Graphes et langages

Minimum vital à savoir

3 Février 2015

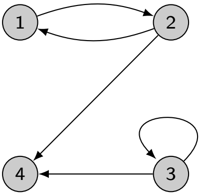
Première définition

Graphe orienté

Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets;
- d'un ensemble $A \subset S \times S$ dont les éléments sont les arcs.

Soit un arc $a = (s, s')$, s est l'*origine* de a et s' l'*extrémité*. On dit aussi que s' est le *successeur* de s et s le *prédécesseur* de s'.



$G = (S, A)$ où

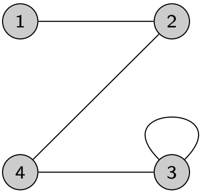
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (3, 3)\}$.

Graphe non orienté

Un *graphe non orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont les sommets du graphe,
- d'un ensemble A dont les éléments, les arêtes du graphe, sont des parties à un ou deux éléments de S.

Le ou les sommets d'une arête sont appelés extrémités de l'arête. Les arêtes n'ayant qu'une seule extrémité sont des boucles.



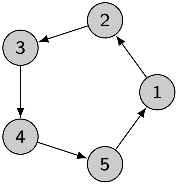
$G = (S, A)$ où

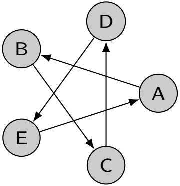
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.

Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \Longleftrightarrow (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$

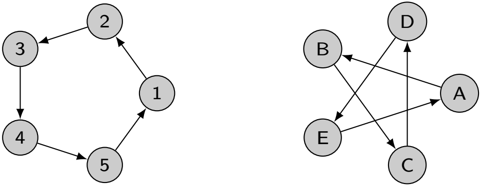




Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \iff (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$



- Deux graphes non-orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } \{s, s'\} \in A \iff \{\varphi(s), \varphi(s')\} \in A.$$

Degré

- Pour un graphe orienté, on appèle *degré entrant* d'un sommet s, noté $d_-(s)$ (resp. *degré sortant* d'un sommet s, noté $d_+(s)$) le nombre d'arcs dont le sommet est prédécesseur (resp. successeur).
- Pour un graphe non-orienté, on appèle *degré* d'un sommet s, noté $d(s)$ le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Lemme de la poignée de main

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On alors les égalités suivantes:

$$\sum_{s \in S} d_+(s) = \sum_{s \in S} d_-(s) = |A|.$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On a alors l'égalité suivante:

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|.$$

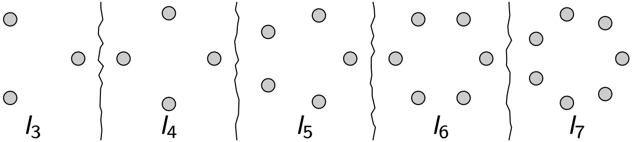
Corollaire

Dans un graphe, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.

Différentes classes de graphes

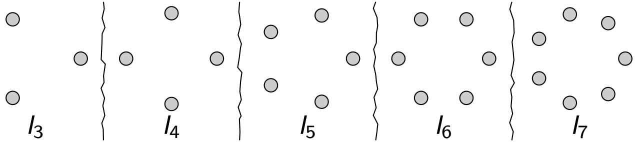
Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

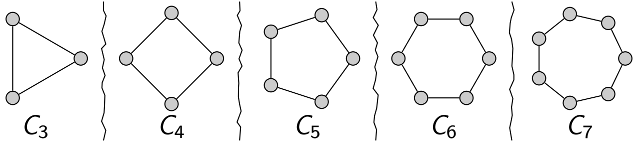


Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

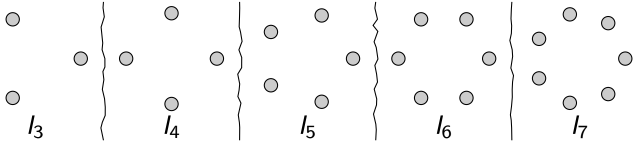


Graphes cycliques:

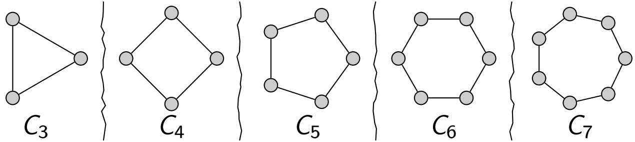


Isolé, cycles, complet

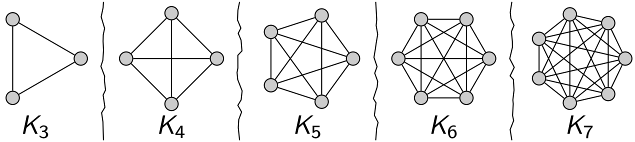
Graphes Isolés:



Graphes cycliques:

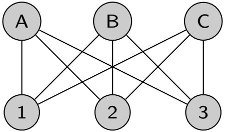


Graphes complets:



Graphe biparti

Un graphe est *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête ait une extrémité dans X et l'autre dans Y.
On définit le *graphe biparti complet* entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets comme le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet su deuxième ensemble.

