Relation

Université de Toulouse

Année 2020/2021

Relations

Définition

Relation binaire

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F est définie par une partie $G_{\mathcal{R}} \subseteq E \times F$.
Si $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$, on dit que x est **en relation avec** y et l'on note $x\mathcal{R}y$.
Si $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation interne** sur E.

Exemples : Soient $A = \{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble des élèves et $B = \{Math, Info, Ang, Phys\}$ l'ensemble des cours. On peut définir les relations suivantes :

- $\mathcal{R}$ qui décrit si un étudiant suit un cours régulièrement :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, Math), (a, Phys), (b, Info), (c, Ang), (d, Ang), (e, Math), (e, Ang)\}$$

- la relation $\mathcal{S}$ décrit si un étudiant a acheté un cadeau à un autre étudiant définit par

$$G_{\mathcal{S}} = \{(b; a); (a; a); (c; a); (a; d); (d; c)\}$$

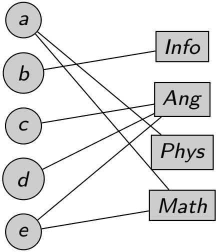
Mode de représentation

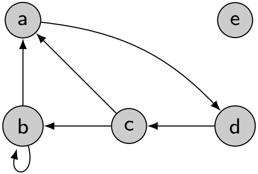
Diagramme cartésien et matrice de relation

$\mathcal{R}$	*Math*	*Phys*	*Ang*	*Info*
a	*V*	*V*		
b				*V*
c			*V*	
d			*V*	
e	*V*		*V*	

$\mathcal{S}$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a				*V*	
b	*V*	*V*			
c	*V*	*V*			
d				*V*	
e					

Diagramme sagittal





Relation fonctionnelle

Une fonction $f : E \to F$ associe a chaque élément de E au plus un élément de F. On peut alors définir la relation $\mathcal{R}_f$ définie par le graphe

$$G_{\mathcal{R}_f} = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

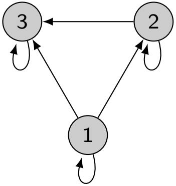
Réciproquement, pour une relation $\mathcal{R}$ telle que pour tout $x \in E$ il y a au plus un $y \in F$ vérifiant $x\mathcal{R}y$ alors on peut lui associer une fonction f telle que $f(x) = y$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation fonctionnelle**.

Relation réflexive

Réflexivité

Une relation $\mathcal{R}$ est **réflexive** si pour tout $x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$.

- Diagramme cartésien : la diagonale doit être notée.
- Diagramme sagittal : chaque sommet admet une boucle.



	1	2	3
1	V	V	V
2		V	V
3			V

Exemples : Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est réflexive. Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est réflexive, mais $<$ n'est pas réflexive.

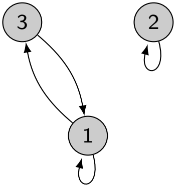
Exemples : Sur l'ensemble des mots $\mathcal{A}^*$, on considère la relation $\overset{l}{\equiv}$ définit par $u \overset{l}{\equiv} v$ si et seulement si u et v ont même longueur. Par exemple $\texttt{grand} \overset{l}{\equiv} \texttt{petit}$ et $\texttt{grand} \overset{l}{\equiv} \texttt{grand}$ mais $\texttt{grand} \overset{l}{\not\equiv} \texttt{grande}$. La relation $\overset{l}{\equiv}$ est réflexive.

Relation symétrique

Symétrie

Une relation $\mathcal{R}$ est **symétrique** si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y\mathcal{R}x$.

- Diagramme cartésien : symétrie par rapport à la diagonale.
- Diagramme sagittal : quand une flèche va de a vers b, il y a aussi une flèche de b vers a.



	1	2	3
1	V		V
2		V	
3	V		

Exemples : Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est symétrique. Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est n'est pas symétrique.

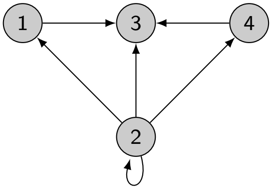
La relation $\stackrel{I}{\equiv}$ sur $\mathcal{A}^*$ est symétrique.

Relation transitive

Transitivité

Une relation $\mathcal{R}$ est **transitive** si pour tout $x, y, z \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors nécessairement on a $x\mathcal{R}z$.

