**Université Paul Sabatier** Année 2023-2024
TD Math-Base **feuille n°** 1

# Langage mathématique

## 1 Un peu de logique

### 1.1 Assertions

Une **assertion** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

*Exemple* 1.
- "Il pleut."
- "2+2=4"
- "2+2=5"
- "Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$".

Si $P$ et $Q$ sont deux assertions, nous allons définir de nouvelles assertions à partir de $P$ et $Q$ :

**L'opérateur logique "et" :** L'assertion "$P$ et $Q$" est vraie si $P$ est vraie et $Q$ est vraie. L'assertion "$P$ et $Q$" est fausse sinon.

**L'opérateur logique "ou" :** L'assertion "$P$ ou $Q$" est vraie si l'une (au moins) des deux assertions $P$ ou $Q$ est vraie. L'assertion "$P$ ou $Q$" est fausse si les deux assertions $P$ et $Q$ sont fausses.

**L'opérateur logique "non" :** L'assertion "non $P$" est vraie si $P$ est fausse, et fausse si $P$ est vraie.

On resume ceci dans les tables de vérités suivantes :

| P \ Q | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | V |

P et Q

| P \ Q | V | F |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |

P ou Q

| P | V | F |
|---|---|---|
| non P | F | V |

non P

A partir de ces opérateurs logiques on peut définir

**L'implication :** L'assertion "$P$ implique $Q$", notée "$P \Longrightarrow Q$", correspond à l'assertion "(non $P$) ou $Q$".

**L'équivalence :** L'assertion "$P$ équivaut $Q$", notée "$P \Longleftrightarrow Q$", correspond à l'assertion "$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$".

| P \ Q | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | V | V |

P$\Longrightarrow$ Q

| P \ Q | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | V |

P$\Longleftrightarrow$Q

**Exercice 1.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
- "$0 \leq x \leq 25 \Longrightarrow \sqrt{5}$"
- "$x \in ]-\infty, -4[ \Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$"
- "$\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$"
- "$2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$"
- "$x.y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$"
- $P \Longleftrightarrow$ (non $P$) où $P$ est une assertion quelconque.

**Proposition 1**

*Soient $P, Q, R$ trois assertions, les équivalences suivantes sont toujours vérifiées.*

1. $P \Longleftrightarrow$ *non(non(*$P$*))*
2. $(P$ *et* $Q) \Longleftrightarrow (Q$ *et* $P)$
3. $(P$ *ou* $Q) \Longleftrightarrow (Q$ *ou* $P)$
4. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow ($*non*$(Q) \Longrightarrow$ *non*$(P))$
5. *non*$(P$ *et* $Q) \Longleftrightarrow ($*non* $P)$ *ou* $($*non* $Q))$
6. *non*$(P$ *ou* $Q) \Longleftrightarrow ($*non* $P)$ *et* $($*non* $Q))$
7. $(P$ *et* $(Q$ *ou* $R)) \Longleftrightarrow (P$ *et* $Q)$ *ou* $(P$ *et* $R)$
8. $(P$ *ou* $(Q$ *et* $R)) \Longleftrightarrow (P$ *ou* $Q)$ *et* $(P$ *ou* $R)$

**Exercice 2.** Montrer les assertions précédentes.

## 1.2 Quantificateurs

Une assertion $P$ peut dépendre d'un paramètre $x$, par exemple "$x^2 \geq 1$", l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de $x$. On peut définit des quantificateur universel et existentiel :

**Quantificateur $\forall$, "pour tout" :** L'assertion "$\forall x \in E, P(x)$" est vraie si les assertion $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments de $E$.

**Quantificateur $\exists$, "il existe" :** L'assertion "$\exists x \in E, P(x)$" est vraie si l'on peut trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie.

**Exercice 3.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. "$\exists x \in \mathbb{R},\ (x(x-1)) < 0$" ;
2. "$\forall x \in \mathbb{R},\ (x(x-1)) < 0$" ;
3. "$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 - n > n$" ;
4. "$\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2 = -1)$" ;
5. "$\forall x \in [1, +\infty[,\ (x^2 \geq 1)$" ;
6. "$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)n$ est divisible par 2".

**Proposition 2**

$$\begin{array}{rcl} non(\forall x \in E,\ P(x)) & \iff & (\exists x \in E,\ non(P(x))) \\ non(\exists x \in E,\ P(x)) & \iff & (\forall x \in E,\ non(P(x))) \end{array}$$

**Exercice 4.** Ecrire la négation des assertions suivante :

1. "$\forall x \in [1, +\infty[,\ (x^2 \geq 1)$" ;
2. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 \in \mathbb{Z}$" ;
3. "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+,\ (x + y > 10)$" ;
4. "$P \Longrightarrow Q$" ;
5. "$(P$ et $(Q$ ou $R))$".

**Quelques remarques importantes :**

— L'ordre des quantificateurs est important. Les deux assertions suivantes sont différentes, la première est vraie et la seconde est fausse :

$$\text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ (x + y > 0)\text{"} \qquad\qquad \text{"}\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ (x + y > 0)\text{"}$$

— Quant on écrit "$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$", cela signifie qu'il existe un réel pour lequel $f$ s'annule, rien ne dit qu'il est unique. Afin de préciser que $f$ s'annule en unique point, on écrit "$\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

— Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le "pour tout" en "il existe" et inversement, puis on prend la négation de l'assertion $P$. Pour la négation d'une proposition, il faut être précis : la négation de l'inégalité stricte "$<$" est l'inégalité large "$\geq$", et inversement.

# 2 Notion d'ensembles

## 2.1 Construction par extension et compréhension

Intuitivement, un **ensemble** est une collection d'objets deux à deux distincts appelés **éléments**. On peut définir un ensemble de deux manières :

— en **extension** : on donne la liste exhaustive des éléments qui y figurent ;
— en **compréhension** : on donne les propriétés que doivent posséder les éléments de l'ensemble.

*Exemple* 2. Voilà quelques exemples d'ensembles d'élèves :

— {Pierre ; Paul ; Marie}, on donne les trois éléments qui définissent l'ensemble ;
— {élèves de la classe qui ont les yeux bleus} ;
— {élèves qui viennent en cours en pyjama}, mais cet ensemble est certainement vide !

*Exemple* 3. Dans votre scolarité vous avez rencontré certains ensembles classiques de nombres :

— $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels ;
— $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels non nul ;
— $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers ;
— $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \text{ avec } q \neq 0\}$ ;
— $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;
— $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

*Exemple* 4. Les langages de programmation actuels exigent que certaines variables soient déclarées avec un certain type de données. Un type de données est un ensemble d'objets associés à une liste d'opérations standards effectuées sur ces objets. Définir le type d'une variable équivaut à déclarer l'ensemble des valeurs possibles et autorisées pour cette variable.

Dans la sémantique de Python vous avez dû rencontrer :

— le type `bool` s'interprète comme l'ensemble $\{Vrai, Faux\}$,
— le type `int` s'interprète comme l'ensemble des entiers
— le type `float` s'interprète comme l'ensemble des nombres à virgule flottante
— le type `str` s'interprète comme l'ensemble des chaînes de caractères
— le type `list` s'interprète comme l'ensemble des listes de longueur variable.

