Quelques problèmes sur les graphes

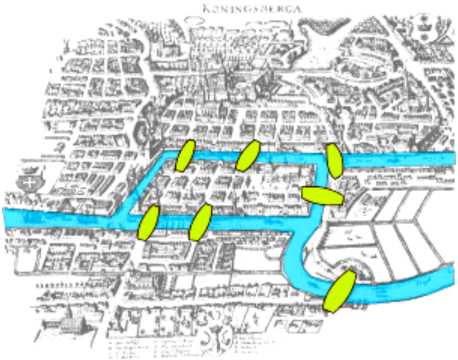
Université de Toulouse

Année 2017/2018

Problèmes liés aux graphes

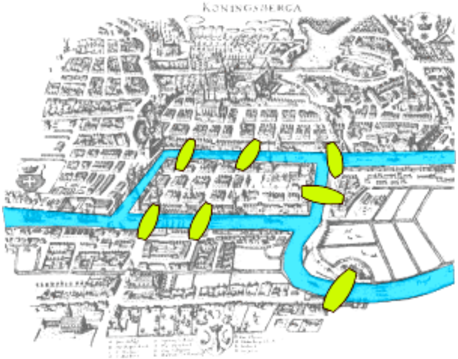
Ville de Königsberg

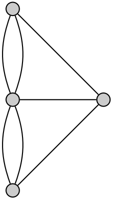
Est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg?



Ville de Königsberg

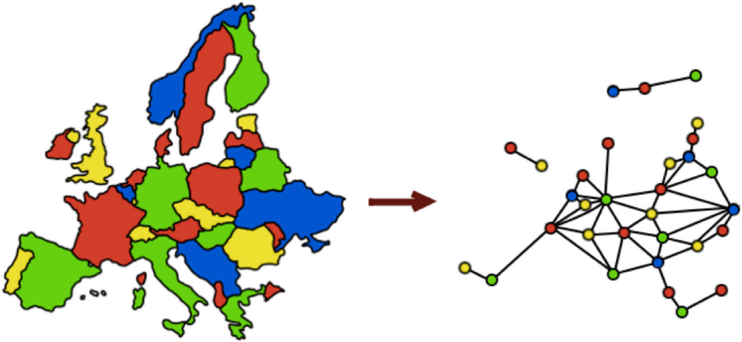
Est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg?





Coloriage

Combien de couleurs au maximum me faut-il pour colorier une carte?

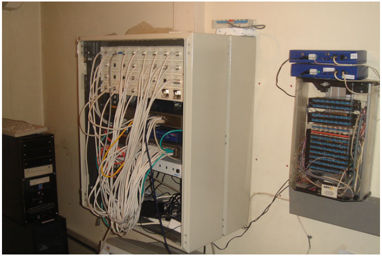


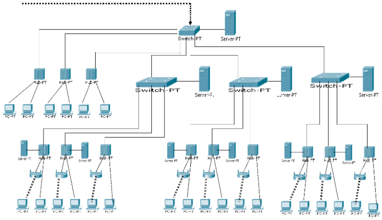
Réseaux de transports

Quel itinéraire choisir?

Réseaux informatique

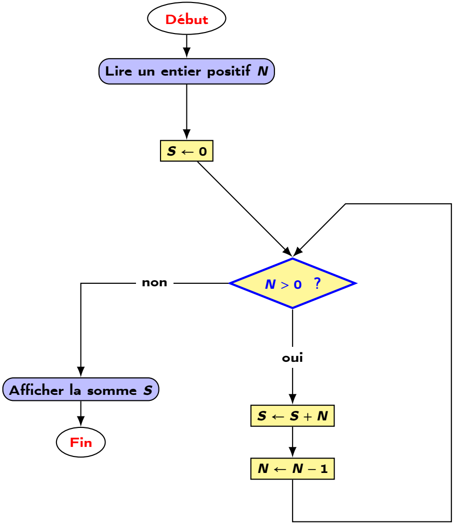
Comment optimiser le routage?





