Fonctions et Applications

Université de Toulouse

Année 2020/2021

Notion de fonction

Fonction

Une **fonction** $f : E \longrightarrow F$ (de E dans F) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note y=f(x).

Exemple 1 :
Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.
On définit la fonction f par le graphe :

$$G_f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

Autrement dit

$$\begin{array}{llcl} f & : E & \longrightarrow & F \\ & 1 & \longmapsto & a \\ & 2 & \longmapsto & c \\ & 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

Exemple 2 :
$H = \{(1, a), (2, c), (4, a), (1, b)\} \subset E \times F$ n'est pas le graphe d'une fonction

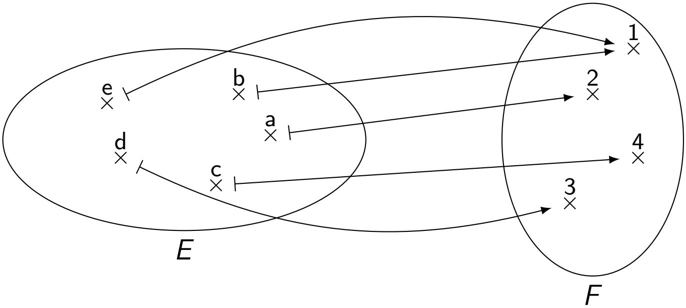
Comment définir une fonction

- Table de valeur

Dec	Bin	Hex	Char	Dec	Bin	Hex	Char	Dec	Bin	Hex	Char	Dec	Bin	Hex	Char
0	0000 0000	00	[NUL]	32	0010 0000	20	space	64	0100 0000	40	@	96	0110 0000	60	`
1	0000 0001	01	[SOH]	33	0010 0001	21	!	65	0100 0001	41	A	97	0110 0001	61	a
2	0000 0010	02	[STX]	34	0010 0010	22	"	66	0100 0010	42	B	98	0110 0010	62	b
3	0000 0011	03	[ETX]	35	0010 0011	23	#	67	0100 0011	43	C	99	0110 0011	63	c
4	0000 0100	04	[EOT]	36	0010 0100	24	$	68	0100 0100	44	D	100	0110 0100	64	d
5	0000 0101	05	[ENQ]	37	0010 0101	25	%	69	0100 0101	45	E	101	0110 0101	65	e
6	0000 0110	06	[ACK]	38	0010 0110	26	&	70	0100 0110	46	F	102	0110 0110	66	f
7	0000 0111	07	[BEL]	39	0010 0111	27	'	71	0100 0111	47	G	103	0110 0111	67	g
8	0000 1000	08	[BS]	40	0010 1000	28	(	72	0100 1000	48	H	104	0110 1000	68	h
9	0000 1001	09	[TAB]	41	0010 1001	29	)	73	0100 1001	49	I	105	0110 1001	69	i
10	0000 1010	0A	[LF]	42	0010 1010	2A	*	74	0100 1010	4A	J	106	0110 1010	6A	j
11	0000 1011	0B	[VT]	43	0010 1011	2B	+	75	0100 1011	4B	K	107	0110 1011	6B	k
12	0000 1100	0C	[FF]	44	0010 1100	2C	,	76	0100 1100	4C	L	108	0110 1100	6C	l
13	0000 1101	0D	[CR]	45	0010 1101	2D	-	77	0100 1101	4D	M	109	0110 1101	6D	m
14	0000 1110	0E	[SO]	46	0010 1110	2E	.	78	0100 1110	4E	N	110	0110 1110	6E	n
15	0000 1111	0F	[SI]	47	0010 1111	2F	/	79	0100 1111	4F	O	111	0110 1111	6F	o
16	0001 0000	10	[DLE]	48	0011 0000	30	0	80	0101 0000	50	P	112	0111 0000	70	p
17	0001 0001	11	[DC1]	49	0011 0001	31	1	81	0101 0001	51	Q	113	0111 0001	71	q
18	0001 0010	12	[DC2]	50	0011 0010	32	2	82	0101 0010	52	R	114	0111 0010	72	r
19	0001 0011	13	[DC3]	51	0011 0011	33	3	83	0101 0011	53	S	115	0111 0011	73	s
20	0001 0100	14	[DC4]	52	0011 0100	34	4	84	0101 0100	54	T	116	0111 0100	74	t
21	0001 0101	15	[NAK]	53	0011 0101	35	5	85	0101 0101	55	U	117	0111 0101	75	u
22	0001 0110	16	[SYN]	54	0011 0110	36	6	86	0101 0110	56	V	118	0111 0110	76	v
23	0001 0111	17	[ETB]	55	0011 0111	37	7	87	0101 0111	57	W	119	0111 0111	77	w
24	0001 1000	18	[CAN]	56	0011 1000	38	8	88	0101 1000	58	X	120	0111 1000	78	x
25	0001 1001	19	[EM]	57	0011 1001	39	9	89	0101 1001	59	Y	121	0111 1001	79	y
26	0001 1010	1A	[SUB]	58	0011 1010	3A	:	90	0101 1010	5A	Z	122	0111 1010	7A	z
27	0001 1011	1B	[ESC]	59	0011 1011	3B	;	91	0101 1011	5B	[	123	0111 1011	7B	{
28	0001 1100	1C	[FS]	60	0011 1100	3C	<	92	0101 1100	5C	\	124	0111 1100	7C	|
29	0001 1101	1D	[GS]	61	0011 1101	3D	=	93	0101 1101	5D	]	125	0111 1101	7D	}
30	0001 1110	1E	[RS]	62	0011 1110	3E	>	94	0101 1110	5E	^	126	0111 1110	7E	~
31	0001 1111	1F	[US]	63	0011 1111	3F	?	95	0101 1111	5F	_	127	0111 1111	7F	[DEL]

Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn



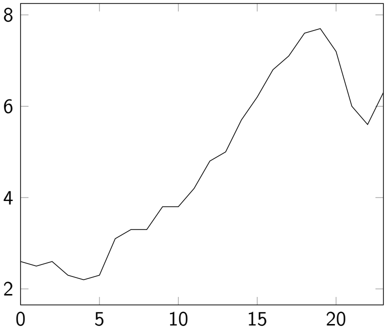
Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe



Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

Ensemble image

Ensemble image

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction de E dans F.

Image : $f(x)$ est l'**image** de x

Ensemble image de $A \subset E$:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in A \text{ vérifiant } f(x) = y\} \\ &= \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in A \text{ vérifiant } (x, y) \in G_f\} \end{aligned}$$

Ensemble image de f :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F : \ \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ définit par $G_f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$. On a :

$$f(\{1\}) = \{a\} \qquad f(\{1, 4\}) = \{a\} \qquad f(\{3\}) = \emptyset \qquad f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{a, c\}$$

Ensemble image

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction de E dans F.

Antécédent : x est l'**antécedent** de y si $y = f(x)$

Préimage de $B \subset F$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E \text{ tel que } \exists y \in B \text{ vérifiant } f(x) = y\} \\ &= \{x \in E \text{ tel que } \exists y \in B \text{ vérifiant } (x, y) \in G_f\} \end{aligned}$$

Domaine de définition de f :

$$\mathrm{Dom}(f) = f^{-1}(F) = \{x \in E : \ \exists y \in F \text{ tel que } f(x) = y\}$$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ définit par $G_f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$. On a :

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 4\} \qquad f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 4\} \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \qquad f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2, 4\}$$

Application

Une fonction $f : E \to F$ est une application si $\mathrm{Dom}(f) = E$.

Exemple :

• Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.
Le graphe $G = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de E dans F mais pas une application.

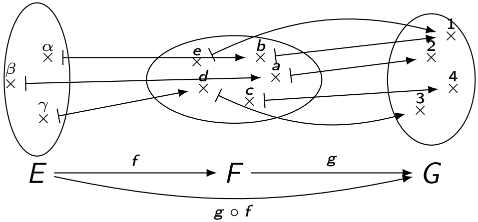
• Soit $E' = \{1, 2, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.
Le graphe $G = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E' \times F$ définit une fonction de E' dans F qui est une application de E' dans F.

Composition

Composition

La **fonction composée** de $f : E \to F$ par $g : F \to G$ est définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$
$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$



Propriétés

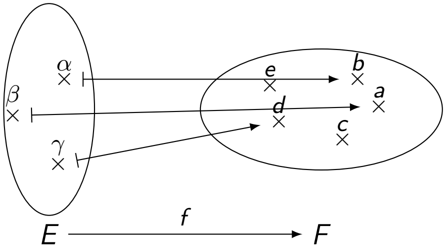
- En général $f \circ g \neq g \circ f$.
- Associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Injections

Fonction injective

$f : E \to F$ est **injective** si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent.

Autrement dit : $\forall x_1, x_2 \in E$ on a $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

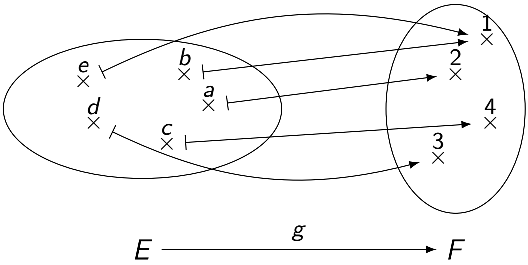


Exemple : Code ASCII, Code INSEE...

Fonction surjective

$f : E \to F$ est **surjective** si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent.

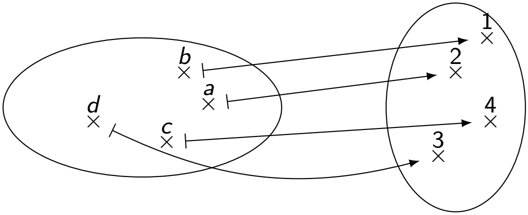
Autrement dit : $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$.



Application bijective

$f : E \to F$ est une application **bijective** si tout $y \in F$ admet exactement un antécédent.

Autrement dit : f est une application injective et surjective.



$$E \xrightarrow{g} F$$

Bijections

Application réciproque

L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Si f est bijective, l'application g est unique, c'est l'**application réciproque** de l'application f, notée f^{-1}.

Composée de deux bijections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. La composée $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Suites

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble, une **suite à valeurs dans** $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Etant donnée une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on note souvent u_n le $n^{\text{ème}}$ élément de la suite et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fonctions caractéristiques

Fonctions caractéristiques

Soient $A \subseteq \Omega$ on définit la **fonction caractéristique** de l'ensemble A par

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour tout $x \in \Omega$, on a :

- $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x)$
- $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$
- $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$