
Techniques de dénombrement

1 Définition du cardinal

Définition 1 (Ensemble fini). Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Dans l'exercice suivant on montre qu'un tel nombre est toujours unique que l'on appelle le **cardinal** de E .

Exercice 1. Soient n et k deux entiers naturels et E un ensemble fini.

1. Montrer qu'il existe une application injective de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ si et seulement si $n \leq k$. Pour le sens direct, on pourra faire une récurrence sur n .
2. Montrer qu'il existe une application surjective de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ si et seulement si $n \geq k$.
3. Montrer qu'il existe une application bijective de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ si et seulement si $n = k$.
4. En déduire que si $f : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et $g : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ sont des bijections alors $n = k$.

2 Principe de bijection

Théorème 1 (*Principe de bijection*)

S'il existe une bijection de E dans F , alors $|E| = |F|$.

Démonstration : Soit $f : F \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ et $g : E \rightarrow F$ deux bijections. Alors $f \circ g : E \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ est une bijection. Par unicité du cardinal, on en déduit que $|E| = |F|$. ■

Ce principe simple est très utile ! Il donne lieu aux preuves bijectives, une technique que nous allons utiliser à plusieurs reprises dans la suite.

Exercice 2 - Parties paires et impaires. Soient E un ensemble fini non vide et a un élément fixé de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $f \circ f(A) = A$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si $\text{Card}(A)$ est pair alors $\text{Card}(f(A))$ est impair. Montrer que si $\text{Card}(A)$ est impair alors $\text{Card}(f(A))$ est pair.
4. En déduire que l'ensemble E a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
5. On suppose que $\text{Card}(E) = n$. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E ? En déduire le cardinal de l'ensemble suivant :

$$P = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } \text{Card}(A) \text{ est pair}\} \quad \text{et} \quad I = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } \text{Card}(A) \text{ est impair}\}.$$

3 Principe des tiroirs

Théorème 2 (Principe des tiroirs)

Soient E et F deux ensembles finis. Il existe une injection de E dans F si et seulement si $|E| \leq |F|$.

En particulier, pour une fonction $f : E \rightarrow F$, si $|E| > |F|$ alors il existe au moins un élément $y \in F$ tel que $f^{-1}(y) \geq 2$.

Démonstration : On considère $g : E \rightarrow \{1, \dots, |E|\}$ et $h : F \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ les deux bijections qui permettent de définir le cardinal de E et F .

Soit $f : E \rightarrow F$ une injection. La fonction $h \circ f \circ g^{-1} : \{1, \dots, |E|\} \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ est injective. Par l'exercice 1, $|E| \leq |F|$.

Réciproquement, si $|E| \leq |F|$ il existe une injection $k : \{1, \dots, |E|\} \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ alors $f^{-1} \circ k \circ g : E \rightarrow F$ est injective. ■

Le principe des tiroirs dit que si n chaussettes sont rangées dans k tiroirs et si $n > k$, au moins un des tiroirs contient au moins deux chaussettes. On utilisera en fait souvent la forme suivante du principe des tiroirs (dont la preuve est similaire) :

Théorème 3 (Principe des tiroirs généralisés)

Soient E et F deux ensembles et $k \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $|E| > k|F|$. Alors pour toute applications $f : E \rightarrow F$ il existe $y \in F$ tel que $|f^{-1}(\{y\})| \geq k + 1$.

Exercice 3. Prouver le principe des tiroirs généralisés.

Exercice 4. Soient 9 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon $1/2$ qui contient au moins 3 de ces 9 points.

Exercice 5. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$, n entiers positifs ou nuls. Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble de l'ensemble de ces nombres dont la somme des éléments est divisible par n .

Exercice 6 - Théorème de Dirichlet, 1842. Montrer que pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on peut trouver une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$ telle que $1 \leq q \leq n$ et $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$. Si on note $\{y\}$ la partie fractionnaire de x , on pourra regarder la suite $(\{kx\})_k \in \mathbb{N}$.

