Un graphe

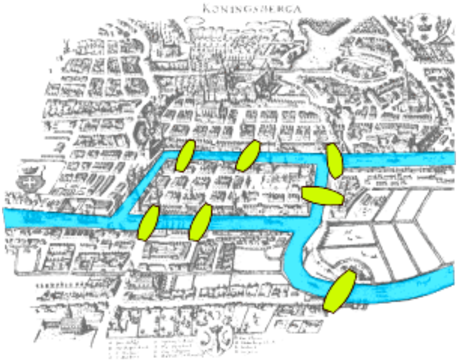
Qu'es acò ?

3 Février 2015

Problèmes liés aux graphes

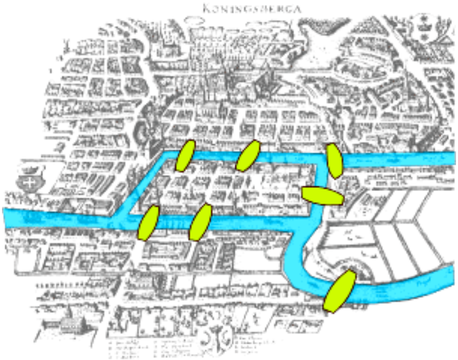
Ville de Königsberg

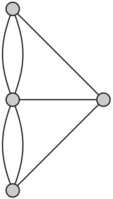
Est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg?



Ville de Königsberg

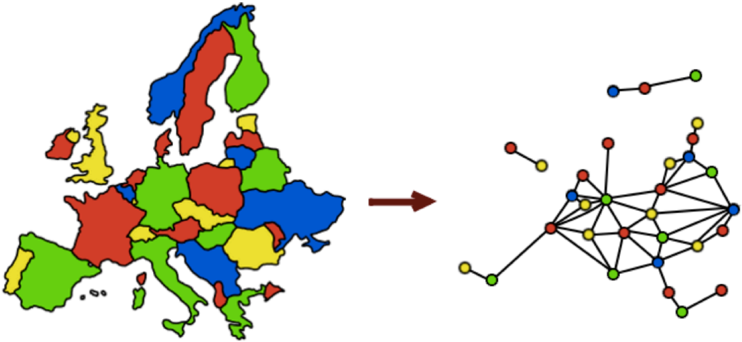
Est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg?





Coloriage

Combien de couleurs au maximum me faut-il pour colorier une carte?

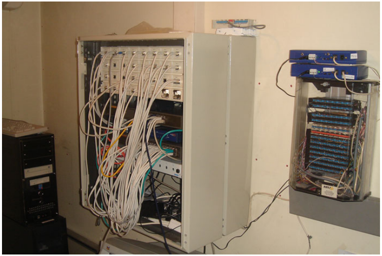


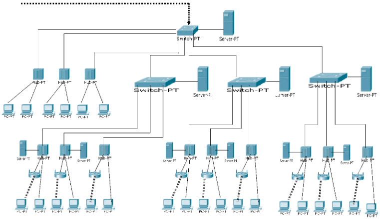
Réseaux de transports

Quel itinéraire choisir?

Réseaux informatique

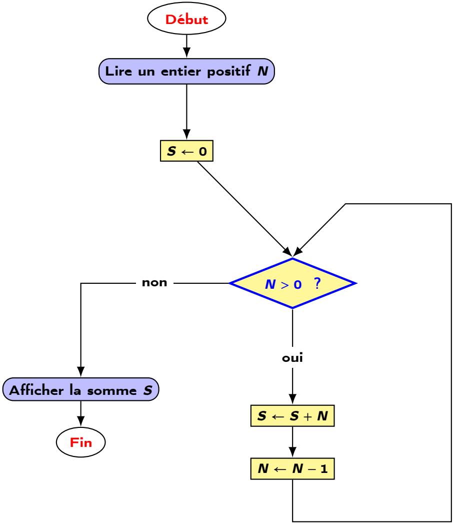
Comment optimiser le routage?





