Université Paul Sabatier Année 2025-2026
TD Math-Base **feuille n°** 3.2

Fonctions II : Dérivabilité

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Définition

Définition 1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction f est **dérivable en** x_0, si le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de f en x_0 et noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \longrightarrow f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

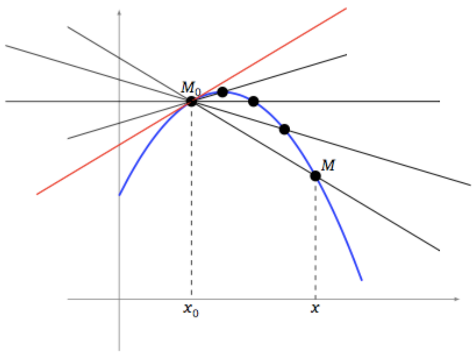
Exercice 1.
1. Calculer la dérivée des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ pour $x > 0$ et que sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais qu'elle n'est pas dérivable pour $x = 0$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser l'identité remarquable $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 2. Montrer que si f est une fonction paire et dérivable, alors f' est impaire.

1.2 Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x, f(x))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$. A la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$



Exercice 3. Calculer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x_0 = 2$. Calculer x_1 afin que la tangente T_1 au point d'abscisse x_1 soit parallèle à (T_0).

1.3 Définition équivalente

Proposition 1

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si et seulement si une des assertion suivante est vérifiée :

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *existe et est finie.*
- *il existe $l \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ qui vérifie*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + (x - x_0)\epsilon(x)$$

Proposition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ne fonction. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0.

Exercice 4.
1. En reformulant la définition de différentes manière, montrer la proposition **??**.
2. Montrer la proposition **??** en utilisant le deuxième point de la proposition **??**.
3. Est ce que la réciproque de la proposition **??** est vraie ?

2 Calcul des dérivées

Proposition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. On a

$$(f + g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \times g)' = f'g + fg'$$

Et si g ne s'annule pas on a

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Il faut connaitre les dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Proposition 4

Si f est dérivable en x et g dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Démonstration : Faisons l'hypothèse que $f(x) \neq f(x_0)$ pour x proche de x_0 avec $x \neq x_0$. On a alors

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g'(f(x_0))f'(x_0) \qquad \blacksquare$$

Une conséquence de ce théorème est que pour une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable (éventuellement non nulle ou positive pour que la composé soit définie), on a le tableau suivant

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)$	$u'(1+\tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$

Corollaire 5

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow J = f(I)$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \longrightarrow I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration : On pose $g = f^{-1}$, pour tout $x \in J$ on a $f \circ g(x) = x$. En dérivant, on obtient $g'(x)f'(g(x)) = 1$ d'ou la formule attendue. ■

3 Applications

3.1 Extremum local

Définition 2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on ait $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que f admet un **extremum local** en x_0 si f admet un maximum ou un minimum en x_0.

Théorème 6

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum ou un minimum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Remarque 1. Quelques remarques sur le théorème :

1. Cela signifie que la tangente au niveau d'un extremum local est horizontale.
2. La réciproque du théorème est fausse, par exemple pour $f : x \longmapsto x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum locale en 0.
3. Il est important que l'intervalle I soit **ouvert**. Pour le cas fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$ admet un maximum local mais sa dérivée est égale à 1. Ainsi pour trouver le maximum d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, il faut comparer les valeurs de f au points où la dérivée s'annule et aussi en a et b.

Démonstration : Supposons que f soit un maximum local en x_0 et soit J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leq f(x_0)$. On a alors :

— Si $x \in I \cap J$ et $x < x_0$, on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Par passage à la limite lorsque $x \to x_0$, on obtient que $f'(x_0) \geq 0$.

— Si $x \in I \cap J$ et $x > x_0$, on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Par passage à la limite lorsque $x \to x_0$, on obtient que $f'(x_0) \leq 0$. ■

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 7 ***(Théorème de Rolle)***

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

— f *est continue sur* $[a,b]$,
— f *est dérivable sur* $]a,b[$,
— $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Remarque 2. Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration : Tout d'abord, si f est constante sur $[a,b]$ alors n'importe quel $c \in]a,b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$ et $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$. ■

3.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 8

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Remarque 3. Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration : Posons $l = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - l(x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$. De plus g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$ ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Corollaire 9

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0 \iff f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0 \iff f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ *est constante ;*
4. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \implies f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \implies f$ *est strictement décroissante.*

Démonstration : Prouvons la première équivalence :

$\Longrightarrow$ Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a,b[$ avec $x \leq y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Mais $f'(c) \geq 0$ et $x - y \leq 0$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$. Cela implique que $f(x) \leq f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a,b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. A la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geq 0$. ■

Exercice 5. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$ et en déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.

Langage mathématique (Solutions)