4 Principe d'addition et principe d'inclusion exclusion

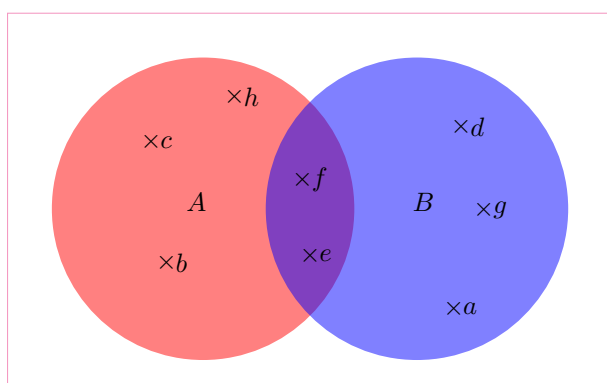
Proposition 4 (Principe d'addition)

Si E et F sont des ensembles finis disjoints ($E \cap F = \emptyset$) alors $|E \cup F| = |E| + |F|$.

Corollaire 5 (Principe d'inclusion exclusion)

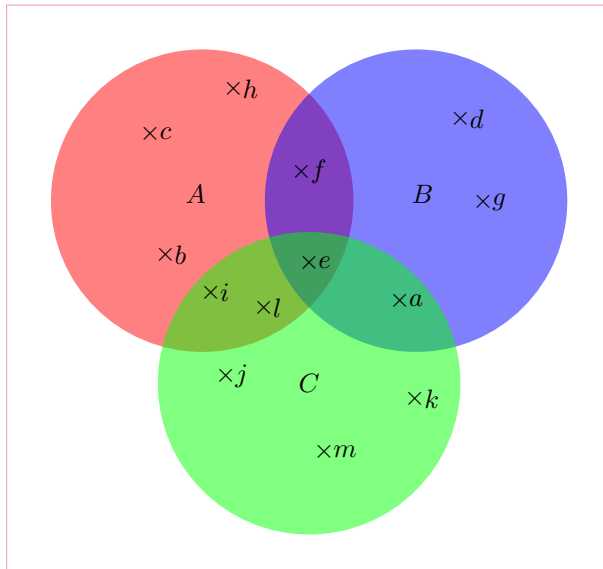
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$

Pour montrer ce corollaire, le principe est simple : on compte les éléments de E , ceux de F et on enlève ceux de l'intersection (pour ne pas les compter deux fois). Le principe se généralise au cas de trois ensembles : on compte les éléments de E , ceux de F et ceux de G puis on enlève ceux qu'on a comptés deux fois mais il faut alors rajouter ceux qu'on avait initialement compter trois fois (i.e. ceux qui sont dans les trois ensembles).



Lorsqu'on fait l'opération $\text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, les éléments e et f sont comptés deux fois.

Pour compter le nombre d'éléments dans $A \cup B$, on doit donc retrancher $\text{Card}(A \cap B)$ à $\text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.



Lorsqu'on fait l'opération $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)$, les éléments a, f, i et l sont comptés deux fois et l'élément e est compté trois fois.

Lorsqu'on fait l'opération $\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(C \cap A)$, les éléments a, f, i et l sont comptés une fois et l'élément e est compté trois fois.

Ainsi dans l'expression

$$(\text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)) - (\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(C \cap A))$$

l'élément e n'est pas comptabilisé, il faut donc rajouter à cet somme la quantité $\text{Card}(A \cap B \cap C)$ pour obtenir $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.

Théorème 6

Il existe une formule générale pour une union finie d'ensembles $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec } \text{Card}(I)=i} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|$$

- Exercice 7.**
1. Montrer la proposition 4 en construisant une bijection de $E \cup F$ vers $\{1, \dots, |E| + |F|\}$.
 2. Montrer le corollaire 5 en décomposant $E \cup F$ en ensembles disjoints.
 3. Trouver une formule pour $E \cup F \cup G$ où E, F et G sont trois ensembles finis.
 4. Montrer la formule générale du théorème 6 par récurrence.

- Exercice 8.**
1. Soit $N, d \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'entiers (strictement positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d ?
 2. Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, on enlève tous les multiples de 2, 3, 5 et 7. Quel est le cardinal de l'ensemble ainsi obtenu?
 3. (Indicatrice d'Euler) Pour un entier positif k , on note $\varphi(k)$ le nombre d'entiers n vérifiant $1 \leq n \leq k$ tel que $\text{pgcd}(n, k) = 1$. Montrer que si n admet $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}$ comme décomposition en facteurs premiers, alors

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$$

On pourra considérer les ensembles $A_i = \{x \in \mathbb{N}^*; x \leq n \text{ et } p_i \text{ divise } x\}$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$.