**Exercice 5 - Ensembles définis par extension et compréhension.**

1. Définir les ensembles suivants en extension :
   (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 24\}$ ;
   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z} : 6x^2 + x - 1 = 0\}$ (indice : $6x^2 + x - 1 = (3x - 1)(2x + 1)$) ;
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 + x - 1 = 0\}$.
2. Définir les ensembles suivants compréhension :
   (a) $D = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; \ldots\}$ ;
   (b) $E = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots\}$.

## 2.2 Principales règles de fonctionnement

On admettra l'existence d'ensembles. Sans rentrer dans l'axiomatique, la notion d'ensemble satisfait un certain nombre de règles de fonctionnement, en voici les principales :

**Relation d'appartenance** Il faut pouvoir dire si un objet est dans l'ensemble. On note $x \in A$ l'élément $x$ est dans l'ensemble $A$.

**Objets distincts** On peut distinguer deux éléments entre eux et un ensemble ne peut pas contenir deux fois le même objet.

**Ensemble vide** Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément, c'est l'ensemble vide et on le note $\emptyset$ ou $\{\}$.

**Paradoxe de Russell** Un ensemble peut être élément d'un autre ensemble mais pas de lui même.

*Remarque* 1. Cette dernière règle peut ne pas sembler naturelle. A la naissance de la théorie des ensembles, les mathématiciens ne voyaient pas d'objection à envisager un ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles : l'ensemble des ensembles. Russell leur opposa le paradoxe suivant :

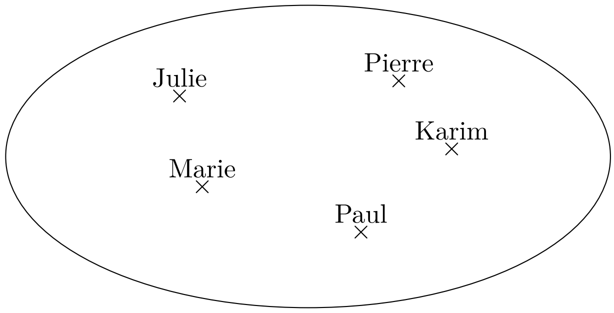
Supposons que l'ensemble de tous les ensembles existe, et notons-le $E$. On considère l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin x\}$ . Comme $E$ contient tous les ensembles, $A$ appartient à $E$. Est-ce que $A$ appartient à $A$ ?

— si $A \in A$ alors par définition de $A$, on a $A \notin A$,
— si $A \notin A$ alors par définition de $A$, on a $A \in A$.

## 2.3 Représentation

On peut représenter les ensembles à l'aide d'un diagramme de Venn, ce sont les fameux diagrammes "patates".

*Exemple* 5. L'ensembe {Pierre ; Paul ; Marie ; Julie ; Karim} se représente par :




# 3 Sous-ensembles

## 3.1 Inclusion

**Définition 1** (Sous-ensembles)**.** L'ensemble $A$ est un **sous-ensemble** de $B$ si tous les éléments de $A$ sont des éléments de $B$ (autrement dit $x \in A \Longrightarrow x \in B$). On dit aussi que $A$ est **inclus** dans $B$, on le note $A \subset B$.

*Remarque* 2. Pour tout ensemble $A$ on a $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.

*Exemple* 6. On a $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.
Bien sûr on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

**Définition 2** (Egalité d'ensembles)**.** Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si ils ont les mêmes éléments, autrement dit si $A \subset B$ et $B \subset A$.

**Exercice 6 - Égalité entre ensembles.** Montrez que les ensembles suivants sont égaux

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 4x + 6\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(t + 2, t^2 + 2)\imath\mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

**Exercice 7 - Égalité entre deux ensembles.** Montrez que les ensembles suivants sont égaux

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

## 3.2 Ensemble des parties

**Définition 3** (Ensemble des parties)**.** Soit $A$ un ensemble, l'**ensemble des parties de** $A$, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble des sous-ensembles de $A$.

On remarque que l'on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ car $\emptyset \subset A$ et $A \in \mathcal{P}(A)$ car $A \subset A$.

*Exemple* 7. Si $A = \{1, 2, 3\}$ alors $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ sont des sous ensemble de $A$. Ainsi

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}.$$

On remarque que l'ensemble $A$ a 3 éléments et $\mathcal{P}(A)$ a $8 = 2^3$ éléments. On montrera plus tard que si $E$ est un ensemble fini à $n$ éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini à $2^n$ éléments.

*Remarque* 3. Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un singleton. Il faut bien distinguer le nombre 3 du singleton $\{3\}$. Ces deux objets n'ont pas la même nature. Le premier est un nombre, le second est un ensemble de nombres, c'est un objet du même type que $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 8\}$, $\{2, 5, 7, 9\}$...

*Remarque* 4. On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. La notation $\emptyset$ décrit un ensemble qui ne contient rien alors que $\{\emptyset\}$ décrit un ensemble contenant un élément, l'ensemble vide. Un tiroir contenant un sac vide ($\{\emptyset\}$) n'est pas vide et contient bien un objet.

**Exercice 8 - Ensemble des parties.** 1. Quel est le nombre d'éléments de $\{\}$ ? Et de $\{\{\}\}$ ?
2. Quel ensemble contient plus d'éléments : $\{1,2,3,4\}$ ou $\{\{1,2\},\{3\}\}$ ?
3. Est-ce que $\{\} \in \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ ? Et $\{\} \subseteq \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ ?
4. On rappelle que $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des parties de l'ensemble $A$. Si $A = \{\alpha\}$, déterminer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
5. Est-ce qu'il existe un ensemble $A$ tel que $\mathcal{P}(A) = \{\}$ ?
6. Soit $a \in A$. Est-ce que le suivant est toujours vrai / toujours faux / ni l'un ni l'autre (dans ce cas, donnez des exemples et contre-exemples) :

$$a \in \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A) \quad , \quad a \subseteq \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

**Exercice 9.** Montrer que si $A \subset B$ alors $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

# 4 Opérations sur les ensembles

On présente ici des opérations sur les ensembles qui permettent de construire de nouveaux ensembles.

## 4.1 Union et Intersection

**Définition 4** (Union)**.** L'**union** des ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui sont éléments de $A$ ou de $B$. On le note $A \cup B$.

**Proposition 3** ***Propriétés de la réunion***

*La réunion admet certaines propriétés :*

**Idempotence :** $A \cup A = A$

**Commutativité :** $A \cup B = B \cup A$

**Associativité :** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

**Elément neutre :** $A \cup \emptyset = A$

**Définition 5** (Intersection)**.** L'**intersection** des ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments communs à $A$ et à $B$. On le note $A \cap B$.

On dit que deux ensembles sont **disjoints** (ou **incompatibles**) si $A \cap B = \emptyset$.