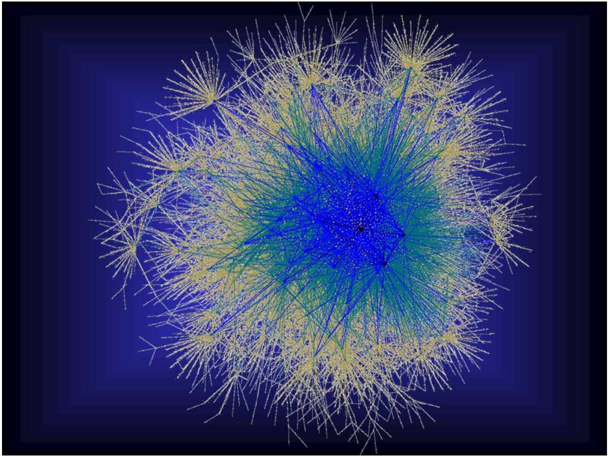
Modéliser un programme

Demander N;
$S \leftarrow 0$;
while $N > 0$ **do**
  $S \leftarrow S + N$;
  $N \leftarrow N - 1$;
end
Afficher S;



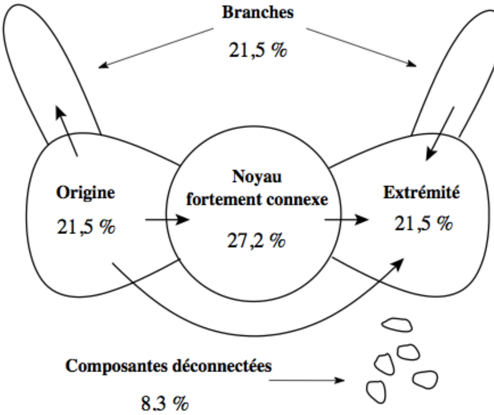
Graphe du web

Quel sont les bons algorithmes de parcours de tels graphes?



Graphe du web

Quel sont les bons algorithmes de parcours de tels graphes?



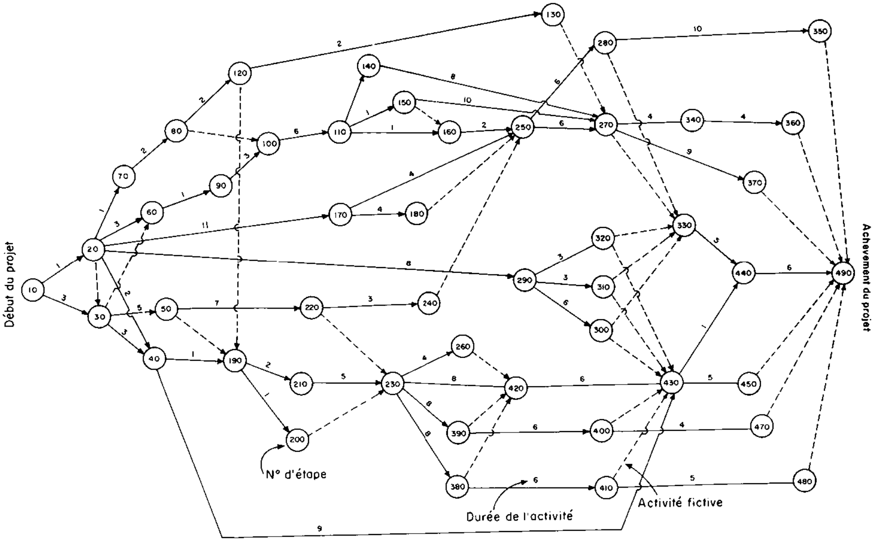
Réseaux sociaux

Quel sont les propriétés sous jacentes aux graphes de ''terrain''?

- Facebook,
- Tweeter,
- Poignée de main
- distance de Edrös

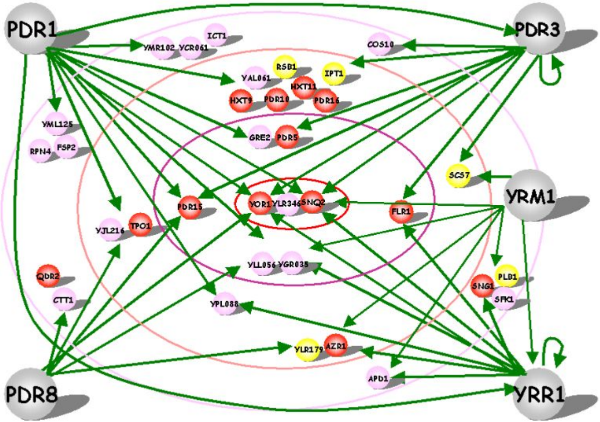
Ordonnancement de projet

Quel va être la durée d'un projet?