Exercice 9. Un dérangement d'un ensemble X est une permutation des éléments de X sans point fixe, c'est à dire $f : X \rightarrow X$ est bijective et $f(x) \neq x$ pour tout $x \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements de $X_n = \{1, \dots, n\}$. On pose $d(0) = 1$.

1. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que

$$d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

On considèrera les ensembles $A_i = \{f \text{ permutation de } X_n \text{ tel que } f(i) = i\}$.

2. Montrer que $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

5 Principe des bergers

On va formaliser le principe des bergers qui informellement dit : Pour compter les moutons il suffit de compter les pattes et diviser par 4. Malgré sa simplicité, il s'agit d'un principe très utile, et que nous allons exploiter

Proposition 7

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. Alors

$$|E| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})|$$

Démonstration : Les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ recouvrent E (i.e. $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$) et sont deux à deux disjoints (i.e. $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ si $y \neq z$). On en déduit l'égalité par le principe d'addition. ■

Corollaire 8

Si $f : E \rightarrow F$ est surjective, alors $|F| \geq |E|$.

Démonstration : Si $f : E \rightarrow F$ est surjective, alors $|f^{-1}(\{y\})| \geq 1$ pour tout $y \in F$. On en déduit que

$$|E| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})| \geq \sum_{y \in F} 1 = |F|. \quad \blacksquare$$

Corollaire 9 *Principe des bergers*

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. S'il existe p tel que $|f^{-1}(\{y\})| = p$ pour tout $y \in F$, alors $|E| = p|F|$.

6 Principe de multiplication

Proposition 10 *Principe de multiplication*

Soient E et F deux ensembles finis alors $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

Démonstration : Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : E \times F &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto F \end{aligned}$$

Alors $|f^{-1}(y)| = |E|$ pour tout $y \in F$. Du principe des bergers, on en déduit que $|E \times F| = |E| \cdot |F|$. ■

Corollaire 11

Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis, alors $|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \dots \cdot |E_n|$.

Corollaire 12

Soit E un ensemble fini, lors $|E^n| = |E|^n$.

7 Combinaisons et arrangements

Exercice 10. Soient $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ deux ensembles finis.

1. Quel est le cardinal de Y^X l'ensemble des fonctions de X dans Y ?
2. En construisant une bijection de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$, en déduire le cardinal de l'ensemble des parties de X noté $\mathcal{P}(X)$.
3. Donner le nombre d'injection de X dans Y . On note A_n^k ce nombre.
4. Donner le nombre de bijection de X dans Y .
5. Donner le cardinal de l'ensemble des parties de cardinal k de Y noté $\mathcal{P}_k(Y)$. On note C_n^k ce nombre.

Exercice 11. Une urne contient n boules distinctes et on veut sélectionner k boules. Pour faire cette sélection, il faut déterminer les deux choses suivantes :

- Est ce que le tirage est fait avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée ?
- Est ce qu'on tient compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées ?

Il y a donc quatre manières différentes de faire le tirage. Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

Tirages de p éléments parmi n	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise		
Avec remise		

Exercice 12. Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 13. Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 14. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
3. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
4. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
5. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
 - (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
 - (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 15. 1. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Donner toutes les applications injectives de A vers B .

2. Trouver une formule qui compte le nombre d'applications injectives d'un ensemble à k éléments vers un ensemble à n éléments, en justifiant votre réponse.
3. En déduire le nombre d'applications injectives d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 10 éléments.

Exercice 16. Soient $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ deux ensembles finis. On suppose que X et Y sont ordonnées de telle sorte que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ et $y_1 < y_2 < \dots < y_n$.

1. Donner le nombre de fonctions strictement croissantes de X dans Y .
2. Donner le nombre de fonctions croissantes de X dans Y .
3. Donner le nombre de surjections de X dans Y .