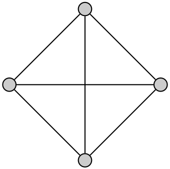


$K_{3,3}$

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

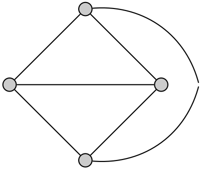


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

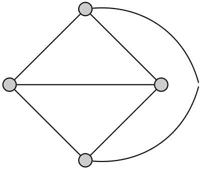


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire? Est ce que K_5 et $K_{3,3}$ sont planaires?

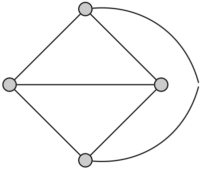


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire? Est ce que K_5 et $K_{3,3}$ sont planaires?



K_4

Formule d'Euler

Soit G un graphe planaire connexe dont une représentation planaire possède s sommets, a arêtes et f faces. On a

$$s - a + f = 2.$$

Si G possède k composantes connexes, on a alors $s - a + f = 1 + k$.

Problèmes de chemins dans un graphe

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit

- **Notion de:** longueur distance, diamètre.

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit
- **Notion de:** longueur distance, diamètre.
- **Matrice d'adjacence:** permet le calcul du nombre de chemin de longueur n.

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit

- **Notion de:** longueur distance, diamètre.
- **Matrice d'adjacence:** permet le calcul du nombre de chemin de longueur n.
- **Connexité**

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit
- **Notion de:** longueur distance, diamètre.
- **Matrice d'adjacence:** permet le calcul du nombre de chemin de longueur n.
- **Connexité**
- **Caractérisation des chemins eulérien:**

Théorème

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. Il admet un cycle eulérien si et seulement si $d(s)$ est pair pour tout $s \in S$.
Si seulement deux sommets ne vérifient pas les conditions précédentes alors G admet une chaîne Eulériene.

Notion de chemin

- **Définition:**

  Graphes non-orientés: chemin, cycle
  Graphes orientés: chaîne, circuit
- **Notion de:** longueur distance, diamètre.
- **Matrice d'adjacence:** permet le calcul du nombre de chemin de longueur n.
- **Connexité**
- **Caractérisation des chemins eulérien:**

Théorème

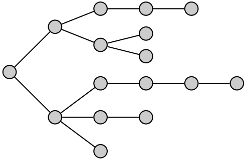
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. Il admet un cycle eulérien si et seulement si $d(s)$ est pair pour tout $s \in S$.
Si seulement deux sommets ne vérifient pas les conditions précédentes alors G admet une chaîne Eulériene.

- **Chemins hamiltoniens**

Graphes non-orientés acycliques
Graphes orientés sans-circuits

Arbre

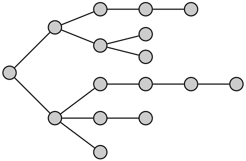
Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle



Propriétés à savoir:

Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle

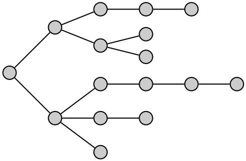


Propriétés à savoir:

- un arbre à n sommets à $n-1$ arêtes.

Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle

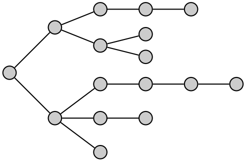


Propriétés à savoir:

- un arbre à n sommets à $n-1$ arêtes.
- Tout graphe connexe peut s'obtenir par ajout d'un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommets.

Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle

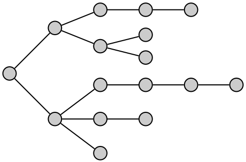


Propriétés à savoir:

- un arbre à n sommets à $n-1$ arêtes.
- Tout graphe connexe peut s'obtenir par ajout d'un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommets.
- On oriente un arbre en choisissant une racine de telle sorte tous les sommet ont un seul prédécesseur sauf la racine qui n'en a pas.

Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle



Propriétés à savoir:

- un arbre à n sommets à $n - 1$ arêtes.
- Tout graphe connexe peut s'obtenir par ajout d'un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommets.
- On oriente un arbre en choisissant une racine de telle sorte tous les sommet ont un seul prédécesseur sauf la racine qui n'en a pas.
- Notion de rang pour un graphe orienté sans circuit (Algorithme de tri topologique).

Modéliser un jeu

Est il possible de gagner à tout les coups à Fort-Boyaux?

On représente le jeu à l'aide d'un graphe et on cherche le noyau de ce graphe.