- Diagramme sagittal : tout chemin qui part d'un sommet s et va à un sommet s' en suivant la direction des flèches admet un raccourci, c'est à dire un chemin de longueur un.



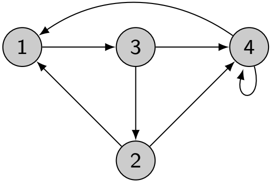
	1	2	3	4
1			V	
2	V	V	V	V
3				
4			V	

Exemples : Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est transitive. Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est transitive. La relation "est le père de" n'est pas transitive.

Relation antisymétrique

Antisymétie

Une relation $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors on a $x = y$.



	1	2	3	4
1			V	
2	V			V
3		V		V
4	V			V

Exemples : Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est antisymétrique.

La relation $\overset{l}{\equiv}$ sur $\mathcal{A}^*$ n'est pas antisymétrique.

Relations d'équivalence

Définition et exemples

Définition

Une relation binaire définie sur un unique ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples : Par définition, pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on note $x \equiv y[\mathrm{mod}\ n]$, lire x est congru à y modulo n, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$. On a défini une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ car on peut vérifier :

- **Réflexivité :** $x \equiv x[\mathrm{mod}\ n]$ car $x - x = 0.n$ et $0 \in \mathbb{Z}$.
- **Symétrie :** si $x \equiv y[\mathrm{mod}\ n]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k.n$, on a donc $y - x = -k.n$ et $-k \in \mathbb{Z}$ d'où $y \equiv x[\mathrm{mod}\ n]$.
- **Transitivité :** si $x \equiv y[\mathrm{mod}\ n]$ et $y \equiv z[\mathrm{mod}\ n]$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = k.n$ et $y - z = k'.n$. Ainsi $x - z = x - y + y - z = (k + k').n$. On en déduit que $x \equiv z[\mathrm{mod}\ n]$

Définition et exemples

Définition

Une relation binaire définie sur un unique ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples :

- Sur n'importe quel ensemble la relation $=$ est une relation d'équivalence..
- Sur l'ensemble des mot $\mathcal{A}^*$, la relation $\overset{I}{\equiv}$ est une relation d'équivalence.
- Sur l'ensemble des personnes, la relation "a le même âge que" est une relation d'équivalence. Des personnes liées appartiennent à la même tranche d'âge.
- Sur l'ensemble des triangles, la relation "a les mêmes angles que" est une relation d'équivalence. Des triangles liés par cette relation sont dits semblables.
- La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $xy > 0$ est une relation d'équivalence. Deux réels liés par cette relation ont le même signe.

Classes d'équivalence et partition

Classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. La **classe d'équivalence** d'un élément x, noté $\mathbf{Cl}(x)$, est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x. Autrement dit

$$\mathbf{Cl}(x) = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition

Une classe d'équivalence n'est jamais vide.

L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide.

Classes d'équivalence et partition

Partition

Soit E un ensemble, la famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ indexée par I est une **partition** si :

- l'union des $(A_i)_{i \in I}$ est égale à E, c'est à dire $E = \cup_{i \in I} A_i$,
- deux éléments de $(A_i)_{i \in I}$ distincts sont disjoints, c'est à dire que si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Théorème

Etant donné une relation d'équivalence sur un ensemble, les classes d'équivalences forment une partition.

Ensemble quotient

Ensemble quotient

Soit E un ensemble munit d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E. On le note $E/\mathcal{R}$.

Théorème

Etant donné une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, la fonction suivante est surjective :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E/\mathcal{R} \\ & x & \longmapsto & \mathbf{Cl}(x) \end{array}$$

Relations d'ordre

Définition

Définition

Une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, transitive et antisymétrique. Autrement dit :

$\preceq$ réflexive : on a $x \preceq x$ pour tout $x \in E$.

$\preceq$ transitive : si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $x \preceq z$.

$\preceq$ antisymétrique : si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $x = y$.

Un ordre est **total** si pour tous éléments $x, y \in E$ on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Un ordre est dit **partiel** pour souligner qu'on n'a pas forcément cette propriété.