Exercice 17. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

1. Montrer qu'il y a autant de façons de tirer p éléments parmi n dans le désordre et sans remise que de tirer $n - p$ éléments parmi n dans le désordre et sans remise. En déduire que

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

2. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de façons de tirer $p + 1$ éléments parmi $n + 1$, montrer que

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

3. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de sous-ensemble d'un ensemble à n éléments, montrer que

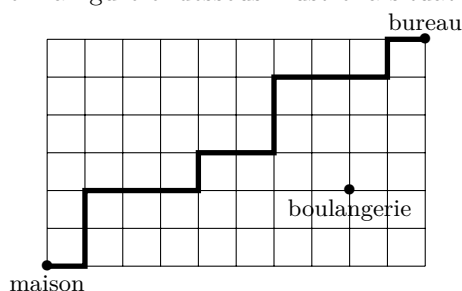
$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

4. Montrer que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

5. Retrouver ces formules par le calcul.

Exercice 18. Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à 10 pâtés de maison à l'est et 6 pâtés de maisons au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de 16 pâtés de maison (il ne se dirige ni vers le sud, ni vers l'ouest). On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles de ce schéma rectangulaire. La figure ci-dessous illustre la situation.



1. Proposer un codage permettant de décrire le trajet représenté.
2. Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
3. En supposant qu'il choisit son trajet de manière équiprobable, quelle est la probabilité qu'il puisse acheter un croissant ?

Exercice 19. 1. On considère le quadrillage du plan dont $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des sommets. Quel est le nombre de plus courts chemins du sommet $(0, 0)$ au sommet (p, q) (Figure 1) ?

2. A l'aide de la figure 2, en déduire

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$$

3. A l'aide de la figure 3, montrer que

$$C_{p+q}^p = \sum_{k=0}^q C_{p+k-1}^k = \sum_{k=0}^p C_{q+k-1}^k$$

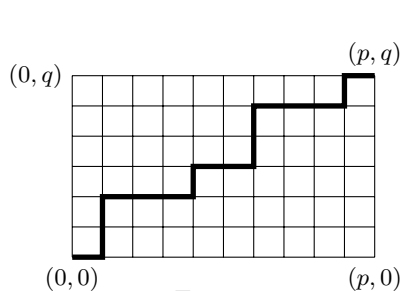


Figure 1

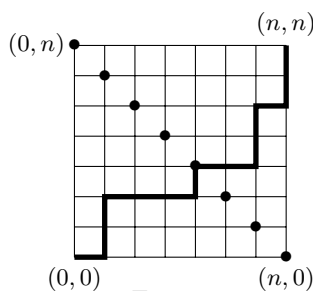


Figure 2

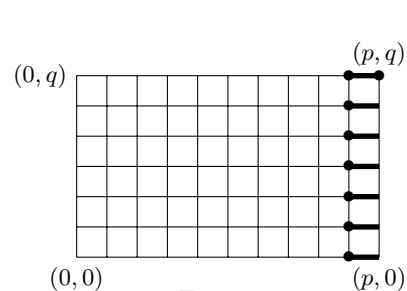


Figure 3

Techniques de dénombrement (Solutions)

Correction 1 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n : pour tout $k \in \mathbb{N}$, s'il existe une application injective de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ alors $n \leq k$.

Clairement cette propriété est vraie pour P_1 car il n'y a pas d'application d'un ensemble non vide dans un ensemble vide.

Supposons que P_n est vérifiée et montrons que P_{n+1} est aussi vérifiée. Soit $f : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ une injection. Pour tout $x \in \{1, \dots, n\}$, on a $f(x) \neq f(n+1)$ car f est une injection. On a deux cas possibles :

- Si $f(x) < f(n+1)$ pour tout $x \in \{1, \dots, n\}$ alors $f(x) \in \{1, \dots, k-1\}$ car $f(x) \leq f(n+1) - 1 \leq k-1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $n \leq k-1$ et donc $n+1 \leq k$.
- Sinon, on considère $x_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f(x_0) > f(x)$ pour tout $x \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{x_0\}$. On définit la fonction $g : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{x_0, n+1\}$, $g(x_0) = f(n+1)$ et $g(n+1) = f(x_0)$. Comme f est une injection, les éléments de $\{1, \dots, n+1\}$ n'ont pas deux images identiques par g donc g est injective. De plus $g(x) < g(n+1)$ pour tout $x \in \{1, \dots, n\}$, en réalisant le même raisonnement que le point précédent, on en déduit que $n+1 \leq k$.

Par récurrence la propriété P_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre le premier point du lemme.