**Proposition 4** ***Propriétés de l'intersection***

*L'intersection admet certaines propriétés :*

**Idempotence :** $A \cap A = A$

**Commutativité :** $A \cap B = B \cap A$

**Associativité :** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**Elément neutre :** *si l'on se place dans un ensemble $\Omega$ appelé univers et que $A$ est un sous-ensemble de $\Omega$ alors $A \cap \Omega = A$*

**Proposition 5** ***Propriétés de distributivité***

*On a les distributivités suivantes entre l'union et l'intersection :*

**de $\cup$ sur $\cap$ :** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**de $\cap$ sur $\cup$ :** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Démonstration :** Nous allons montré par double inclusion que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ :

Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$). Si $x \in B$ et $x \in C$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in A \cup B$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in A$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$. On en déduit que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Montrons que $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ :

Récipoquement, si $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, on distingue deux cas :

— Si $x \in A$, alors $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$ ou et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.
— Sinon, $x \notin A$. Mais alors, puisque $x \in A \cup B$, on a $x \in B$. De même, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in C$. Ceci prouve que $x \in B \cap C$ et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.

On en déduit que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ■

**Exercice 10 - Union et intersection.** Dans chacun des cas suivants, donner faire l'union et l'intersection des ensembles $A$ et $B$ suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ est impair}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ est divisible par } 3\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 1\}$.
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < 3x - y\}$ (on pourra représenter le résultat sur un repère orthonormé).

**Exercice 11 - Compréhension d'ensemble et lien avec la logique.** Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés sur l'entier $x$. On définit les ensembles $A = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} : Q(x)\}$.

1. Par exemple, on peut considérer, $P(x)$ la propriété "$x$ est divisible par 4" et $Q(x)$ la propriété "$x$ est divisible par 2". Définir les ensembles $A$ et $B$ par extension ?
2. En général, si pour tout $x \in \mathbb{N}$, la propriété $P(x)$ implique $Q(x)$, alors quel est le rapport entre $A$ et $B$ ?
3. Écrivez les ensembles $\{x \in \mathbb{N} : \neg P(x)\}$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge Q(x)\}$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \vee \neg Q(x)\}$ à l'aide des opérateurs ensemblistes sur $A$ et $B$.

**Exercice 12 - Propriétés.** Soient $A, B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. Démontrer les propriétés de distributivité suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;
2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;

**Exercice 13.**
1. Soient $A, B, C$ trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.
2. Est ce que $C \subset A \cup B$ entraîne $C \subset A$ ou $C \subset B$ ?

## 4.2 Différence et complémentaire

**Définition 6** (Différence)**.** La **différence** de l'ensemble $A$ par l'ensemble $B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans $A$ mais pas dans $B$, on le note $A \setminus B$.

*Exemple* 8. Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, on a $A \setminus B = \{2\}$ et $B \setminus A = \{1, 9\}$.

*Exemple* 9. Pour tout ensemble $A$, on a $A \setminus \emptyset = A$, et $A \setminus A = \emptyset$.
De plus, pour tous ensembles $A$ et $B$, on a $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$.

**Définition 7** (Différence symétrique)**.** La **différence symétrique** entre les ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans $A$ ou $B$ mais pas dans les deux, on le note

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Définition 8** (Complémentaire)**.** On se fixe un ensemble $\Omega$ appelé **univers**. Pour $A \subset \Omega$, on définit le **complémentaire** de $A$ par rapport à $\Omega$ comme l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui ne sont pas éléments de $A$, on le note $\mathbf{C}_\Omega(A) = \Omega \setminus A$ et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés, on le note $\overline{A}$ ou $A^c$.

*Remarque* 5. Il faut obligatoirement se placer dans un ensemble de référence pour définir la complémentation.

*Exemple* 10. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $A = \{2, 3\}$. On a $\mathbf{C}_\Omega(A) = \{1, 4, 5\}$. Soit $B = \mathbf{C}_\Omega(A)$. On a $\mathbf{C}_\Omega(B) = \{2, 3\} = A$.

*Exemple* 11.

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{R}$. Soit $A = [0, 1]$. On a $B = \mathbf{C}_\mathbb{R}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \notin [0, 1]\} = ]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. On a $\mathbf{C}_\mathbb{R}(B) = [0, 1] = A$.

**Proposition 6** ***Propriétés de la complémentation***

*La complémentation a plusieurs propriétés :*

**Involution :** $\overline{\overline{A}} = A$

**Loi de Morgan :** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**Démonstration :** Nous allons montrer par double inclusion que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ :

Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. On en déduit que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Montrons que $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ :

Réciproquement, soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Alors $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \cap B}$. ■

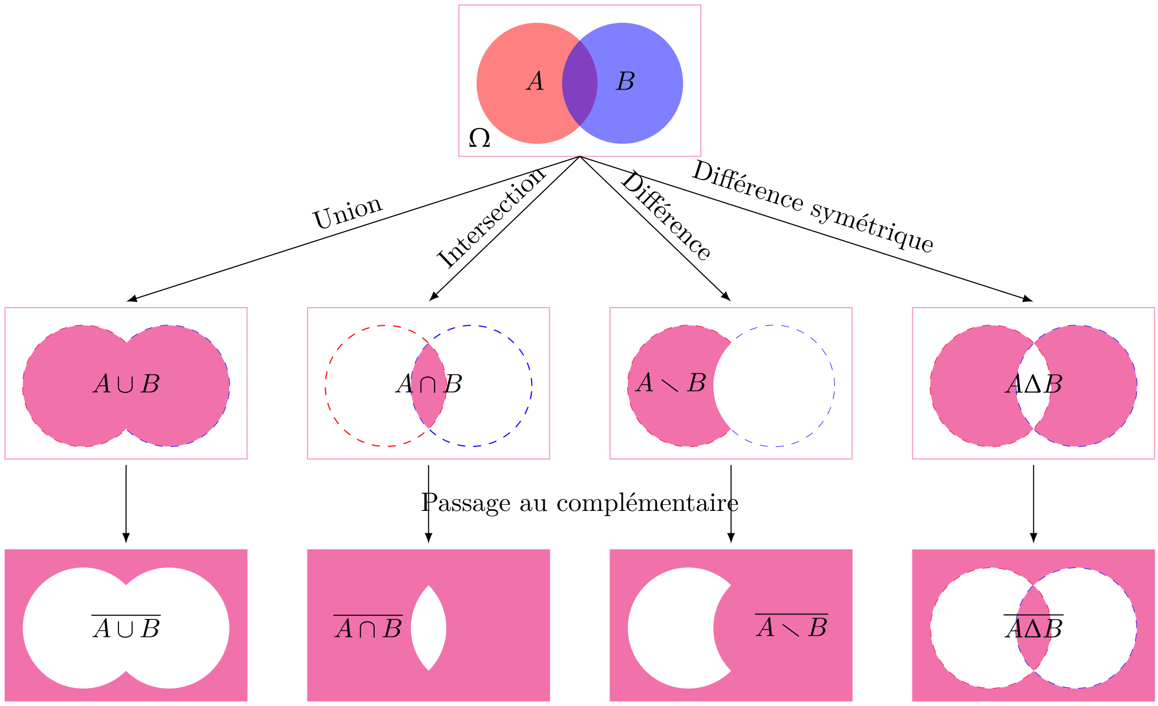
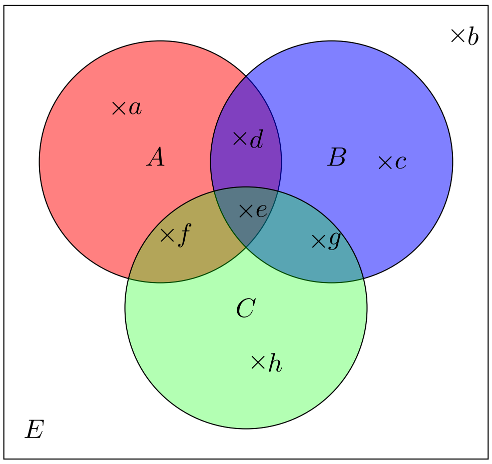