Réseaux de régulation génétique

De tels systèmes ont-ils des états stables?



Réseaux de régulation génétique

De tels systèmes ont-ils des états stables?

Réseau génétique de la bactérie E. coli.

Modéliser un jeu

Est il possible de gagner à tout les coups à Fort-Boyaux?

But du cours

Dans ce cours, on va explorer les deux approches pour étudier les graphes:

- **Approche structurelle:** Etudier et comprendre des propriétés communes à une classe de graphe donnée.
- **Approche algorithmique:** Elaborer des algorithmes ''performants'' pour résoudre un problème sur les graphes.

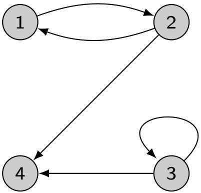
Définition formelle

Graphe orienté

Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets;
- d'un ensemble $A \subset S \times S$ dont les éléments sont les arcs.

Soit un arc $a = (s, s')$, s est l'*origine* de a et s' l'*extrémité*. On dit aussi que s' est le *successeur* de s et s le *prédécesseur* de s'.



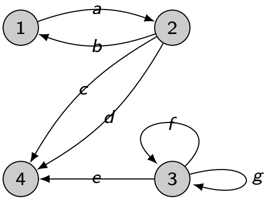
$G = (S, A)$ où

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (3, 3)\}$.

Graphe orienté

Un *graphe orienté multi-arcs*, $G = (S, A, \mathbf{i}, \mathbf{f})$ c'est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets;
- d'un ensemble A dont les éléments sont les arcs;
- de deux fonctions $\mathbf{i} : A \to S$ et $\mathbf{f} : A \to S$ qui à chaque arcs $a \in A$ associe son prédécesseur $\mathbf{i}(a)$ et son successeur $\mathbf{f}(a)$.



$G = (S, A, \mathbf{i}, \mathbf{f})$ où

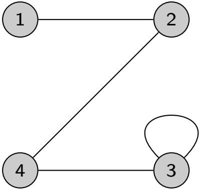
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
- $\mathbf{i} : \begin{array}{ccc} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 2 \\ c & \mapsto & 2 \\ d & \mapsto & 2 \\ e & \mapsto & 3 \\ f & \mapsto & 3 \\ g & \mapsto & 3 \end{array}$ et $\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} a & \mapsto & 2 \\ b & \mapsto & 1 \\ c & \mapsto & 4 \\ d & \mapsto & 4 \\ e & \mapsto & 4 \\ f & \mapsto & 3 \\ g & \mapsto & 3 \end{array}$.

Graphe non orienté

Un *graphe non orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont les sommets du graphe,
- d'un ensemble A dont les éléments, les arêtes du graphe, sont des parties à un ou deux éléments de S.

Le ou les sommets d'une arête sont appelés extrémités de l'arête. Les arêtes n'ayant qu'une seule extrémité sont des boucles.



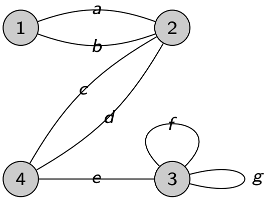
$G = (S, A)$ où

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.

Graphe non orienté

Un *graphe non-orienté multi-arêtes* $G = (S, A, \alpha)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets;
- d'un ensemble A dont les éléments sont les arêtes;
- d'une fonction α de A dans les parties à un ou deux éléments de S.



$G = (S, A, \alpha)$ où

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
- $\alpha : \begin{array}{ccc} a & \mapsto & \{1,2\} \\ b & \mapsto & \{1,2\} \\ c & \mapsto & \{2,4\} \\ d & \mapsto & \{2,4\} \\ e & \mapsto & \{3,4\} \\ f & \mapsto & \{3\} \\ g & \mapsto & \{3\} \end{array}$.

Quelques définitions

- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet

Quelques définitions

- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet
- graphe *simple*: graphe non-orienté sans boucle et avec au plus une arête entre deux sommets.