2. Le deuxième point se montre de la même manière.
3. Si $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ est bijective, elle est injective d'où $n \leq k$, et elle est surjective d'où $n \geq k$. On en déduit que $n = k$.
4. Soit $f : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et $g : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ deux bijections. alors $f \circ g^{-1}$ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$. D'après la question précédente on a $n = k$.

Correction 2 1. (1 point) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ on a deux cas :

- si $a \in A$, on a $f(A) = A \setminus \{a\}$ donc $f \circ f(A) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$;
 - si $a \notin A$, on a $f(A) = A \cup \{a\}$ donc $f \circ f(A) = (A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A$.
- Dans tout les cas, on a $f \circ f(A) = A$.

2. (1 point) Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(A) = f(B)$, on a $A = f \circ f(A) = f \circ f(B) = B$ donc f est injective.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A = f \circ f(A) = f(f(A))$. Donc $f(A)$ est un antécédent de A par f . On en déduit que f est surjective. Ainsi f est bijective car injective et surjective.

Remarque : On peut aussi dire directement que comme $f \circ f = \text{Id}$, la fonction f est bijective et admet f comme fonction réciproque.

3. (1 point) Pour construire $f(A)$ on ajoute ou on enlève un élément à A . On en déduit que $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A) - 1$ ou $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A) + 1$. Ainsi, si $\text{Card}(A)$ est pair alors $\text{Card}(f(A))$ est impair et si $\text{Card}(A)$ est impair alors $\text{Card}(f(A))$ est pair.
4. (0,5 point) Le fonction f réalise une bijection entre les parties paires et les parties impaires. On en déduit qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
5. (1 point) Si $\text{Card}(E) = n$ alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Comme il y a autant de partie paire que de partie impaire, on en déduit que $\text{Card}(P) = \text{Card}(I) = 2^{n-1}$.

Correction 4 Par application du principe des tiroirs, cela découle du fait que $9 > 4 \times 2$ où 4 est le nombre de demi-disques qui recouvrent le carré (chacun ayant pour diamètre un côté du carré).

Correction 5 Comme 0 est un multiple de n , on peut supposer que les a_i sont non nuls (le résultat étant évident dans le cas contraire). Considérons les nombres b_i définis par $b_1 = a_1$ et $b_{i+1} = b_i + a_{i+1}$ pour i allant de 1 à $n-1$ (on a donc $b_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$). Comme tous les a_i sont strictement positifs, les b_i sont tous distincts. Si l'un de ces nombres est divisible par n , on a trouvé ce que l'on cherchait. Si aucun n'est divisible par n , on considère alors les restes $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-1}}$ de ces nombres modulo n . Comme on a n nombres et qu'ils ne peuvent prendre que $n-1$ valeurs (de 1 à $n-1$), il existe (principe des tiroirs) $i < j$ tels que $b_j - b_i$ soit divisible par n . Mais cela signifie que n divise $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$.

Correction 6 On considère les $n + 1$ nombres de l'intervalle $[0, 1]$:

$$0, \{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \dots \{(n-1)x\}, \dots \{(n)x\}$$

Par le principe des tiroirs, il existe deux nombres dans un des n intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Donc il existe k, k' tel que $\{kx\}$ et $\{k'x\}$ soient dans le même intervalle, on peut supposer $k > k'$. On en déduit qu'il existe des entiers j, j' tels que $\{kx\} = kx - j$ et $\{k'x\} = k'x - j'$ sont dans le même intervalle. Ainsi $|kx - j - (k'x - j')| = |(k - k')x - (j - j')| < \frac{1}{n}$. En prenant $p = j - j'$ et $q = k - k'$, on obtient le résultat voulu.

Correction 7 1. Soient $f : E \rightarrow \{1, \dots, |E|\}$ et $g : F \rightarrow \{1, \dots, |F|\}$ deux fonctions qui définissent les cardinaux de E et F . Comme $E \cap F = \emptyset$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} h : E \cup F &\longrightarrow \{1, \dots, |E| + |F|\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ |E| + g(x) & \text{si } x \in F \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $x, y \in E \cup F$ tels que $h(x) = h(y)$. Si $h(x) = h(y) \leq n$ alors $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$ donc $x = y$ par injectivité de f . Si $h(x) = h(y) \geq n + 1$ alors $h(x) = g(x) + |E| = h(y) = g(y) + |E|$ donc $x = y$ par injectivité de g . La fonction h est donc injective.