FIGURE 1 – Exemples de constructions d'ensembles à partir des ensembles $A$ et $B$ contenus dans l'univers $\Omega$

**Exercice 14 - Loi de Morgan.** Soient $A, B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. Pour $X \subset E$, on note $\overline{X}$ le complémentaire de $X$ dans $E$. Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $\overline{\overline{A}} = A$ ;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Exercice 15 - Diagramme de Veen.** On considère le diagramme de Venn suivant, avec $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$, et $a, b, c, d, e, f, g, h$ des élements de $E$.




Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \overline{B}$ ;
2. $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$ ;
3. $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$ ;
4. $f \in C \setminus A$ ;
5. $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ ;
6. $\{h, b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ;
7. $\{a, f\} \subset A \cap C$.

## 4.3 Produit cartésien

Un **couple** est la donnée de deux objets dans un certain ordre. Bien noter que dans un couple, l'ordre compte, par exemple $(1, 3) \neq (3, 1)$. Un triplet (resp. quadruplet, quintuplet) est la donnée de trois (resp. quatre, cinq) objets dans un certain ordre. Soit $n$ un entier naturel non nul. Un $n$**-uplet** est la donnée de $n$ objets dans un certain ordre

**Définition 9** (Produit cartésien)**.** Le **produit cartésien** des ensembles $A$ et $B$ (dans cet ordre) est l'ensemble des **couples** $(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$, on le note $A \times B$.

Le **produit cartésien** des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ (dans cet ordre) est l'ensemble des $n$**-uplets** $(a_1, \dots, a_n)$ où $a_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on le note $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Si $A_1 = \cdots = A_k$ on note $A^k$ l'ensemble des $k$-uplets formés par les éléments de $A$.

*Remarque* 6. Le couple $(a, b)$ n'est pas un ensemble.

Si $a \neq b$ alors $(a, b)$ est distinct de $(b, a)$.

*Exemple* 12. Si $A = \{poulet, lapin, vache\}$ et $B = \{banane, orange\}$, on a

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(poulet, banane), (lapin, banane), (vache, banane), (poulet, orange), (lapin, orange), (vache, orange)\} \\ B \times A &= \{(banane, poulet), (orange, poulet), (banane, lapin), (orange, lapin), (banane, vache), (orange, vache)\} \end{aligned}$$

Et on remarque que $A \times B \neq B \times A$. Pour vous persuader de l'importance de l'ordre dans un couple, dites-vous que manger une banane après avoir mangé du lapin n'est pas la même chose que manger du lapin après avoir mangé une banane

*Exemple* 13. On note $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers naturels et $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels.

*Exemple* 14. Le système de codage informatique des couleurs RGB, (de l'anglais "Red, Green, Blue") reconstitue une couleur par synthèse additive à partir de trois couleurs primaires (rouge, vert et bleu), formant sur l'écran une mosaïque trop petite pour être aperçue. Ainsi pour chacune des trois couleurs primaires, on donne une valeur s'exprimant dans un intervalle entre 0 et 255. D'un point de vue informatique, une couleur est donc un élément de

$$[0; 255] \times [0; 255] \times [0; 255] = [0; 255]^3.$$

**Exercice 16 - Produit cartésien dans $\mathbb{R}^2$.**

1. Soient $A$ et $B$ les intervalles $A = [0, 1]$ et $B = [2, 5]$. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $A \times B$ et $B \times A$. Bien noter que $A \times B \neq B \times A$.
2. Est ce que les ensembles suivants peuvent s'écrire comme produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}^2$ ?
   (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1\}$.
   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 \leq 1\}$.

# 5 Fonctions

La notion d'application permet d'associer à chaque élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. En informatique, on a souvent de cette notion pour passer d'un objet à sa représentation, pour traduire une représentation vers une autre, comme support de preuves de propriétés de programmes, etc...

## 5.1 Définition

**Définition 10** (Fonction)**.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une **fonction** $f : E \to F$ (de $E$ dans $F$) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subset E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G_f$. Quand il existe, on note cet élément par $f(x)$. L'élément $x$ est alors l'**antécedent** de $y$ et $y$ est l'**image** de $x$. On note aussi $f : x \longmapsto y$ le fait que $f$ associe l'élément $y$ comme image de $x$.

**Définition 11** (Ensemble image et préimage)**.** Etant donné $A \subset E$ et $B \subset F$, on définit

— l'image de $A$ par $f$ :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F : \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\} \\ &= \{y \in F : \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } (x, y) \in G_f\}; \end{aligned}$$

— la préimage de $B$ par $f$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E : \text{ il existe } y \in F \text{ tel que } f(x) = y\} \\ &= \{x \in E : \text{ il existe } y \in F \text{ tel que } (x, y) \in G_f\} \end{aligned}$$

**Définition 12** (Domaine de définition, Image)**.** Le **domaine de définition** d'une fonction $f : E \to F$, noté $\mathrm{Dom}(f)$ est l'ensemble des éléments de $x \in E$ qui ont une image par $f$. Autrement dit :

$$\mathrm{Dom}(f) = f^{-1}(F) = \{x \in E : \text{ il existe } y \in F \text{ tel que } f(x) = y\}$$

L'**ensemble image** d'une fonction $f : E \to F$, noté $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des éléments de $y \in E$ qui ont un antécédent par $f$. Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F : \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$$

**Définition 13** (Egalité)**.** Deux fonctions $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont égales si $G_f = G_g$ ou de manière équivalente si $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

**Définition 14** (Application)**.** Une **application** de $E$ dans $F$ est une fonction de $E$ dans $F$ telle que $\mathrm{Dom}(f) = E$ . On note $F^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.

**Exercice 17.** Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

On définit la fonction $f$ par le graphe :

$$G_f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

Autrement dit

$$\begin{array}{rccc} f & : E & \longrightarrow & F \\ & 1 & \longmapsto & a \\ & 2 & \longmapsto & c \\ & 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

— Quel est l'image de 1 par $f$ ?
— Quel sont les antécédents de $a$ par $f$ ?
— Est ce que $H = \{(1, a), (2, b), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$ est le graphe d'une fonction ?
— Donner $f(\{1\})$, $f(\{1, 4\})$, $f(\{3\})t$ et $f(\{1, 2, 3\})$.
— Donner $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{a, c\})$, $f^{-1}(\emptyset)$ et $f^{-1}(\{b\})$.
— Donner $\mathrm{Dom}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
— Est ce que $f$ est une application ?