Coloriage

Problème de coloriage

- Définition du problème de coloriage

Problème de coloriage

- Définition du problème de coloriage
- Applications aux problèmes de contraintes

Problème de coloriage

- Définition du problème de coloriage
- Applications aux problèmes de contraintes
- Comment déterminer le nombre chromatique $\chi(G)$:
  - On donne un coloriage valide qui majore $\chi(G)$ (à l'aide de l'algorithme glouton ou Welsh Powell)
  - On donne une minoration de $\chi(G)$, par exemple en trouvant un sous graphe dont on connait le nombre chromatique (ex: stable)

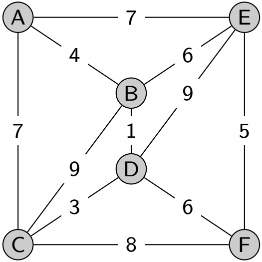
Problème de coloriage

- Définition du problème de coloriage
- Applications aux problèmes de contraintes
- Comment déterminer le nombre chromatique $\chi(G)$:
  - On donne un coloriage valide qui majore $\chi(G)$ (à l'aide de l'algorithme glouton ou Welsh Powell)
  - On donne une minoration de $\chi(G)$, par exemple en trouvant un sous graphe dont on connait le nombre chromatique (ex: stable)
- Si le graphe est planaire, 4 couleurs suffisent.

Problèmes d'optimisation pour des graphes valués

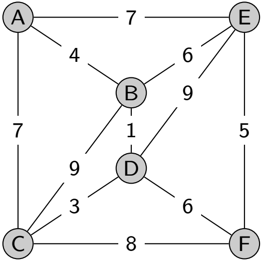
Recherche d'arbre couvrant maximal

On suppose G non orienté muni de valuations positives. On cherche à relier tous les sommets avec un coup minimal



Recherche d'arbre couvrant maximal

On suppose G non orienté muni de valuations positives. On cherche à relier tous les sommets avec un coup minimal



On va construire l'arbre couvrant petit à petit *(algorithme glouton)*:

- Approche locale: à chaque étapes, parmi les sommets connectés, on rajoute l'arête optimale qui relie un sommet déjà connecté à un sommet non connecté. On utilisera cette approche dans l'*algorithme de Prim*.
- Approche globale: On choisit l'arête optimale de façon que l'are rajouté ne relie pas des sommets déjà connectés. On utilisera cette approche dans l'*algorithme de Kurskal*.

Problème de plus court chemin

Les algorithmes étudiés prennent en entrée un graphe valué et renvoie tous les plus courts chemin allant d'un sommet initial s à tous les autres sommets. On stoque toute l'information dans deux listes de taille $|S|$:

- $Dist(x)$ qui à la fin de l'algorithme donne $d(s,x)$ pour tout sommet $x \in S$;
- $Pred(x)$ qui à la fin de l'algorithme donne le prédécesseur du sommet $x \in S$ dans l'arbre des plus court chemin.

Les trois algorithmes que nous allons étudier fonctionnent de la façon suivante:

1. on initialise les tableaux *Dist* et *Pred*
2. on calcule $Dist(s)$ et $Pred(s)$ par approximations successives, ce qui signifie qu'à chaque étape, on essaye d'améliorer les valeurs obtenues précédemment;
3. l'amélioration, au niveau local, se vérifie ainsi : pour un sommet s et un successeur s' de s, on compare la valeur $Dist(s')$ obtenue à l'étape précédente avec la valeur qu'on obtiendrait en passant par s, c'est-à-dire $Dist(s) + W(s,s')$ on a alors deux cas:
   - si cette deuxième valeur est plus petite, alors $Dist(s') \leftarrow Dist(s) + W(s,s')$ et $Pred(s') \leftarrow s$;
   - sinon on ne fait rien.

   Cette technique est appelée *technique du relâchement*.

Problème de plus court chemin

Algorithme	Type de graphe	Complexité
Bellman-Ford	tout type de graphe	$O(n^3)$
Bellman	graphe sans circuit	$O(n^2)$
Dijkstra	graphe de valuation positive	$O(n^2)$

Plan d'étude d'un algorithme:

- Terminaison
- Correction
- Complexité

Notion de théorie des langages

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Expression rationnelles: Un langage rationnel peut être décrit par une expression rationnelle

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Expression rationnelles: Un langage rationnel peut être décrit par une expression rationnelle

Automate Fini:
- Stabilité par les opérations usuelles
- Retrouver l'expression rationnelle à partir d'un automate fini

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Expression rationnelles: Un langage rationnel peut être décrit par une expression rationnelle

Automate Fini:
- Stabilité par les opérations usuelles
- Retrouver l'expression rationnelle à partir d'un automate fini

Lemme de pompage: Montrer qu'un langage n'est pas rationnel

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Expression rationnelles: Un langage rationnel peut être décrit par une expression rationnelle

Automate Fini:
- Stabilité par les opérations usuelles
- Retrouver l'expression rationnelle à partir d'un automate fini

Lemme de pompage: Montrer qu'un langage n'est pas rationnel

Automates déterministes: Déterminisation

Notion de théorie des langages

Définitions de bases: mot, concaténation, préfixe, langage...

Langages rationnels: Ensemble de langage contenant les langages de base et stable par union, concaténation et opération étoile.

Expression rationnelles: Un langage rationnel peut être décrit par une expression rationnelle

Automate Fini:
- Stabilité par les opérations usuelles
- Retrouver l'expression rationnelle à partir d'un automate fini

Lemme de pompage: Montrer qu'un langage n'est pas rationnel

Automates déterministes: Déterminisation

Cadeau pour l'exam: il existe d'autres modèles de calculs!!!

Bon courage pour samedi prochain