Exemples d'ordres sur les nombres

- $\leq$ et $\geq$ sont des relations d'ordre total sur $\mathbb{N}$ qui s'étendent à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
- $<$ et $>$ ne sont pas des relations d'ordre sur $\mathbb{N}$.
- Sur $\mathbb{N}^*$ la relation a divise b, notée $a|b$, est une relation d'ordre mais n'est pas total. On rappelle que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = a\,k$.

  $\preceq$ réflexive : on a $x \preceq x$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

  $\preceq$ transitive : si x divise y (c'est à dire il existe k tel que $y = k\,x$) et y divise z (c'est à dire il existe k tel que $z = k'\,y$) alors $z = k'\,y = (k\,¿')\,x$ donc x divise z.

  $\preceq$ antisymétrique : si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $x = y$.

Exemples d'ordre ordres sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble l'inclusion, notée $\subseteq$, est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ qui n'est pas totale.

$\preceq$ réflexive : on a $A \subseteq A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.

$\preceq$ transitive : si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$.

$\preceq$ antisymétrique : si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$.

Ordres sur les mots

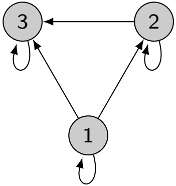
Il existe différentes notions pour ordonner l'ensemble des mots $\mathcal{A}^*$:

- La relation u est préfixe de v, notée $u \sqsubseteq_{\text{perd}} v$ et définit par $\exists w \in \mathcal{A}^*$ tel que $v = u.w$, est une relation d'ordre qui n'est pas total
- Soit $\preceq$ un ordre total sur $\mathcal{A}$ on définit l'**ordre lexicographique** sur $\mathcal{A}^*$:

$$u \leq_{lex} v \iff \begin{cases} u \text{ préfixe de } v \\ \text{ ou bien} \\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_1 \dots u_m = v_1 \dots v_m \text{ et } u_{m+1} \leq v_{m+1} \end{cases}$$

C'est une relation d'ordre total sur $\mathcal{A}^*$. Par exemple :
`a` $\leq_{lex}$ `fa`, `poule` $\leq_{lex}$ `poulet`, `avion` $\leq_{lex}$ `train`,
`livraison` $\leq_{lex}$ `livre`, `foot` $\leq_{lex}$ `fort`.

Mode de représentation



	1	2	3
1	V	V	V
2		V	V
3			V

Pour simplifier la lecture du diagramme, on supprime les boucles dues à la réflexivité et les flèches déductibles par transitivité :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

L'idée est de représenter les sommets du diagramme et tracer seulement les flèches correspondant aux successeurs immédiats. On dit que y est un successeur immédiat de x si $x \preceq y$, $x \neq y$ et il n'existe pas de z tel que $x \preceq z \preceq y$.

Fonctions croissantes et décroissantes

Definition

Soient A et B deux ensembles munis respectivement des relations d'ordre $\preceq_A$ et $\preceq_B$ et $f : A \longrightarrow B$ une application. On dit que

- f est **croissante** si $x \preceq_A y$ alors $f(x) \preceq_B f(y)$.
- f est **décroissante** si $x \preceq_A y$ alors $f(y) \preceq_B f(x)$.
- f est **strictement croissante** si $x \preceq_A y$ et $x \neq y$ alors $f(x) \preceq_B f(y)$ et $f(x) \neq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** si $x \preceq_A y$ et $x \neq y$ alors $f(y) \preceq_B f(x)$ et $f(x) \neq f(y)$.

Proposition

Une application strictement croissante ou strictement décroissante dont l'espace de départ est muni d'un ordre total est injective.

Elément minimal, borne inférieure

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

- $x \in A$ est **minimal** de A s'il n'admet pas d'élément plus petit dans A.
- $x \in E$ **minorant** de A si $\forall y \in A$ on a $x \preceq y$
- A admet au plus un seul minorant dans A (par antisymétrique), c'est **le plus petit élément** de A, s'il existe on le note $\min(A)$.
- Le plus grand des minorants est la **borne inférieure**, on la note $\inf(A)$. Autrement dit :

$$\forall y \in A \text{ on a } \inf(A) \preceq y \text{ et } \forall z \text{ minorant de } A \text{ on a } z \preceq \inf(A)$$