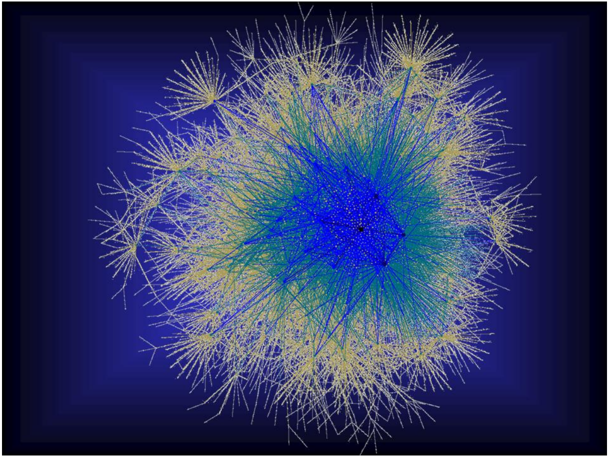
Modéliser un programme

Demander N;
$S \leftarrow 0$;
while $N > 0$ **do**
  $S \leftarrow S + N$;
  $N \leftarrow N - 1$;
end
Afficher S;



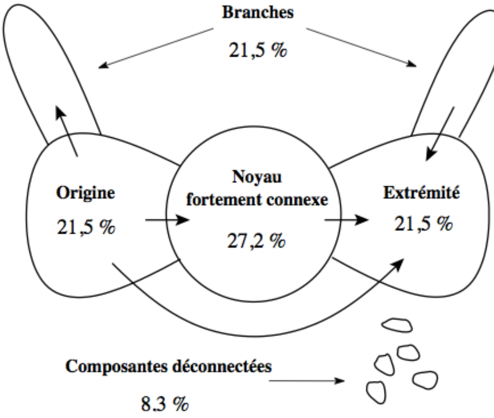
Graphe du web

Quel sont les bons algorithmes de parcours de tels graphes?



Graphe du web

Quel sont les bons algorithmes de parcours de tels graphes?



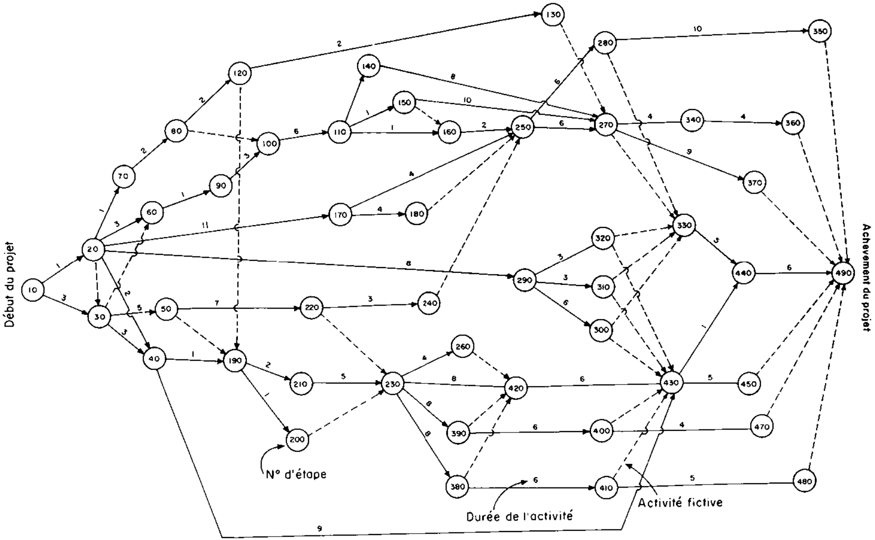
Réseaux sociaux

Quel sont les propriétés sous jacentes aux graphes de ''terrain''?