Quelques définitions

- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet
- graphe *simple*: graphe non-orienté sans boucle et avec au plus une arête entre deux sommets.
- *ordre* d'un graphe: nombre de sommets $|S|$

Quelques définitions

- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet
- graphe *simple*: graphe non-orienté sans boucle et avec au plus une arête entre deux sommets.
- *ordre* d'un graphe: nombre de sommets $|S|$
- *taille* d'un graphe: nombre d'arêtes ou d'arcs $|A|$.

Quelques définitions

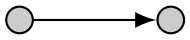
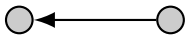
- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet
- graphe *simple*: graphe non-orienté sans boucle et avec au plus une arête entre deux sommets.
- *ordre* d'un graphe: nombre de sommets $|S|$
- *taille* d'un graphe: nombre d'arêtes ou d'arcs $|A|$.
- *valuation* sur les sommets (resp. sur les arcs ou arêtes) toutes fonctions $\lambda : S \to \mathbb{R}$ (resp. $\lambda : A \to \mathbb{R}$).

Quelques définitions

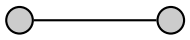
- *boucle*: arête ou arcs dont les extrémités sont le même sommet
- graphe *simple*: graphe non-orienté sans boucle et avec au plus une arête entre deux sommets.
- *ordre* d'un graphe: nombre de sommets $|S|$
- *taille* d'un graphe: nombre d'arêtes ou d'arcs $|A|$.
- *valuation* sur les sommets (resp. sur les arcs ou arêtes) toutes fonctions $\lambda : S \to \mathbb{R}$ (resp. $\lambda : A \to \mathbb{R}$).
- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, on *associe* le graphe non orienté $G' = (S, A')$ ayant le même ensemble de sommets S et dont l'ensemble d'arêtes A' vérifie

$$\{x, y\} \in A' \iff (x, y) \in A \text{ ou } (y, x) \in A.$$

Par example, les trois graphes suivants

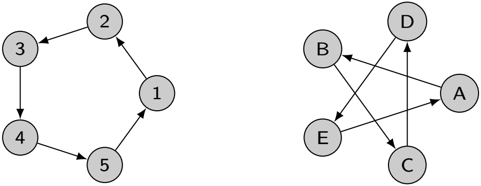
sont associés au graphe non orienté suivant



Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

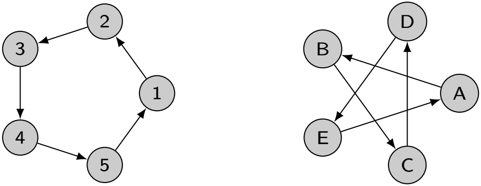
$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \Longleftrightarrow (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$



Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \iff (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$



- Deux graphes non-orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } \{s, s'\} \in A \iff \{\varphi(s), \varphi(s')\} \in A'.$$

Degré

- Pour un graphe orienté, on appèle *degré entrant* d'un sommet s, noté $d_-(s)$ (resp. *degré sortant* d'un sommet s, noté $d_+(s)$) le nombre d'arcs dont le sommet est prédécesseur (resp. successeur).
- Pour un graphe non-orienté, on appèle *degré* d'un sommet s, noté $d(s)$ le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Lemme de la poignée de main

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On alors les égalités suivantes:

$$\sum_{s \in S} d_+(s) = \sum_{s \in S} d_-(s) = |A|.$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On a alors l'égalité suivante:

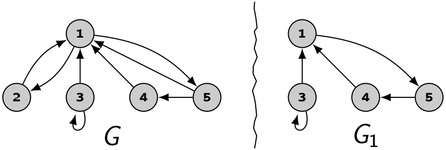
$$\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|.$$

Corollaire

Dans un graphe, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.

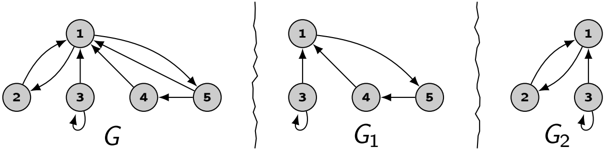
Construction de graphes à partir d'un autre

- Un *sous-graphe* de G est un graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ tel que $S_1 \subset S$ et $A_1 \subset A$.



