IUT Digne Année 2012-2013
DUT QLIO TD Outils Mathématiques **feuille n° 5**

Étude de fonctions

Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 8x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 14 \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x^2+3x-5}{2x^2-x+1} \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad f_5 : x \mapsto \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-3}{x+4}\right) \quad f_6 : x \mapsto \sin(x^2+3)$$

Exercice 2 Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 3 Le réel R étant fixé, déterminer la meilleure approximation affine de $(R+h)^3$ lorsque h est voisin de 0.
Sachant que le rayon de la Terre est 6365 km à 15 km près, estimez l'erreur maximale que l'on commet sur le calcul du volume.

Exercice 4 Un cycliste effectue un aller-retour entre deux villes. À l'aller, sa vitesse est de 20 km.h^{-1}, au retour elle est de x km.h^{-1}. On note $v(x)$ la vitesse moyenne sur le trajet.

1. Calculer la vitesse sur tout le trajet.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto v(x)$ et représentez la graphiquement.
3. Montrez que pour tout $x > 0$, $v(x) < 40$. La fonction v admet-elle un maximum sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 Lorsque le prix d'un concert est fixé de 30€, le directeur d'un auditorium sait que 800 spectateurs vont y assister, mais chaque baise d'un euro sur le prix du billet attire 40 spectateurs supplémentaires. A combien doit-on fixer le prix du billet pour réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 6 Un camion doit effectuer un parcours de 400km sur un tronçon d'autoroute. À la vitesse de v km.h^{-1}, sa consommation de gazole est de $\left(6 + \frac{v^2}{100}\right)$ litres par heures. Le prix du gazole est 1€par litre et on paye le chatffeur 20€par heure.
Quelle doit-être la vitesse du camion pour que le prix de la course soit minimale ? Quel est alors ce prix de revient ?

Exercice 7 Des boites de conserve cylindriques ont un volume V fixé. On note x le rayon de sa base.

1. Exprimer la hauteur $h(x)$ du cylindre ainsi que $a(x)$ son aire.
2. Quel est le domaine de définition de $x \mapsto h(x)$ et $x \mapsto a(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto a(x)$, pour quelle valeur cette fonction admet elle un minimum ?
4. Pour quelle hauteur la surface de métal (et donc le coup de production) est minimale ?

f est définie par	f est dérivable sur tout intervalle inclus dans	f' est définie par
$f(x) = k \qquad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

TABLE 1 – Dérivabilité des fonctions de référence

Hypothèses	Conclusions	
	Dérivabilité	Fonction dérivée
u et v sont dérivables sur I	$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
u et v sont dérivables sur I	uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
u est dérivable sur I	λu est dérivable sur I	$(u)' = \lambda u'$
u et v sont dérivables sur I et $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$	$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
u est dérivable sur I et v est dérivable sur $u(I)$	$v \circ u$ est dérivable sur I	$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

TABLE 2 – Dérivabilité et assemblage