Introduction à la notion d'ensembles

Université de Toulouse

Année 2020/2021

Introduction à la notion d'ensembles

Premières notions

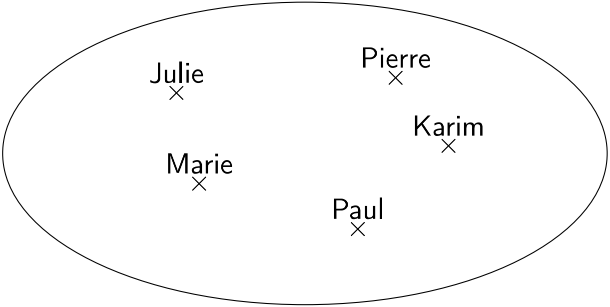
Notion d'ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets deux à deux distincts appelés **éléments**. On peut définir un ensemble de deux manières :

- en **extension** : on donne la liste des éléments ;
- en **compréhension** : on donne une propriété commune vérifiée par les éléments de l'ensemble.

Exemples

- Ensembles d'élèves :
  - {Pierre ; Paul ;Marie ;Julie ;Karim}



Exemples

- Ensembles d'élèves :
  - {Pierre ; Paul ;Marie ;Julie ;Karim}
  - {élèves de la classe qui ont les yeux bleus}
  - {élèves qui viennent en cours en pyjama} (certainement vide !)

Exemples

- Ensembles d'élèves :
  - {Pierre ; Paul ;Marie ;Julie ;Karim}
  - {élèves de la classe qui ont les yeux bleus}
  - {élèves qui viennent en cours en pyjama} (certainement vide !)
- Ensembles classiques de nombres :
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels ;
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers ;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \text{ avec } q \neq 0\}$;
  - $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;

Exemples

- Ensembles d'élèves :
  - {Pierre ; Paul ;Marie ;Julie ;Karim}
  - {élèves de la classe qui ont les yeux bleus}
  - {élèves qui viennent en cours en pyjama} (certainement vide !)
- Ensembles classiques de nombres :
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels ;
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers ;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \text{ avec } q \neq 0\}$;
  - $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;
- Dans les langages de programmation, comme Python, certaines variables soient déclarées avec un certain **type de données** :
  - `bool` s'interprète comme l'ensemble $\{Vrai, Faux\}$,
  - `int` s'interprète comme l'ensemble des entiers
  - `float` s'interprète comme l'ensemble des nombres à virgule flottante
  - `str` s'interprète comme l'ensemble des chaînes de caractères
  - `list` s'interprète comme l'ensemble des listes.

Principales règles de fonctionnement

Sans rentrer dans l'axiomatique, la notion d'ensemble satisfait un certain nombre de règles de fonctionnement :

Relation d'appartenance On note $x \in A$ si l'élément x est dans A.

Objets distincts On peut distinguer deux éléments entre eux et un ensemble ne peut pas contenir deux fois le même objet.

Ensemble vide Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément, c'est l'ensemble vide noté $\emptyset$.

Paradoxe de Russell Un ensemble peut être élément d'un autre ensemble mais pas de lui même.

Inclusion

L'ensemble A est un **sous-ensemble** de B si tous les éléments de A sont des éléments de B, autrement dit

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

On le note $A \subseteq B$ (A **inclus** dans B).

Exemple :

$$\{0,1,2\} \subseteq \{0,1,2,3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Remarque :

$$A = B \text{ si et seulement si } A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A$$

Ensemble des parties

Soit A un ensemble, l'**ensemble des parties de** A noté $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des sous-ensembles de A.

Remarque :

On a toujours

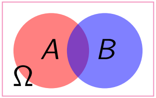
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ car $\emptyset \subseteq A$,
- $A \in \mathcal{P}(A)$ car $A \subseteq A$.

Exemple :

Si $A = \{1, 2, 3\}$ alors

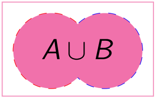
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Union et intersection



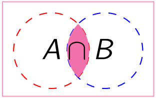
Union

$A \cup B =$ {éléments de A ou de B}



Intersection

$A \cap B =$ {éléments de A et de B}



Propriétés

Idempotence : $A \cup A = A$

Commutativité : $A \cup B = B \cup A$

Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Elément neutre : $A \cup \emptyset = A$

Propriétés

Idempotence : $A \cap A = A$

Commutativité : $A \cap B = B \cap A$

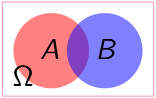
Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Elément neutre : $A \cap \Omega = A$

Distributivité

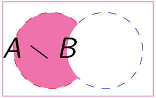
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Différences et complémentaire



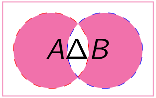
Différence

$A \setminus B = \{\text{éléments dans } A \text{ mais pas dans } B\}$



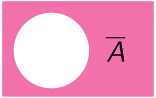
Différence symétrique

$$A \Delta B = \{\text{éléments dans } A \cup B \text{ mais pas dans } A \cap B\}$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Complémentaire

$\overline{A} = \Omega \setminus A$



Propriétés

Involution : $\overline{\overline{A}} = A$

Loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Produit cartésien

Produit cartésien

$A \times B = \{(a, b) \text{ où } a \in A \text{ et } b \in B\}$.
$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \text{ où } a_i \in A_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, k\}\}$.