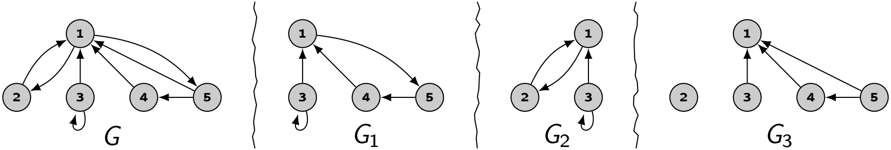
Construction de graphes à partir d'un autre

- Un *sous-graphe* de G est un graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ tel que $S_1 \subset S$ et $A_1 \subset A$.
- $G_2 = (S_2, A_2)$ est un *sous-graphe induit* si A_2 est formé de tous les arcs (ou arêtes) de G ayant leurs extrémités dans S_2 (c'est à dire $\forall s, s' \in S_2, (s, s') \in A_2$ si et seulement si $(s, s') \in A$).



Construction de graphes à partir d'un autre

- Un *sous-graphe* de G est un graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ tel que $S_1 \subset S$ et $A_1 \subset A$.
- $G_2 = (S_2, A_2)$ est un *sous-graphe induit* si A_2 est formé de tous les arcs (ou arêtes) de G ayant leurs extrémités dans S_2 (c'est à dire $\forall s, s' \in S_2, (s, s') \in A_2$ si et seulement si $(s, s') \in A$).
- $G_3 = (S_3, A_3)$ est *couvrant* s'il contient tous les sommets de G (c'est à dire $S_3 = S$).



Différents modes de représentation d'un graphe

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).

Différentes modes de représentation d'un graphe

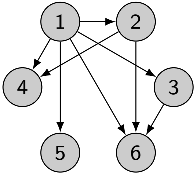
- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique

Soit $G = (S, A)$ avec $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour tout $s, s' \in S$ on a

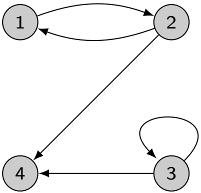
$$(s, s') \in A \iff s \text{ divise strictement } s'.$$



Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente

Pour décrire un graphe, il suffit de donner le *dictionnaire des successeurs* ou le *dictionnaire des prédécesseurs*.

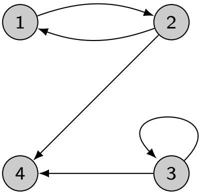


Sommets	Prédecesseurs
1	2
2	1
3	3
4	2,3

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente

Pour décrire un graphe, il suffit de donner le *dictionnaire des successeurs* ou le *dictionnaire des prédécesseurs*.

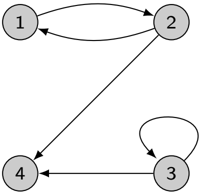


Sommets	Successeurs
1	2
2	1,4
3	3,4
4	$\varnothing$

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente

Pour décrire un graphe, il suffit de donner le *dictionnaire des successeurs* ou le *dictionnaire des prédécesseurs*.



Sommets	Successeurs
1	2
2	1,4
3	3,4
4	$\varnothing$

Représentation sous forme de liste:

Liste successeurs LS = | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | · |

Tête des successeurs TS = | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 |

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente
- Matrice d'adjacences

La *matrice d'adjacence* de G est la matrice définie par

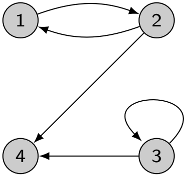
$$m_{i,j} = \begin{cases} k \text{ s'il y a } k \text{ arêtes allant de } i \text{ à } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } (i,j) \in [1,n]^2$$

Différentes modes de représentation d'un graphe

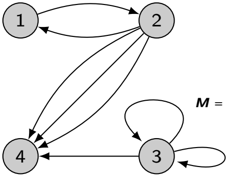
- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente
- Matrice d'adjacences

La *matrice d'adjacence* de G est la matrice définie par

$$m_{i,j} = \begin{cases} k \text{ s'il y a } k \text{ arêtes allant de } i \text{ à } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } (i,j) \in [1,n]^2$$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



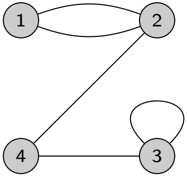
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Différentes modes de représentation d'un graphe

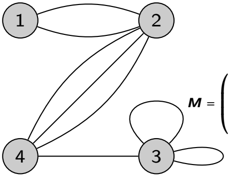
- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente
- Matrice d'adjacences