*Exemple* 15. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $E' = \{1, 2, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

Le graphe $G = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de $E$ dans $F$ mais pas une application.

Par contre $G$ définit une application de $E'$ dans $F$.

## 5.2 Modes de représentation

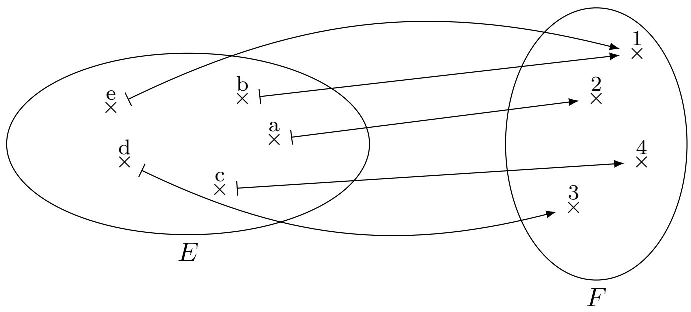
On donne ici différents moyens pour représenter une fonction $f : E \to F$.

**Table de valeur** Pour chaque élément de $E$ on donne l'élément de $F$ associé. Si $E$ est fini on peut représenter cela sous forme de tableau.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | aa | nj | zj | nk | za | az | aa | aa | zz | ju |

Un autre exemple est le code ASCII qui permet d'associer à chaque entier entre 0 et 127 un caractère.

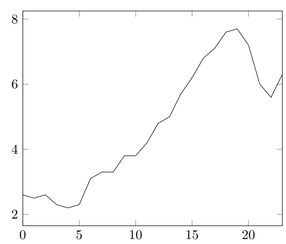
**Diagramme de Venn** Parfois il est plus visuel de montrer les différents liens sur un diagramme de Venn.




**Formule algébrique** Lorsque l'ensemble $E$ est infini, on ne peut pas stocker toutes les valeurs, on peut définir la fonction par une formule :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

**Courbe** On peut aussi représenter la fonction sous forme de courbe qui à chaque point de l'abscisse fait correspondre un élément de l'ordonnée.




**Algorithme** On peut aussi définir une fonction $f : E \to F$ par un algorithme qui prend en argument un élément de $E$ et lorsqu'il s'arrête, il renvoie un élément de $F$. Le domaine de définition est l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'algorithme s'arrête.

## 5.3 Composition de fonction et d'applications

**Définition 15** (Composition)**.** On considère les fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit la **fonction composée** de $f$ par $g$, notée $g \circ f : E \to G$, définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$. On applique $f$ à l'argument $x$, puis on applique $g$ au résultat s'il existe.

Le domaine de définition de $g \circ f$ est donné par :

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$

**Attention, en général, on considère la composée d'applications pour s'abstraire des contraintes de domaines de définition.**

**Exercice 18.** Soient $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $F = \{a, b, c, d, e\}$ et $G = \{1, 2, 3, 4\}$, on définit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ par :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & \alpha & \longmapsto & b \\ & \beta & \longmapsto & a \\ & \gamma & \longmapsto & d \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & F & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & 2 \\ & b & \longmapsto & 1 \\ & c & \longmapsto & 4 \\ & d & \longmapsto & 3 \\ & e & \longmapsto & 1 \end{array}$$

*Remarque* 7. Attention en général $f \circ g \neq g \circ f$.

**Proposition 7 *Associativité de la composée***

*Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ et cette application se note $h \circ g \circ f$.*

**Démonstration :** Par définition de la composition d'applications, il vient $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$ et $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$ pour tout $x \in E$ d'où l'égalité recherchée. ■

## 5.4 Applications singulières

**Définition 16** (Identité)**.** Etant donné un ensemble $A$, la fonction **identité** est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_A: & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

**Définition 17** (Injection canonique)**.** Soit $A \subset B$, l'**injection canonique** est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

**Définition 18** (Projection canonique)**.** Soit $A_1 \times \cdots \times A_k$ le produit cartésien de $k$ ensemble, la **projection canonique suivant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée** pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \pi_i: & A_1 \times \cdots \times A_k & \longrightarrow & A_i \\ & (a_1, \ldots, a_k) & \longmapsto & a_i \end{array}$$

## 5.5 Injection et surjection

**Définition 19** (Fonction injective)**.** Une fonction est **injective** si tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent.

**Définition 20** (Fonction surjective)**.** Une fonction est **surjective** si chaque élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent.

Autrement dit, si $f : E \to F$ est une fonction alors $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$.

## 5.6 Bijection et application réciproque

**Définition 21** (Application bijective)**.** Une application qui est à la fois injective et surjective est bijective.

**Attention, en général, la notion de bijection est utilisé pour les applications.**

**Proposition 8**

*L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*

*Si $f$ est bijective, l'application $g$ est unique, c'est l'***application réciproque** *de l'application $f$, notée $f^{-1}$.*

**Démonstration :** Si $f : E \to F$ est bijective alors à chaque élément $x \in E$ correspond un et un seul élément $y \in F$, c'est la définition de l'application. De même, à chaque élément $y \in F$ correspond un élément $x \in E$ (c'est la surjectivité), et cet élément est unique (c'est l'injectivité). Cela permet de définir une fonction $g : F \to E$ qui vérifie

$$x = g(y) \text{ si et seulement si } f(x) = y.$$

On en déduit que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrons qu'une telle application est unique. Soit $h : F \to E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. On a $f \circ h(y) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_F(y)$ pour tout $y \in F$, par injectivité de $f$, on en déduit que $h(y) = g(y)$. Les fonctions $g$ et $h$ sont donc égales.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et montrons que $f$ est bijective :

— Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on a donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ et comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ on en déduit que $x_1 = x_2$ et donc que $f$ est injective.

— Soient $y \in F$, on a $y = \mathrm{Id}_F(y) = f(g(y))$. Ainsi, $g(y)$ est une préimage de $y$ par $f$, on en déduit que $f$ est surjective.

$f$ est injective et surjective, on en déduit que $f$ est bijective. ■

**Exercice 19.** Montrer que l'application de $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = 2x$ est surjective et injective. Donner l'application réciproque.

Qu'en est-il de l'application $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(x) = 2x$.