Exemple :

Pour le système de codage informatique des couleurs RGB, (de l'anglais "Red, Green, Blue") une couleur est un élément de

$$[0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255] = [0, 255]^3$$

- deux couleurs qui ont le même triplet sont égale ;
- on peut définir des ensembles de couleur :

$$\{\text{couleur à dominante verte}\} = \left\{(r, g, b) : g \geq \frac{4}{5}(r + b)\right\}$$

Notions de langages

Exemples de problèmes

Langage naturel L'ensemble des mots forme un dictionnaire qui s'arrangent suivant des règles grammaticales pour former des phrases.

Stockage informatique de l'information par une succession de bits

Algorithme du texte Recherche de chaîne de caractères dans un texte...

Compilation Un programme est une suite de caractère qui doit être analysé par le compilateur.

Bio-informatique L'ADN code l'information génétique.

Un peu de vocabulaire

Alphabet Ensemble fini (par exemple : $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ est l'alphabet binaire, $\mathcal{A} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ un alphabet à 26 lettres.)

Mot Suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$ on le note $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ et n est la longueur du mot u, notée $|u|$.

Mot vide Le mot vide est noté ε.
On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des mots sans le mot vide.

Concaténation $w = u.v$ est le mot de longueur $|u| + |v|$ tel que

$$w = u_1 u_2 \ldots u_{|u|} v_1 v_2 \ldots v_{|v|}$$

Puissance on définit par récurrence u^n par

$$u^0 = \varepsilon \text{ et } u^{n+1} = u.u^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

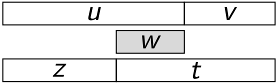
Préfixe v préfixe de u s'il existe un mot w tel que $u = v.w$

Suffixe v suffixe de u s'il existe un mot w tel que $u = w.v$

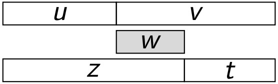
Lemme de Levy

Soient $u, v, z, t \in \mathcal{A}^*$ tels que $u.v = z.t$. Alors il existe $w \in \mathcal{A}^*$ tel que :

- ou bien $u = z.w$ et $t = w.v$ si $|u| \geq |z|$,
- ou bien $z = u.w$ et $v = w.t$ si $|u| \leq |z|$.



ou bien



Corollaire : simplification à droite

Soient u, v, z et $t \in \mathcal{A}^*$.
Si $u.v = u.t$ alors $v = t$.
De même si $u.v = z.v$ alors $u = z$.

Langage

Un **langage** $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ est un ensemble de mots sur $\mathcal{A}$. Autrement dit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*$.

Exemples : Exemples de langages sur $\mathbb{B} = \{0, 1\}$:

- $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$;
- $\mathbb{B}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$;
- $\mathbb{B}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$;
- $\{0^n : n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{0^n 1^m : n, m \in \mathbb{N}\}$;
- $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{0^p : p \in \mathbb{N} \text{ nombre premier}\}$;
- $\{u \in \mathbb{B}^* : u \text{ est le codage en binaire d'un nombre premier}\}$;
- $\{u \in \mathbb{B}^* : u \text{ est un palindrome}\}$;
- $\{u \in \mathbb{B}^* \text{ code html certifié}\} \neq \{u \in \mathbb{B}^* \text{ code html interprété par Firefox}\}$;
- $\{u \in \mathbb{B}^* : u \text{ codage en MP3 de votre chanson préférée}\}$;
- $\{u \in \mathbb{B}^* : u \text{ codage d'un programme qui s'arête sur l'entrée vide}\}$ ...

Opérations sur les langages

- **Union** : $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$
- **Intersection** : $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$
- **Compémentaire** : $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{L}$
- **Concaténation** : $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{u_1.u_2 : u_1 \in \mathcal{L}_1 \text{ et } u_2 \in \mathcal{L}_2\}$
- **Puissance** : Par récurrence la puissance $n^{\text{ème}}$ de $\mathcal{L}$, est définie par

$$\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\} \text{ et } \mathcal{L}^{n+1} = \mathcal{L}.\mathcal{L}^n$$

Attention, en général

$$\mathcal{L}^n = \{u \in \mathcal{A}^* : \exists u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathcal{L} \text{ tel que } u = u_1.u_2.\cdots.u_n\} \neq \{u^n : n \in \mathbb{N}, u \in \mathcal{L}\}$$

- **Fermeture de Kleene** :

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^+ = \bigcup_{n > 0} \mathcal{L}^n$$