Soit $n \in \{1, \dots, |E| + |F|\}$. Si $n \leq |E|$ alors il existe x tel que $f(x) = n$, on a alors $h(x) = n$. Si $n \geq |E|$ alors il existe x tel que $g(x) = n - |E|$, on a alors $h(x) = n$. On en déduit que h est surjective.

Ainsi h est bijective, on en déduit que $|E \cup F| = |E| + |F|$.

2. Soit $E' = E \setminus (E \cap F)$. On a $E = E' \cup (E \cap F)$ et $E' \cap (E \cap F) = \emptyset$ ainsi $|E| = |E'| + |E \cap F|$.

On a $F \cap E' = \emptyset$ donc

$$|E \cup F| = |E' \cup F| = |E'| + |F| = |E| - |E \cap F| + |F|.$$

3. On a

$$\begin{aligned} |E \cup F \cup G| &= |E| + |F \cup G| - |E \cap (F \cup G)| \\ &= |E| + |F| + |G| - |F \cap G| - |(E \cap F) \cup (E \cap G)| \\ &= |E| + |F| + |G| - |F \cap G| - (|E \cap F| + |E \cap G|) - |(E \cap F) \cap (E \cap G)| \\ &= |E| + |F| + |G| - |F \cap G| - |E \cap F| - |E \cap G| + |E \cap F \cap G| \end{aligned}$$

4. Nous allons montrer la formule par récurrence. La formule est vrai pour $n = 2$ ou 3 . Supposons que la

formule soit vraie au rang $n \geq 2$ et considérons $n + 1$ ensembles $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\
 &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right| \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{n+1} \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{n+1} \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n+1\} \text{ avec Card}(I)=i \text{ et } n+1 \notin I} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
 &\quad + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i \text{ et } n+1 \in I} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{n+1} \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n+1\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|
 \end{aligned}$$

Correction 8 1. Le nombre d'entiers (positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d est $\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$.

2. On note $A_i = \{x \in \mathbb{N}^*; x \leq 1000 \text{ et } i \text{ divise } x\}$. On cherche à calculer

$$\left| \{1, 2, 3, \dots, 1000\} \setminus \bigcup_{i \in \{2, 3, 5, 7\}} A_i \right|$$

3. On considère les ensembles $A_i = \{x \in \mathbb{N}^*; x \leq n \text{ et } p_i \text{ divise } x\}$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$. On a

$$\begin{aligned}
 n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i,j, i \neq j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i,j,k, i \neq j, j \neq k, i \neq k} \frac{n}{p_i p_j p_k} \dots + (-1)^q \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_q} \\
 &= n - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\} \text{ avec Card}(I)=i} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
 &= n - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\
 &= \varphi(n)
 \end{aligned}$$

Correction 10 1. Se donner une application $f : X \rightarrow Y$ équivaut à se donner k valeurs $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ et il y a n choix possibles pour chacune de ces valeurs ; il y a donc n^k choix possibles. Ainsi $X^Y = |Y|^{|X|} = n^k$.

2. Pour toute partie A de X , on définit la fonction caractéristique $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}^X$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. L'application

$$\begin{array}{ccc}
 \phi : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \{0, 1\}^X \\
 & A & \longmapsto \chi_A
 \end{array}$$

est une bijection, en effet :

— **Injectivité** : Soient $A, B \subset X$. Si $\chi_A = \chi_B$, alors $A = B$ car $x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$.

— **Surjectivité** : Soit $\varphi \in \{0, 1\}^X$, un antécédent par l'application est l'ensemble $\{x \in X : \varphi(x) = 1\}$. Comme ϕ est injective, on en déduit que $|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^{|X|}$.

3. Si $f : X \rightarrow Y$ est injective, les k éléments $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ de Y sont deux à deux distincts. Cela implique que $|Y| \geq |X| = k$. Ainsi si $k = |X| > |Y| = n$ alors il n'y a pas d'injection de X dans Y , on a $INJ(X, Y) = \emptyset$.