**Proposition 9**

*Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. La composée $g \circ f$ est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Démonstration :** On a :

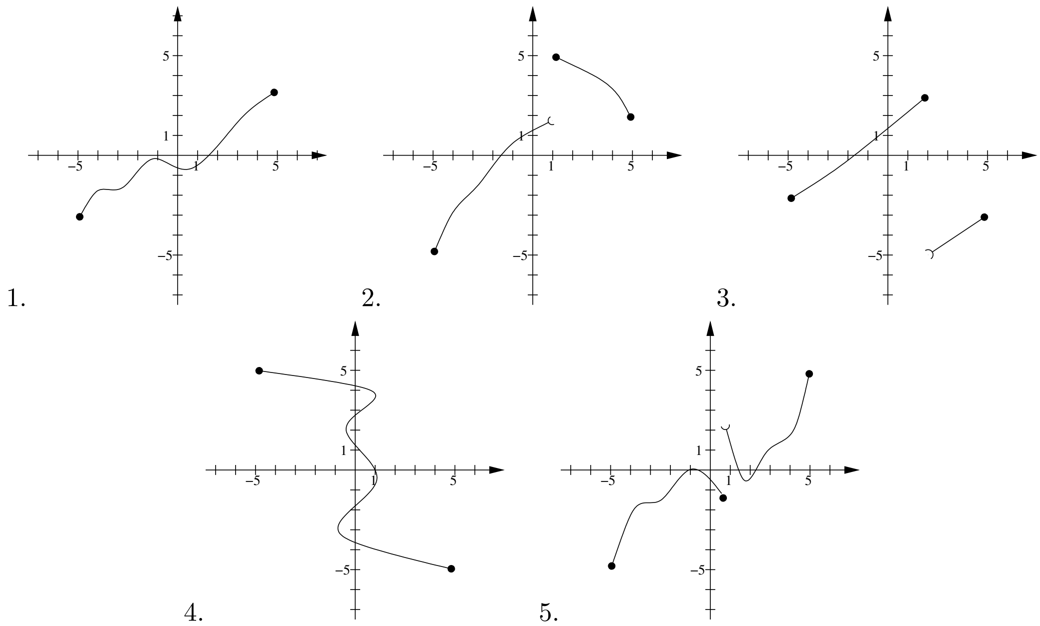
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G.$$

De même, on a :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

On en déduit que $g \circ f$ est bijective et par unicité de l'application réciproque, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

**Exercice 20.** Dire, en justifiant, si les graphes suivants représentent une fonction de $[-5; 5]$ dans $[-5; 5]$. Si c'est le cas, dire si la fonction est injective, surjective ou bijective.



**Exercice 21.** Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives ou bijectives.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2n-3 & \text{si } n \geq 1 \\ n+1 & \text{si } n < 1 \end{cases} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & 5x-1 \end{array}$$

**Exercice 22.** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est surjective, montrer que $g$ est surjective. Est-ce que $f$ est obligatoirement surjective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est injective, montrer que $f$ est injective. Est-ce que $g$ est obligatoirement injective ?
3. On suppose que $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, montrer que $g$ est injective.

**Exercice 23.** Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie $A$ de $E$, on note $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Soient $A, B$ deux sous-ensembles de $E$. Montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

**Exercice 24.** Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$(i)$. $f$ est injective

$(ii)$. pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$ on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

$(iii)$. pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, si $f(A \cap B) = \emptyset$ alors $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

**Exercice 25.** Soit $E$ un ensemble non vide. On se donne deux parties $A$ et $B$ de $E$ et on définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (A \cap X^c) \cup (B \cap X) \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. C'est à dire trouver les ensembles $X \subset E$ pour lesquels $f(X) = \emptyset$.
2. Donner une condition nécessaire reliant $B$ et $A^c$ pour que $f$ soit bijective (en particulier que $\emptyset$ ait un unique antécédent).
3. On suppose dans la suite de l'exercice que $B = A^c$. Exprimer $f$ à l'aide de la différence symétrique. =
4. Montrer que $f$ est bijective et préciser la fonction réciproque.

# 6 Techniques de raisonnements

## 6.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion "$P \Longrightarrow Q$" est vraie. On suppose que $P$ est vraie et on montre qu'alors $Q$ est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

**Exercice 26.** Montrer que si $a + b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

## 6.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les $x$ dans un ensemble $E$, on montre l'assertion pour les $x$ dans une partie $A$ de $E$, puis pour les $x$ n'appartenant pas à $A$. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

**Exercice 27.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

## 6.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante (voir la partie 4 de la proposition) :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P))$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion "$P \Longrightarrow Q$, on peut montrer si non($Q$) est vraie alors non($P$) est vraie.

**Exercice 28.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

## 6.4 Raisonement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer "$P \Longrightarrow Q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que $P$ est vraie et que $Q$ est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si $P$ est vraie alors $Q$ doit être vraie et donc "$P \Longrightarrow Q$" est vraie.

**Exercice 29.** Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

## 6.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E, P(x)$" est vraie alors pour chaque $x$ de $E$ il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. En effet, la négation de "$\forall x \in E, P(x)$" est "$\exists x \in E, P(x)$".) Trouver un tel $x$ c'est trouver un contre-exemple à l'assertion "$\forall x \in E, P(x)$".

**Exercice 30.** Montrer que l'assertion suivante est fausse : "Tout entier positif est somme de trois carrés". (Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

## 6.6 Récurence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de $n$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

— Initialisation : On prouve "P(0)"
— Héridité : On suppose que pour $n \geq 0$ on a $P(n)$ vraie, et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
— Conclusion : on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 31.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

**Université Paul Sabatier** — Année 2023-2024

TD Math-Base — **feuille n°** 1

# Langage mathématique (Solutions)

***Correction 5*** 1. (a) $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ ;

(b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

(c)

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 1 = 0 &\Leftrightarrow (3x-1)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or on remarque que $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ ne sont pas des entiers, ainsi $C = \emptyset$.

(d) D'après la question précédente, $D = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

2. (a) $E = \left\{2^p 7^q \ : \ (p,q) \in \{0,1\}^2\right\}$ ou $E = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ divise } 14\}$.

(b) $F = \{3n + 2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $G = \left\{\frac{1}{2^n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

***Correction 6*** Considérons les ensembles $A = \{(x,y) : y = x^2 - 4x + 6\}$ et $B = \{(t+2, t^2+2)\imath\mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$. Pour montrer que $A = B$, on va montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

— Montrons que $B \subset A$. Soit $(t+2, t^2+2) \in B$ avec $t \in \mathbb{R}$. On pose $x = t+2$ et $y = t^2 + 2$. On a

$$x^2 - 4x + 6 = (t+2)^2 - 4(t+2) + 6 = t^2 + 4t + 4 - 4t - 8 + 6 = t^2 + 2 = y$$

donc $(x,y) = (t+2, t^2+2) \in A$. Ainsi $B \subset A$.

— Montrons que $A \subset B$. Soit $(x,y) \in A$. On pose $t = x - 2 \in \mathbb{R}$. On a alors

$$y = x^2 - 4x + 6 = (t+2)^2 - 4(t+2) + 6 = t^2 + 4t + 4 - 4t - 8 + 6 = t^2 + 2$$

donc $(x,y) = (t+2, t^2+2) \in B$. Ainsi $A \subset B$.

Comme $B \subset A$ et $A \subset B$, on en déduit que $A = B$.

***Correction 7*** On va procéder par double inclusion. Montrons d'abord que $B \subset A$. En effet, prenons $(x,y) \in B$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Ainsi

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

et donc on a bien $(x,y) \in A$. Ainsi $B \subset A$.

