaque fois que nous arrivons et repartons d'un sommet dans notre marche, nous supprimons 2 de ses arêtes incidentes. Tous les sommets étant de degré pair, seul le sommet de départ, x, peut être déconnecté lors de l'arrivée à ce sommet. Le fait que l'algorithme construit un cycle eulérien peut alors se montrer par induction sur le nombre d'arêtes du graphe, de manière similaire à la preuve du théorème d'Euler. Les arêtes du graphe étant supprimées au fur et à mesure de la construction, elles apparaissent bien exactement une fois dans le cycle final.
Complexité : A chaque fois qu'une arête du graphe est parcourue dans la première phase de l'algorithme pour construire le cycle , elle est supprimée. Le parcours du cycle pour effectuer les appels récursifs se fait en temps proportionnel au nombre de ses arêtes. La complexité totale de l'algorithme est donc bien en $O(|E|)$. Il est optimal en temps, puisqu'un cycle eulérien comprend —E— arêtes.

Correction 4 Il suffit de modifier le degré des sommets de degré impair. Soit s, s' deux sommets de degré impair :

- s'il n'y a pas d'arête entre s et s' alors on en ajoute une arête entre s et s' leurs degrés sont augmentés de 1 et deviennent pairs,
- s'il y a déjà une arête entre s et s' alors on ajoute un sommet t et deux arêtes entre s et t et entre s' et t, les degrés de s et s' sont augmentés de 1 et deviennent pairs, alors que t est de degré 2 donc pair.

Comme il y'a un nombre pair de de sommets de degré impair, on peut conclure.

Correction 7 Soit A une ville quelconque. L'autoroute nous conduit de la capitale vers au moins 7 villes différentes ; on a donc un réseau de 8 villes reliées par autoroute. De la ville A on peut également relier par autoroute au moins 7 autres villes différentes ; on a donc un nouveau réseau de 8 villes reliées par autoroute. Il doit y avoir une ville commune à ces deux réseaux, car sinon le pays aurait au moins 16 villes. La capitale est donc reliée à A en au plus deux coups, en passant par cette ville commune ; elle est donc reliée à toutes les autres villes du pays. Le graphe qui représente la situation précédente sera dit connexe.

Correction 8

1. Considérons le graphe complet K_9 à 9 sommets. Une composition de la table correspond à un cycle hamiltonien de K_9. Si deux compositions de table correspondent à deux cycles ayant une arête commune, cela signifie que les deux personnes reliées par cette arête se retrouvent côte à côte, le problème revient donc à déterminer le nombre de cycles hamiltoniens disjoints de K_9.

   Le graphe K_9 possédant $9 \times 8/2 = 36$ arêtes. Chaque cycle utilisant 9 arêtes, le nombre de cycle hamiltonien disjoint est au maximum égal à 4. Il vaut effectivement 4, comme le prouvent les 4 cycles hamiltoniens disjoints suivants :

   $$1,2,3,9,4,8,5,7,6 \qquad 1,3,4,2,5,9,6,8,7 \qquad 1,4,5,3,6,1,7,9,8 \qquad 1,5,6,4,7,2,8,1,9$$

2. En règle générale, k solutions sont possibles pour un graphe à $n = 2k+1$ ou $n = 2k+2$ sommets. Le même argument que précédemment donne cette valeur maximale, pour trouver une solution il faut construire les différents cycles hamiltoniens. Pour cela, on regarde les cycles de la forme $(\{i, i+j\})_{i\in[1,n]}$ avec $j \in [1,k]$.
3. Il s'agit toujours de décomposer le graphe complet en ensembles disjoints de 9 arêtes, mais cette fois, chaque ensemble doit correspondre à un cycle de 4 arêtes et un cycle de 5 arêtes. Avec trois tables de 3, chaque ensemble doit correspondre à trois tirangles. Le nombre maximum de solutions discuté précédemment reste donc valable dans ces deux situations : nous aurons au plus 36 / 9 = 4 solutions. Là encore, on peut trouver 4 solutions :
   — une table de 4 et une table de 5 :

   $$(1,2,3,4)(5,6,7,8,9) \qquad (2,4,6,8)(1,3,5,7,9) \qquad (...) \qquad (...)$$

   — trois tables de 3 :

   $$(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9) \qquad (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \qquad (1,5,9)(2,6,7)(3,4,8) \qquad (1,6,8)(2,4,9)(3,5,7)$$

Pour chacune des situations de cet exercice, plusieurs solutions sont possibles.

Correction 9

Correction 10 On construit un graphe G dont les sommets sont les 20 équipes, en reliant deux sommets par une arête rouge si et seulement s'ils correspondent à deux équipes qui se sont affrontées le premier jour, et par une arête verte pour le second jour. Ainsi, chaque sommet est l'extrémité d'exactement une arête rouge et une arête verte, et donc a pour degré 2. Dans chaque composante connexe, en partant d'un sommet arbitraire, et en suivant alternativement une arête rouge et une arête verte, on parcourt ainsi un cycle eulérien, qui est également un cyle hamiltonien. La bicoloration assure que ce cycle est de longueur paire. En choisissant un sommet sur deux dans chacun de ces cycles, on obtient ainsi 10 sommets indépendants, qui représentent bien 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore affrontées.

Correction