IUT Aix-en-Provence Année 2015-2016
DUT Informatique TD Graphes et Langages **feuille n° 1**

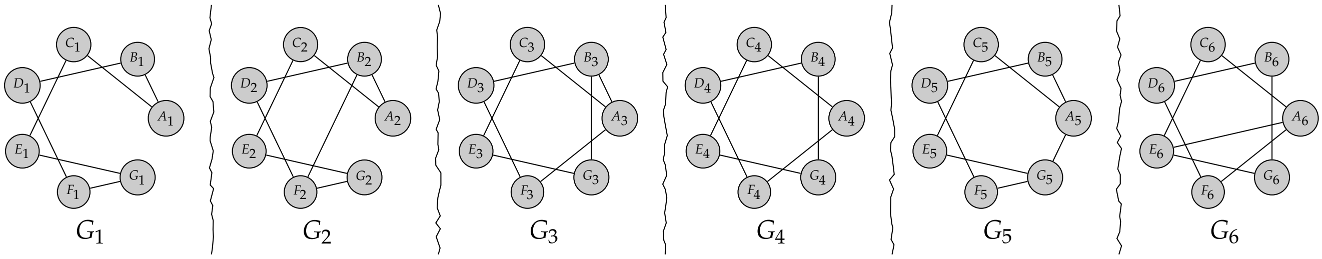
Premières notions sur les graphes

Exercice 1 On considère le graphe orienté $G = (S, A)$ tels que

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}.$$

1. Donner le dictionnaire des successeurs et des prédécesseur du graphe G.
2. Calculer les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
3. Ecrire la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de G et retrouver sur les deux matrices les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
4. Quel est le sous-graphe induit G' de G de sommets $S' = \{1, 2, 3\}$? Comment obtenir la matrice d'adjacence de G' à partir de celle de G ?

Exercice 2 Parmis les graphes suivants, dire, en justifiant, lesquels sont isomorphes entre eux.



Exercice 3 Soient n un entier positif non nul et $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. On définit le graphe orienté G le graphe de sommets S par pour tout $s, t \in S$ on a

$$(s, t) \in A \iff s \text{ divise } t.$$

1. Donner explicitement le dictionnaire des prédécesseur, la matrice d'adjacence et une représentation sagittale de G pour $n = 6$.
2. Soient s et t deux sommets de G, caractériser la propriété : "s et t sont premiers entre eux".
3. A l'aide des prédécesseur d'un sommet s de G, caractériser la propriété "s est premier".
4. A chaque arcs $x \to y$, ont attribue la valuation y/x.Comment retrouver dans ce graphe la décomposition d'un nombre en facteurs premiers ?

Exercice 4 On organise un tournois de Football organisé sous forme de poule de n équipes où chaque équipe doit rencontrer toutes les autres.

1. Représenter la situation par un graphe lorsque $n = 4$. Combien de matchs joue chaque équipe ? Combien de matchs y a-t-il en tout ?
2. Que deviennent ces résultats avec des poules de 5 équipes ?
3. Dans une des poules les cinq équipes ont gagné respectivement 3,2,2,1,1 matchs. Combien y a-t-il eu de match(s) nul(s) ?
4. Le nombre de matches étant trop important les organisateurs décident de faire jouer seulement 3 matchs à chaque équipe. Comment l'organiser ?

Exercice 5 Un groupe de personnes est tel que :

1. chaque personne est membre d'exactement deux associations,
2. chaque association comprend exactement trois membres,
3. deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

Exercice 6 Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Exercice 7 Mr et Mme X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. Mr X constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de poignées de mains serrées par chaque personne ? Que peut on en déduire pour Mr X ?
2. Représenter la situation par un graphe (Indication : Positionner les 8 sommets du graphes en 4 groupes de 2 et tracer les arêtes en commençant par le sommet de plus haut degré).
3. Combien de poignées de mains Mr et Mme X ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

Exercice 8 Soit n un entier donné. On considère l'algorithme suivant :

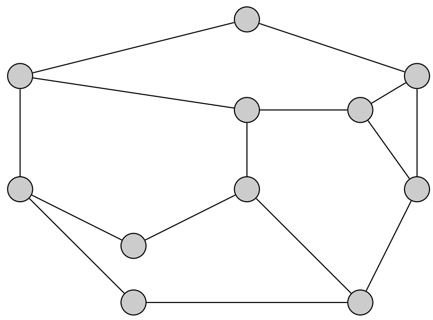
Algorithm 1:

$x \leftarrow n$;
while $x \neq 1$ **do**
  if x *pair* **then**
    $x \leftarrow x/2$;
  else
    if $x+2$ *multiple de* 3 **then**
      $x \leftarrow (x+2)/3$;
    else
      $x \leftarrow x-1$

Représenter l'algorithme par une graphe étiqueté. Représenter le déroulement de l'algorithme pour les entiers de $[1, 17]$. En déduire le nombre de passage dans la boucle pour tous ces entiers.