- Facebook,
- Tweeter,
- Poignée de main
- distance de Edrös

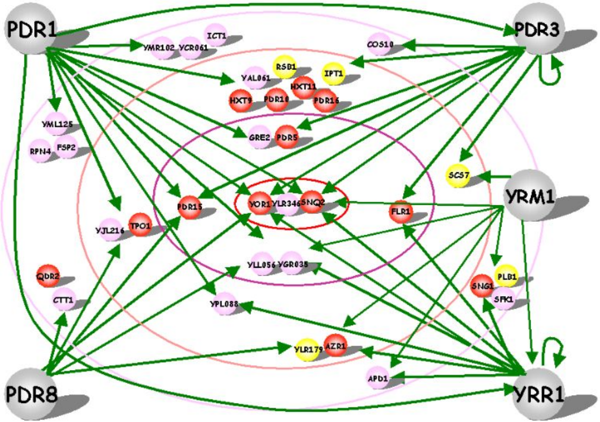
Ordonnancement de projet

Quel va être la durée d'un projet?



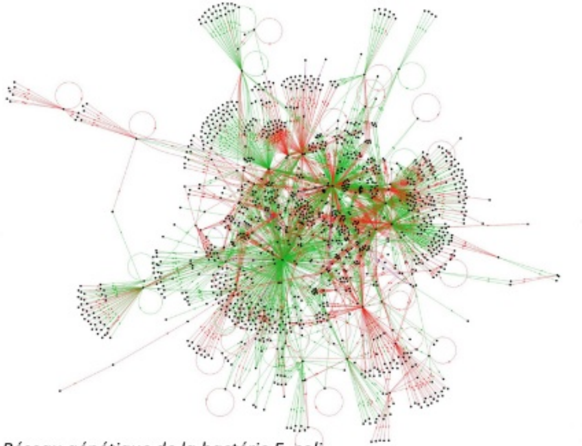
Réseaux de régulation génétique

De tels systèmes ont-ils des états stables?



Réseaux de régulation génétique

De tels systèmes ont-ils des états stables?



Réseau génétique de la bactérie E. coli.

Différentes approches

- **Approche structurelle:** Etudier et comprendre des propriétés communes à une classe de graphe donnée.

- **Approche algorithmique:** Elaborer des algorithmes ''performants'' pour résoudre un problème sur les graphes.

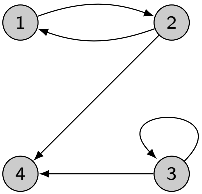
Premières propriétés

Graphe orienté

Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets;
- d'un ensemble $A \subset S \times S$ dont les éléments sont les arcs.

Soit un arc $a = (s, s')$, s est l'*origine* de a et s' l'*extrémité*. On dit aussi que s' est le *successeur* de s et s le *prédécesseur* de s'.



$G = (S, A)$ où

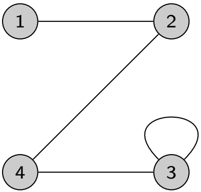
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (3, 3)\}$.

Graphe non orienté

Un *graphe non orienté* $G = (S, A)$ est la donnée:

- d'un ensemble S dont les éléments sont les sommets du graphe,
- d'un ensemble A dont les éléments, les arêtes du graphe, sont des parties à un ou deux éléments de S.

Le ou les sommets d'une arête sont appelés extrémités de l'arête. Les arêtes n'ayant qu'une seule extrémité sont des boucles.



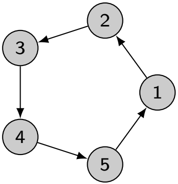
$G = (S, A)$ où

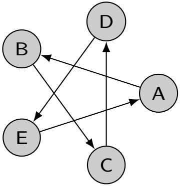
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.

Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \Longleftrightarrow (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$

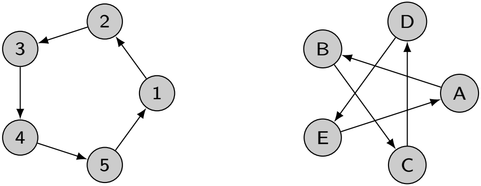




Isomorphisme de graphe

- Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } (s, s') \in A \Longleftrightarrow (\varphi(s), \varphi(s')) \in A.$$



- Deux graphes non-orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* si il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall s, s' \in S \text{ on a } \{s, s'\} \in A \Longleftrightarrow \{\varphi(s), \varphi(s')\} \in A.$$

Degré

- Pour un graphe orienté, on appèle *degré entrant* d'un sommet s, noté $d_-(s)$ (resp. *degré sortant* d'un sommet s, noté $d_+(s)$) le nombre d'arcs dont le sommet est prédécesseur (resp. successeur).
- Pour un graphe non-orienté, on appèle *degré* d'un sommet s, noté $d(s)$ le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Lemme de la poignée de main

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On alors les égalités suivantes:

$$\sum_{s \in S} d_+(s) = \sum_{s \in S} d_-(s) = |A|.$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On a alors l'égalité suivante:

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|.$$

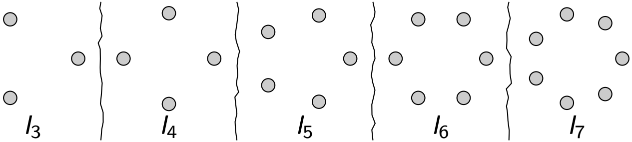
Corollaire

Dans un graphe, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.

Différentes classes de graphes

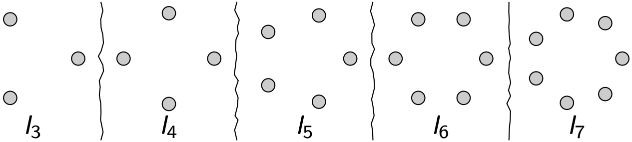
Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

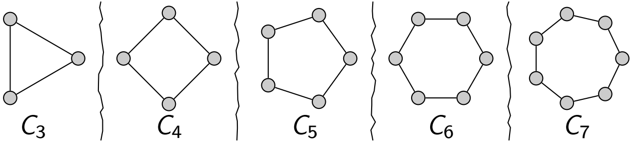


Isolé, cycles, complet

Graphes Isolés:

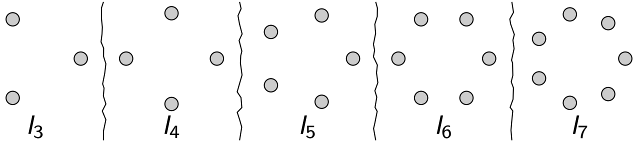


Graphes cycliques:

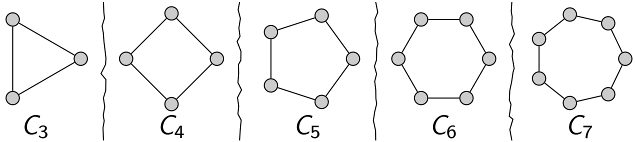


Isolé, cycles, complet

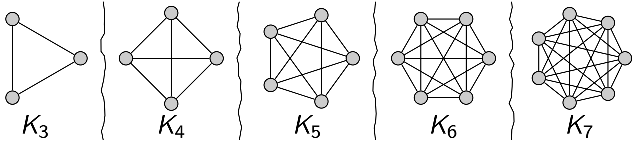
Graphes Isolés:



Graphes cycliques:

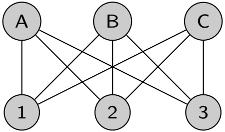


Graphes complets:



Graphe biparti

Un graphe est *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête ait une extrémité dans X et l'autre dans Y.
On définit le *graphe biparti complet* entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets comme le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet su deuxième ensemble.

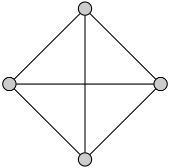


$K_{3,3}$

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

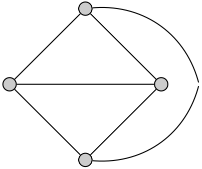


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire?