Se donner $f : X \rightarrow Y$ injective équivaut à se donner k valeurs $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ deux à deux distinctes. Il y a n choix possible pour x_1 , puis $n-1$ choix possibles pour x_2 . Un fois choisis $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i)$, il rest $n-i$ choix possibles pour $f(x_{i+1})$. Ainsi en faisant ce raisonnement jusqu'à $f(x_k)$ on obtient qu'il existe $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ choix possibles.

Le nombre d'injection est donc

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Si $k \neq n$ on a $BIJ(X, Y) = \emptyset$.

Si $k = n$, toute injection est une bijection, il y a donc $n!$ bijections possible.

5. Considérons l'application qui à toute fonction injective associe une partie de Y à k éléments suivante :

$$\begin{array}{ccc} G : INJ(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(Y) \\ f & \longmapsto & \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\} \end{array}$$

On considère la relation d'équivalence $\sim$ par $f \sim f'$ si et seulement si $G(f) = G(f')$. Ainsi $\mathcal{P}_k(X)$ est en bijection avec $INJ(X, Y)/\sim$.

On note que

$$G(f) = G(f') \Leftrightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\} = \{f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_k)\} \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathcal{S}_k \text{ tel que } f'(x_i) = f(x_{\sigma(i)})$$

où $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des permutation des k premier entiers. Ainsi pour $f \in INJ(X, Y)$ sa classe d'équivalence est $\{f \circ \sigma : \sigma \in \mathcal{S}_k\}$ et contient donc $k!$ éléments.

On en déduit que pour un ensemble $A \in \mathcal{P}_k(Y)$, on peut construire une application f de la façon suivante : on ordonne les éléments de A , à x_1 on associe le premier, à x_2 on associe le second... De plus on a :

$$G^{-1}(A) = \{g \in INJ(X, Y) : \text{Im}(f) = \text{Im}(g)\} = \{f \circ \sigma : \sigma \in BIJ(X, X)\}.$$

Comme pour $\sigma, \sigma' \in BIJ(X, X)$ tel que $\sigma \neq \sigma'$ on a $f \circ \sigma \neq f \circ \sigma'$, on en déduit que

$$|G^{-1}(A)| = |BIJ(X, X)| = k!$$

Par le principe des bergers, on a :

$$|INJ(X, Y)| = k! \times |\mathcal{P}_k(Y)|$$

Ainsi

$$C_n^k |\mathcal{P}_k(Y)| = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Correction 11 En dénombrement on se ramène à un des cas suivants :

1. Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

2. On peut de manière équivalente s'intéresser au rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

Correction 15 1. Il y a six applications injectives de $A = \{1, 2\}$ vers $B = \{1, 2, 3\}$, qui sont :

$$\begin{array}{ccc}
 A \rightarrow B & A \rightarrow B & A \rightarrow B \\
 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 2 \\
 2 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \rightarrow B & A \rightarrow B & A \rightarrow B \\
 1 \mapsto 2 & 1 \mapsto 3 & 1 \mapsto 3 \\
 2 \mapsto 1 & 2 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2
 \end{array}$$

2. Se donner une application injective d'un ensemble à k éléments vers un ensemble à n éléments revient à choisir un k -uplet ordonné d'éléments parmi n : il y a n choix pour le premier, $n-1$ pour le second, etc ..., jusqu'à $n-k+1$ choix pour le k ème. On en déduit que le nombre cherché est donné par la formule :

$$n.(n-1).\dots.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 10 éléments est donc $\frac{10!}{(10-8)!} = \frac{1}{2}10!$ (qui est un grand nombre, il n'est pas forcément utile de vouloir le calculer exactement !).

Correction 16 1. une fonction strictement croissante est déterminée par son image car 1 est envoyé sur le plus petit élément, 2 sur le deuxième plus petit... Il faut donc choisir p éléments parmi n sans remise et sans répétition, il y a donc $\binom{n}{p}$ fonctions croissantes

2. Les fonctions croissantes sont en bijection avec les fonctions strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ vers $\{1, \dots, n+p\}$, elles sont au nombre de $\binom{n+p-1}{p}$. La bijection est donnée par $\varphi \mapsto (\tilde{\varphi} : k \mapsto \varphi(k) + k)$ (la bijection inverse est $\tilde{\psi} : k \mapsto \psi(k) - k$).