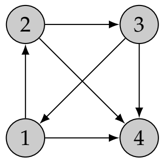
Exercice 9 On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres. Comment doit-on faire ?

Exercice 10 Le graphe ci-dessous représente le plan des couloirs d'un musée. Un gardien placé dans un couloir peut surveiller les deux carrefours placés à ses extrémités. Combien de gardiens sont nécessaires (et comment les placer) afin que tous les carrefours soient surveillés ?
Si l'on place maintenant les gardiens aux carrefours, en supposant qu'un tel gardien peur surveiller tous les couloirs amenant à ce carrefour, combien de gardiens sont nécessaires ?



Premières notions sur les graphes (Solutions)

Correction 1



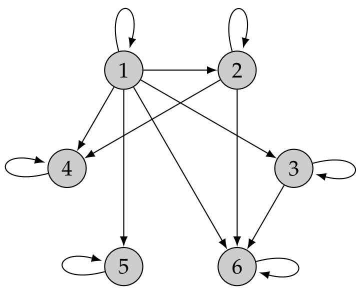
Correction 2 G_3 et G_5 sont isomorphes.
G_1 et G_4 sont isomorphes.
G_2 et G_6 sont isomorphes.

Correction 3

1. Le dictionnaire des prédécesseur est

Sommets	Prédécesseur
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6

Sa représentation sagittale est :



2. Deux nombres sont premiers entre eux si il n'y a pas d'arcs entre eux.
3. Un nombre premier correspond à un sommet de degré entrant 2 puisqu'il doit être divisible par 1 et lui-même. Le sommet 1 est de degré entrant 1 et n'est pas premier.
4. Si l'on considère un chemin allant de 1 à n, le produit des valeurs des arcs qui le composent vaut nécessairement n On peut alors, dans le graphe précédent, ne conserver que les arcs dont la valeur est un nombre premier et qui ne sont pas des boucles. Tout sommet n est alors tel qu'il existe un unique chemin de 1 à n, dont les valeurs d'arcs donnent la décomposition en facteurs premiers.

Correction 4

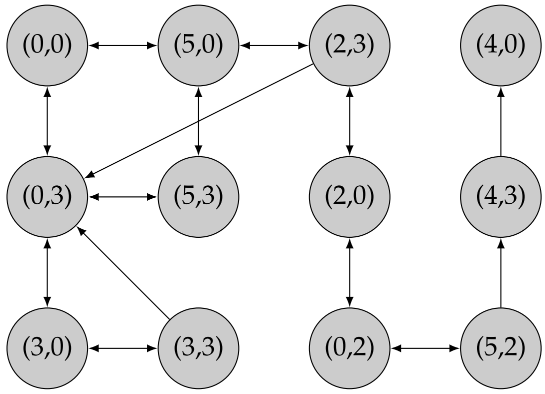
Correction 5 La première affirmation permet de dire que l'on peut modéliser le problème avec graphe dont les sommets sont les associations et les arêtes les personnes appartenant aux associations. La troisième affirmation permet de dire que le graphe est complet puisque entre deux sommet il y a toujours exactement une arête. La deuxième affirmation permet de dire que chaque sommet est de degré 3. Seul le graphe complet à 4 sommet noté K_4 vérifie ces conditions, ce graphe à 4 sommets et 6 arêtes, il y a donc 6 personnes qui se répartissent dans 4 associations.

Correction 6 Considérons le graphe dont les sommets sont les enfants et il y a une arête entre deux sommets si les enfants sont amis. Ce graphe a $7 + 9 + 4 = 20$ sommets, pour déterminer le nombre d'arêtes, on calcule la somme des degrés $7 * 3 + 9 * 4 + 4 * 5 = 77$ est impaire. Par la lemme de la poignée de main, ce nombre doit être égal à deux fois le nombres d'arêtes ce qui est donc impossible.

Correction 7

Correction 8 Cela donne :

Correction 9 Les sommets sont cette fois des couples donnant le contenu du récipient de 5 litres et celui du récipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre. On cherche alors un chemin du sommet 0,0 au sommet 4,0… La figure suivante montre un tel chemin (le graphe n'est pas représenté en entier…), la bonne méthode est de construire le graphe progressivement sommet par sommet.



Correction 10 1. Chaque gardien va être placé sur une arête et pourra surveiller deux carrefours (sommets). Le graphe ayant 11 sommets, il faudra au minimum 6 gardiens. Il faut donc trouver un ensemble (minimal) d'au moins six arêtes, tel que tout sommet est incident à au moins l'une de ces arêtes. Le schéma ci-dessous donne une solution (arêtes épaisses).
2. Cette fois, les gardiens sont sur les sommets et surveillent les arêtes. Il faut trouver un ensemble minimal de sommets tel que toute arête est incidente à au moins l'un de ces sommets. On constate rapidement que tout cycle de longueur 5 doit avoir 3 sommets dans cet ensemble… Le schéma ci-dessous donne une solution utilisant 6 sommets (sommets blancs).