Elément maximal, borne supérieure

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

- $x \in A$ est **maximal** de A s'il n'admet pas d'élément plus grand dans A.
- $x \in E$ **majorant** de A si $\forall y \in A$ on a $y \preceq x$
- A admet au plus un seul majorant dans A (par antisymétrique), c'est **le plus grand élément** de A, s'il existe on le note $\max(A)$.
- Le plus petit des majorants est la **borne supérieure**, on la note $\sup(A)$. Autrement dit :

$$\forall y \in A \text{ on a } y \preceq \sup(A) \text{ et } \forall z \text{ majorant de } A \text{ on a } \sup(A) \preceq z$$

Induction

Ordre bien fondé

Définition

Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est **bien fondé** s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.

De manière équivalente, on a :

Théorème

Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide admet au moins un élément minimal.

Examples

- L'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est bien fondé mais il ne l'est pas sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$.
- L'ordre $|$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ défini par "$a|b \iff a$ divise b" est bien fondé.
- Soit $\mathcal{A}$ un alphabet contenant au moins deux lettres, $\sqsubseteq_{\mathrm{perd}}$ est bien fondé mais pas $\leq_{lex}$.

Application à la terminaison d'algorithme

Variant de boucles

Etant donné $(E, \preceq)$ un ordre bien fondé, un **variant** de boucle est une fonction de l'ensemble des états du programme dans E strictement décroissant à chaque passage dans la boucle.

Proposition

Si une boucle admet un variant alors elle termine.

Algorithme d'Euclide :

Donnée : $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
Résultat : le pgcd de x et y

$a \leftarrow x$
$b \leftarrow y$
while $b \neq 0$ **do**
    $tmp \leftarrow a$
    $a \leftarrow b$
    $b \leftarrow tmp[\mathrm{mod}\ b]$

Application à la terminaison des algorithmes récursifs

Proposition

Soit f une fonction récursive définit sur un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ bien fondé. Si f est défini sur les éléments minimaux et si pour tout $x \in E$ non minimal, le définition de $f(x)$ ne fait appel à des valeurs $f(y)$ pour $y \preceq x$ avec $x \neq y$ alors f est bien définit.

Examples :

• On considère la fonction `fact` définie par :

- $\texttt{fact}(0) = 1$;
- $\texttt{fact}(n+1) = (n+1) * \texttt{fact}(n)$.

Elle est bien définie car $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé.

• On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ par :

- $f(p) = 1$ si p premier ;
- $f(n) = f(a) + f(b)$ si $n = ab$ et $a \neq 1$ et $b \neq 1$.

Elle est bien définie car $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$ est bien fondé.

$\mathbb{N}$ et le principe de récurrence

Principe de récurrence

Soit P une propriété dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées

Initialisation : $P(0)$ est vraie,

Héridité : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a "$P(n)$ est vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ est vraie"

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ est vraie.

<u>Preuve :</u> On raisonne par l'absurde : supposons que les hypothèses du théorème sont vraies mais que la conclusion est fausse.
Soit $X = \{n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est fausse}\}$. L'ensemble X est une partie non vide de $\mathbb{N}$, comme $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé, X admet un plus petit élément noté n_0.

Comme $P(0)$ est vraie, on a $n_0 > 0$ donc $n_0 - 1$ est un entier positif ou nul, autrement dit $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. $P(n_0 - 1)$ est vraie car $n_0 - 1 \notin X$. Par hypothèse $P(n_0 - 1) \Longrightarrow P(n_0)$ donc $P(n_0)$ est vraie ce qui est contradictoire avec le fait que $n_0 \in X$.

Principe de récurrence généralisé

Soit P une propriété dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées

Initialisation : $P(0)$ est vraie,

Héridité : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\text{"}P(k) \text{ est vraie pour } k < n \Longrightarrow P(n) \text{ est vraie"}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Preuve :
On applique le principe de récurrence du théorème précédent à la propriété Q tel que pour $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie si $P(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$.