La *matrice d'adjacence* de G est la matrice définie par

$$m_{i,j} = \begin{cases} k \text{ s'il y a } k \text{ arêtes allant de } i \text{ à } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } (i,j) \in [1,n]^2$$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



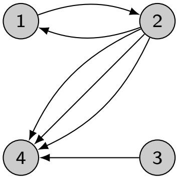
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Différentes modes de représentation d'un graphe

- Définir la liste des sommets et des arêtes (ou arcs).
- Représentation sagittale
- Définition par propriété caractéristique
- Listes d'adjacente
- Matrice d'adjacences
- Matrice d'incidence

La *Matrice d'incidence* de $G = (S, A)$ est la matrice $(m_{i,j})_{(i,j) \in S \times A}$:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'extrémité de l'arête } j \\ -1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'origine de l'arête } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in S \times A$$

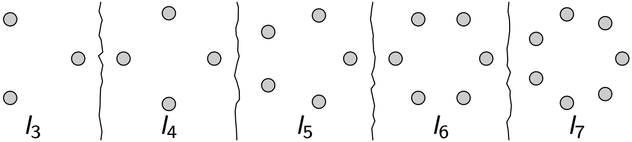


$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Différentes classes de graphes

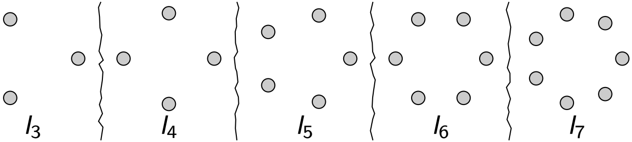
Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

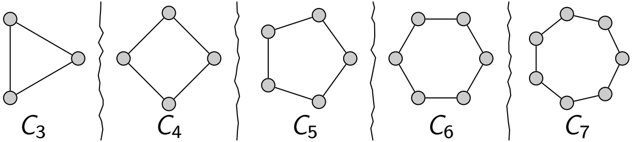


Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

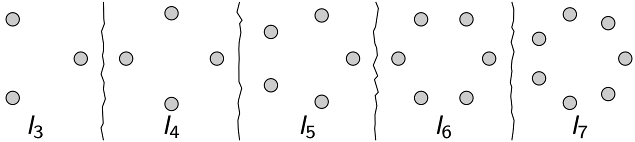


Graphes cycliques:

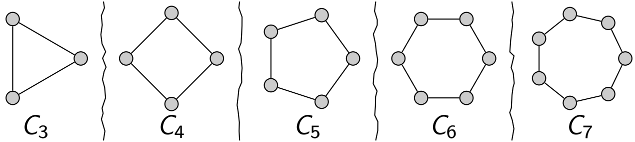


Isolé, cycles, complet

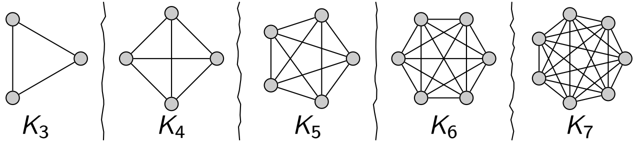
Graphes Isolés:



Graphes cycliques:

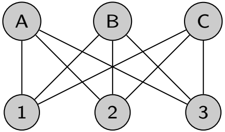


Graphes complets:



Graphe biparti

Un graphe est *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête ait une extrémité dans X et l'autre dans Y.
On définit le *graphe biparti complet* entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets comme le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet su deuxième ensemble.

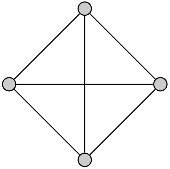


$K_{3,3}$

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

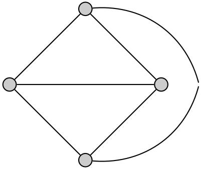


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?



K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

Est ce que K_5 et $K_{3,3}$ sont planaires?

Arbre

Un *arbre* se définit de manière inductive par:

- le graphe formé par un sommet est un arbre;
- si $G = (S, A)$ est un arbre, alors pour $s \in S$ et x un élément quelconque n'appartenant pas à S, le graphe $G' = (S \cup \{x\}, A \cup \{\{x, s\}\})$ est un arbre.