Réciproquement, prenons $(x,y) \in A$, on va construire un réel $t$ pour prouver que $(x,y) \in B$. On doit avoir $t = x - 1$. Si c'est le cas, on a $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$. On a bien $(x,y) = (t+1, 4t+3) \in B$. Et donc $A \subset B$.

***Correction 8*** 1. L'ensemble $\{\}$ à 0 élément, c'est l'ensemble vide. L'ensemble $\big\{\{\}\big\}$ contient 1 élément, cet élément est l'ensemble vide.

2. L'ensemble $\{1,2,3,4\}$ a 4 éléments et $\{\{1,2\},\{3\}\}$ a deux éléments.
3. On n'a pas $\{\} \in \big\{\{1,2\},\{3,4,5\}\big\}$ car l'ensemble vide n'apparait pas dans les éléments de $\big\{\{1,2\},\{3,4,5\}\big\}$. Par contre $\{\} \subseteq \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ car l'ensemble vide est une partie de tout ensemble.
4. On a
$$\mathcal{P}(A) = \big\{\{\},\{\alpha\}\big\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \big\{\{\},\{\{\}\},\{\{\alpha\}\},\{\{\alpha\},\{\}\}\big\}.$$
5. Il n'existe pas d'ensemble $A$ tel que $\mathcal{P}(A) = \{\}$ car l'ensemble vide est toujours un élément de $\mathcal{P}(A)$, on a toujours $\{\} \in \mathcal{P}(A)$.
6.

***Correction 9*** Supposons que $A \subset B$. Considérons $C \in \mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire $C \subset A$. Comme $A \subset B$, on a $C \subset B$, c'est-à-dire, $C \in \mathcal{P}(B)$.

Ainsi $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

***Correction 10***

1. L'ensemble des nombres entiers naturels impairs est l'ensemble des nombres entiers naturels congrus à 1, 3 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $6p+1$, $6p+3$ ou $6p+5$, avec $p \in \mathbb{N}$.
   L'ensemble des entiers naturels multiples de 3 est l'ensemble des entiers naturels congrus à 0 ou 3 modulo 6, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $6q$ ou $6q+3$, avec $q \in \mathbb{N}$.
   Donc
   $$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est congru à } 0, 1, 3 \text{ ou } 5 \text{ modulo } 6\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists p \in \mathbb{N} \ x \in \{6p, 6p+1, 6p+3, 6p+5\}\}. \end{aligned}$$
2. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x \leq 3\} = ]-2, 3]$.
3. $A \cup B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 2 - x \text{ ou } y < 3x + 2\right\}$.

1. $A \cap B$ est l'ensemble des figures géométriques qui sont à la fois des losanges et des rectangles, c'est donc l'ensemble des carrés.
2. $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.
3. $A \cup B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 2 - x \text{ et } y < 3x + 2\right\}$.

***Correction 11***

1. On a
   $$A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\} \qquad B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots\}$$
2. Supposons que l'on a $P \Longrightarrow Q$. Soit $x \in A$, on a $P(x)$ qui est vraie, donc $Q(x)$ est vraie car $P \Longrightarrow Q$ donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$.
3. On a $\{x \in \mathbb{N} : \neg P(x)\} = \overline{A}$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge Q(x)\} = A \cap B$ et $\{x \in \mathbb{N} : P(x) \vee \neg Q(x)\} = A \cup \overline{B}$.

*Remarque* 8. Il y a des liens entre les expressions utilisées en logique (et, ou, etc.) et les opérations sur les ensembles (intersection, union, etc.), mais il ne faut pas mélanger. Les expressions "et", "ou", "implique", etc. sont à placer entre des propositions, pas entre des ensembles. Les signes $\cap$, $\cup$ et $\subset$ sont à placer entre des ensembles, pas entre des propositions. En d'autres termes, si $P$ et $Q$ sont des propositions, "$P$ et $Q$" a un sens, mais "$P \cap Q$" n'en a pas. Si $A$ et $B$ sont des ensembles, "$A \cap B$" a un sens, mais "$A$ et $B$" n'en a pas.

***Correction 12***

1. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors ($x \in A$ et $x \in B$) ou $x \in C$. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in C$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.
   Récipoquement, si $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, on distingue deux cas :
   — Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.
   — Sinon, $x \notin C$. Mais alors, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in A$. De même, puisque $x \in B \cup C$, on a $x \in B$. Ceci prouve que $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$
2. <u>Montrons que $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ :</u>
   Soit $x \in (A \cup B) \cap C$. Alors ($x \in A$ ou $x \in B$) et $x \in C$. On a $x \in A$ ou $x \in B$, comme $x \in C$, on en déduit que $x \in A \cup C$ ou $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée.
   <u>Montrons que $(A \cup B) \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ :</u>
   Récipoquement, si $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$, on distingue deux cas :
   — Si $x \in A \cap C$, alors $x \in (A \cup B)$ et $x \in C$ et donc $x \in (A \cup B) \cap C$.
   — De même, si $x \in B \cap C$, alors $x \in (A \cup B)$ et $x \in C$ et donc $x \in (A \cup B) \cap C$.
   On en déduit que $(A \cup B) \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Par double inclusion on en déduit l'égalité demandée.

***Correction 13***

1. Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap C$, en particulier $x \in B$. On en déduit que $A \subset B$.
   Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap C$, en particulier $x \in C$. On en déduit que $B \subset C$.
2. Non, si $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{2, 3\}$, on a $C \subset A \cup B$ mais on a ni $C \subset A$, ni $C \subset B$.

***Correction 14*** 1. On suppose que $x \in \overline{\overline{A}}$. Alors $x \notin \overline{A}$, et donc $x \in A$. Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$ et donc $x \in \overline{\overline{A}}$

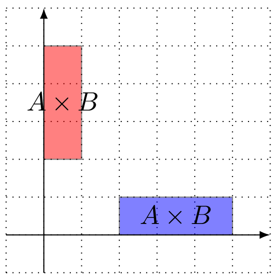
2. Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. On en déduit que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Réciproquement, soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Alors $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \cap B}$.
3. On peut présenter aussi les raisonnements précédents sous forme d'équivalence. C'est ce que l'on fait pour ce dernier exemple :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

***Correction 15*** 1. Faux car $g \in B$ et donc $g \notin \overline{B}$.

2. Faux pour les mêmes raisons.
3. Vrai.
4. Faux car $f \in A$.
5. Faux car $e \in A$.
6. Vrai.
7. Faux, on a $f \in A \cap C$ mais $a \notin C$ donc $a \notin A \cap C$.