Principe d'induction

Soit P une propriété dépendante d'un élément x de E muni d'un ordre bien fondé $\preceq$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

Initialisation : $P(x)$ est vraie pour tout éléments minimaux de E,

Hérédité : Si pour tout $x \in E$ qui n'est pas minimal on a :

$$P(y) \text{ est vraie } \forall y \preceq x \text{ avec } y \neq x \Longrightarrow P(x) \text{ est vraie}$$

Alors pour tout $x \in E$, la propriété $P(x)$ est vraie.

<u>Preuve :</u> On raisonne par l'absurde.
Soit $X = \{x \in E, P(x) \text{ est fausse}\}$. L'ensemble X est une partie non vide de E, comme $(E, \preceq)$ est bien fondé, X admet un plus petit élément noté x_0.

Comme P est vraie pour tout élément minimal de E, l'élément x_0 n'est pas minimal. Pour tout $y \in E$ tel que $y \preceq x_0$ et $y \neq x_0$, la propriété $P(y)$ est vraie car x_0 minimal dans X et donc $y \notin X$. Par hypothèse d'hérédité $P(x_0)$ est vraie ce qui est contradictoire avec le fait que $x_0 \in X$.

Définition inductive

Définition inductive d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une définition inductive d'un sous-ensemble X de E consiste à la donnée :

- d'un sous-ensemble B de E appelé **base**,
- d'un ensemble K d'opérations $\varphi : E^{r_\varphi} \longrightarrow E$ où r_φ est l'arité de φ.

L'ensemble X est alors défini comme le plus petit (pour l'inclusion) ensemble vérifiant les assertions suivantes :

Base : $B \subseteq X$,

Induction : pour tout $\varphi \in K$ et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_{r_\varphi} \in X$ on a $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{r_\varphi}) \in X$.

On dit que X est la **fermeture inductive de** B **par** K.

Quelques ensembles définis inductivement :

- L'ensemble des entiers naturels est défini par :

Base : $B = \{0\}$,

Induction : $\begin{array}{rccc} \mathrm{succ} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array}$.

- L'ensemble des entiers pairs est défini par :

Base : $B = \{0\}$,

Induction : $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n+2 \end{array}$.

- L'ensemble des entiers impairs est défini par :

Base : $B = \{1\}$,

Induction : $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n+2 \end{array}$.

- L'ensemble des mots binaires est défini par :

Base : $B = \{\varepsilon\}$,

Induction : $\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ & u & \longmapsto & 0u \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ & u & \longmapsto & 1u \end{array}$.

Preuve pour des ensembles définis par induction

Preuve par induction

Soit $X \subseteq E$ la fermeture inductive de B par K. Soit P une propriété définie sur X. Pour montrer que pour tout $x \in X$ la propriété $P(x)$ est vraie, il suffit de montrer que :

Base : Pour tout $x \in B$, on a $P(x)$ vraie.

Induction Pour tout $\varphi \in K$ d'arité r_φ et tous $x_1, x_2, \dots, x_{r_\varphi}$ alors on a

$$P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{r_\varphi}) \text{ vraies } \Longrightarrow P(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{r_\varphi})) \text{ vraie}$$

Exemple de preuve par induction

On considère l'ensemble des mots de Dyck $\Delta \subseteq \{0,1\}^*$ défini par :

- Base : $B = \{\varepsilon\}$,
- Induction : $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ (u,v) & \longmapsto & 0u1v \end{array}$.

On veut montrer par induction que tout mot $w \in \Delta$ vérifie la propriété $P(w)$: "w a autant de 0 que de 1 et tout préfixe de w a plus de 0 que de 1".

- Base : ε vérifie la propriété demandée,
- Induction : Soient $u, v \in \Delta$ tels que $P(u)$ et $P(v)$ soient vérifiées. On note $w = \psi(u,v) = 0u1v$. Comme u et v ont autant de 0 et de 1, il en est de même pour w. Soit t un préfixe de w. Il y a deux cas :
  - Si $|t| \leq 1 + |u|$ alors t est un préfixe de $0u$. Il s'écrit $t = 0t'$ où t' est un préfixe de u. Comme les préfixes de u ont plus de 0 que de 1, on en déduit que t a plus de 0 que de 1.
  - Si $|t| > 1 + |u|$ alors t s'écrit $t = 0u1t'$ où t' est un préfixe de v. Comme les préfixes de v ont plus de 0 que de 1, on en déduit que t a plus de 0 que de 1.