3. On note s le nombre de surjection de X de cardinal p dans Y de cardinal n et pour $y \in Y$ on note A_y l'ensemble des application qui évite y , on a donc

$$s = n^p - \text{Card} \left(\bigcup_y A_y \right)$$

et par la formule de l'union, on a

$$\text{Card} \left(\bigcup_y A_y \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{Z \subset Y, |Z|=k} \text{Card}(A_Z)$$

où A_Z est l'ensemble des application qui évite Z . Ainsi

$$\text{Card} \left(\bigcup_y A_y \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{Z \subset Y, |Z|=k} (n-k)^p = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k (n-k)^p$$

On trouve donc

$$s = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^p$$

Correction 17 1. Le nombre de façons de tirer p éléments parmi n dans le désordre et sans remise est C_n^p . En fait lorsqu'on a choisi les p éléments, il en reste $n - p$ donc cela revient aussi à choisir $n - p$ élément parmi n dans le désordre et sans remise. Ainsi $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Formellement, cela revient à considérer la bijection suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n-p}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ A & \longmapsto & \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A \end{array}$$

2. Le nombre de façons de tirer $p + 1$ éléments parmi $n + 1$ dans le désordre et sans remise est C_n^p . Une autre façon de faire est soit on choisi le premier élément, il reste p éléments à choisir parmi n , c'est à dire C_n^p , soit on ne le choisit pas et il reste $p + 1$ éléments à choisir parmi n . On a donc

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

Formellement, cela revient à considérer la bijection suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) & \longrightarrow & \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) \cup \mathcal{P}_{p+1}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ A & \longmapsto & \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A \end{array}$$

3. On a

$$\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

Le nombre de partie d'un ensemble à n éléments est 2^n . Comme les ensembles de l'union sont disjoint deux à deux, c'est aussi la somme des parties à 0 éléments, des parties à 1 éléments, des parties à 2 éléments..., des parties à n éléments. On a donc

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

4. Lorsqu'on développe $(x + y)^n = (x + y) \dots (x + y)$ on obtient la somme de 2^n termes de la forme $x^k y^{n-k}$ qui résulte du choix de x ou y dans chaque facteur. Pour k allant de 0 à n on obtient $x^k y^{n-k}$ si on choisi x dans k facteurs de $x + y$. Il y en a C_n^k . On en déduit que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

5. On a

$$(a) \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

(b) On a

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{n!(n+1)}{((n+1)-(p+1))!} = C_{n+1}^{p+1}$$

(c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est aussi vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $n + 1$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^{k-1} = 2 \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^{n+1}$$

$$\text{car } C_n^{-1} = 0 = C_n^{n+1}.$$

(d) Il faut faire un raisonnement par récurrence

Correction 19 1. Pour aller du sommet $(0,0)$ au sommet (p,q) on doit faire p déplacements horizontaux et q déplacements verticaux. Parmi les $p+q$ déplacements à réaliser il faut donc choisir les positions des p déplacements horizontaux. Il y a C_{p+q}^p possibilités.

2. Pour aller du sommet $(0,0)$ au sommet (n,n) il y a C_{2n}^n possibilités. Un chemin de $(0,0)$ à (n,n) passe par un sommet $(k,n-k)$ pour un $k \in \{0,1,\dots,n\}$ et il ne peut passer que par un seul sommet de ce type. Ainsi le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) est la somme pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ du nombre de chemins de $(0,0)$ à $(k,n-k)$, c'est à dire C_n^k , multiplié par le nombre de chemins de $(k,n-k)$ à (n,n) , c'est à dire $C_n^{n-k} = C_n^k$. On en déduit

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$$

3. Un chemin du sommet $(0,0)$ au sommet (p,q) passe par un sommet $(p-1,k)$ avec $k \in \{0,1,\dots,q\}$ juste avant le dernier déplacement horizontal. Ainsi le nombre de chemins de $(0,0)$ à (p,q) est la somme pour $k \in \{0,1,\dots,q\}$ du nombre de chemins de $(0,0)$ à $(p-1,k)$, c'est à dire C_{p+k-1}^k . Ainsi, on a

$$C_{p+q}^p = \sum_{k=0}^q C_{p+k-1}^k$$

De manière équivalente on a l'égalité avec $\sum_{k=0}^p C_{q+k-1}^k$.