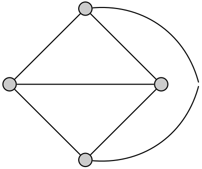


K_4

Graphe planaire

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

K_4 est il planaire? Est ce que K_5 et $K_{3,3}$ sont planaires?



K_4

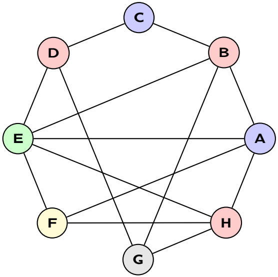
Coloriages

Position du problème

Un *coloriage* de $G = (S, A)$ consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.

Un graphe G est *k-coloriable* s'il existe un coloriage avec k couleurs.

Le *nombre chromatique* du graphe G, noté $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier un graphe.



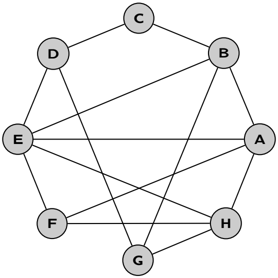
Peut on colorier ce graphe avec moins de couleurs?

Problème de compatibilité

Dans un groupe de 14 étudiants, on doit former des groupes de telle sorte que les étudiants d'un même groupe ne s'entendent pas trop mal. On connaît les incompatibilités suivantes:

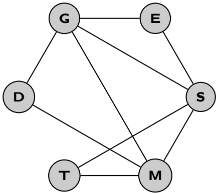
l'étudiant	A	B	C	D	E	F	G	H
ne s'entend pas avec	B,E,F,H	A,C,E,G	B,D	C,E,G	A,D,F,H	A,E,H	B,D,H	A,E,F,G

Le nombre minimal de groupes nécessaire correspond au nombre chromatique du graphe des incompatibilités.



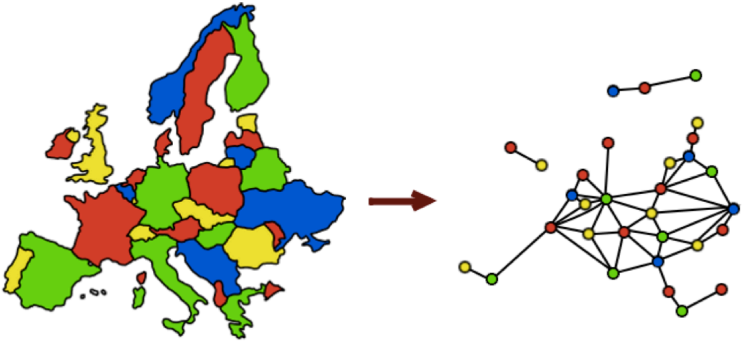
Problème d'emploi du temps

Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrable (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et master-mind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.
Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?



Coloriage de cartes

On cherche à colorier une carte de telle sorte que deux pays frontaliers soient de couleurs différentes. Pour résoudre ce problème on peut se ramener au coloriage d'un graphe planaire construit de la façon suivante: les sommet correspondent aux pays et il y a une arête entre deux sommets si les pays correspondant sont frontaliers.



Comment déterminer $\chi(G)$

- **Majoration du nombre chromatique:**

Pour majorer un nombre chromatique, il suffit de donner un coloriage valide du graphe. On en obtient un grace à l'algorithme suivant:

Donnée: Un graphe $G = (S, A)$
Resultat: Une coloration $\varphi : S \to \mathbb{N}^*$ de G

Pour $s \in S$ faire
$\varphi(s) \leftarrow$ plus petite couleur non utilisé par les voisins de s;

- **Minoration du nombre chromatique:**

Il n'y a pas de méthode générale pour obtenir une bonne minoration mais si le graphe G contient un sous-graphe complet à n sommets alors il faut au moins n couleurs pour le colorier.