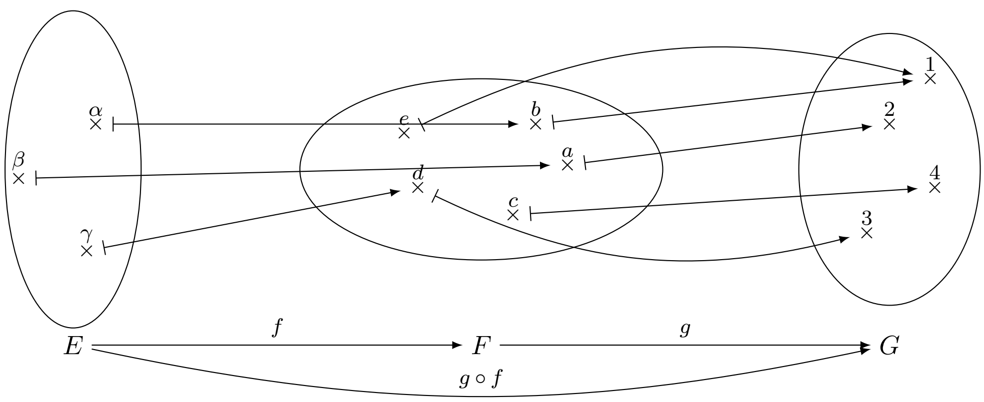
***Correction 16*** 1. On a le graphique suivant :




2. (a) $C = [0,1] \times [0,1]$.
   (b) Supposons que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\}$ s'écrive comme un produit cartésien : $D = A' \times B'$. On $(0,1) \in D$ donc $1 \in B$, de même $(1,0) \in D$ donc $1 \in A$. Ainsi $(1,1) \notin A' \times B' = D$. Ainsi $D$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien.

***Correction 17*** On dit que $a$ est l'image de 1 par $f$ ou bien que 1 est un antécédent de $a$ par $f$.
Par contre l'ensemble $H = \{(1,a),(2,b),(2,c),(4,a)\} \subset E \times F$ n'est pas le graphe d'une fonction.
— $f(\{1\}) = \{a\}$, $f(\{1,4\}) = \{a\}$, $f(\{3\}) = \emptyset$ et $f(\{1,2,3\}) = \{a,c\}$ ;
— $f^{-1}(\{a\}) = \{1,4\}$, $f^{-1}(\{a,c\}) = \{1,2,4\}$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ ;
— le domaine de la fonction $f$ est $\mathrm{Dom}(f) = \{a,c\}$ ;
— l'image de la fonction $f$ est $\mathrm{Im}(f) = \{1,2,4\}$.

***Correction 18*** La représentation avec le diagramme de Venn donne :



Ainsi la fonction $f \circ g : E \longrightarrow G$ donne les associations suivantes :

$$\alpha \longmapsto 1 \qquad \beta \longmapsto 2 \qquad \gamma \longmapsto 3$$

***Correction 19*** L'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ définie par $f : x \longmapsto 2x$ est :
— surjective car pour tout $y \in \mathbb{Q}$ on a $\frac{y}{2} \in \mathbb{Q}$ et $f(\frac{y}{2}) = y$ ;
— injective car si $x, y \in \mathbb{Q}$ vérifient $f(x) = f(y)$ alors $2x = 2y$ autrement dit $x = y$.
La fonction $f$ est donc bijective et son application réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto \frac{x}{2}$.

***Correction 20*** 1. La fonction n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. La fonction est injective, surjective et bijective.
3. La fonction est injective, n'est pas surjective, ni bijective.
4. Ce graphe ne représente pas une fonction (plusieurs images pour 0, par exemple).
5. La fonction n'est pas injective, est surjective, mais pas bijective.

***Correction 21*** 1. La fonction $f$ est injective. En effet, si $n \neq p$, alors $2n + 1 \neq 2p + 1$. Elle n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par $f$. Elle n'est donc pas non plus bijective.
2. La fonction $g$ n'est pas injective. En effet, $g(0) = 1 = g(2)$. Elle n'est pas non plus surjective, car 2 n'a pas d'antécédent par $g$. Elle n'est donc pas bijective.
3. La fonction $h$ est injective, car si $x, y \in \mathbb{Q}$ sont tels que $x \neq y$, alors $5x - 1 \neq 5y - 1$. Elle est également surjective, car, pour tout $z \in \mathbb{Q}$, on a $\frac{z+1}{5} \in \mathbb{Q}$ et $h\left(\frac{z+1}{5}\right) = z$, donc $z$ admet un antécédent par $h$. Elle est donc bijective.

***Correction 22*** 1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que $g \circ f : X \to Z$ est surjective. Alors, pour tout $z \in Z$, il existe $x \in X$ tel que $g(f(x)) = z$, $f(x)$ est donc un antécédent (dans $Y$) de $z$ par $g$, ce qui prouve que $g$ est surjective.
En revanche, $f$ n'est pas nécessairement surjective. En effet, en prenant $X = Z = \{1, 2\}$, et $Y = \{1, 2, 3\}$, et en définissant les fonctions $f$ et $g$ de la façon suivante :
$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ g(1) = 1 \text{ et } g(2) = g(3) = 2,$$
alors
$$g \circ f(1) = 1 \text{ et } g \circ f(2) = 2.$$
On remarque que $g \circ f$ est surjective, ainsi que $g$, mais pas $f$.
2. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que $g \circ f : X \to Z$ est injective. Alors, pour tous $x_1, x_2 \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$,
$$g\left(f\left(x_1\right)\right) \neq g\left(f\left(x_2\right)\right).$$
Par conséquent, $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$, leur image par $g$ étant différente.
En revanche, $g$ n'est pas nécessairement injective. En effet, en considérant l'exemple précédent, $g \circ f$ est injective, $f$ l'est aussi, mais $g$ ne l'est pas.

***Correction 23*** 1. Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme $A \subset B$, on en déduit que $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $f(A) \subset f(B)$.
2. On a $A \subset A \cup B$ donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même $f(B) \subset f(A \cup B)$. On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Réciproquement, soit $y \in f(A \cup B)$, il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ et si $x \in B$ alors $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$ autrement dit $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. On a la double inclusion donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Soit $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(y) = x$. Comme $x \in A$, on a $y = f(x) \in f(A)$, de même comme $x \in B$, on a $y = f(x) \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. La réciproque est fausse, c'est à dire que l'on n'a pas nécessairement $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, on peut facilement construire un exemple en prenant une fonction non injective (voir exercice suivant).

***Correction 24*** $(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que $f$ est injective. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. D'après l'exercice précédent, on sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons l'inclusion réciproque $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe donc $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Comme $f$ est injective, $x_1 = x_2 \in A \cap B$ et donc $y \in f(A \cap B)$. On en déduit que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Supposons que pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$ on a $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$. Soient $A'$ et $B'$ de $E$ tels que $f(A'\cap B') = \emptyset$ on a donc $f(A')\cap f(B') = f(A'\cap B') = \emptyset$.
$(iii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, si $f(A\cap B) = \emptyset$ alors $f(A)\cap f(B) = \emptyset$. Montrons que $f$ est injective. Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$ alors $\{x_1\}\cap\{x_2\} = \emptyset$ et donc $f(\{x_1\}\cap\{x_2\}) = \emptyset$. Mais $f(\{x_1\})\cap f(\{x_2\}) = \{y\}\cap\{y\} = \{y\} \neq \emptyset$. On obtient une contradiction donc $x_1 = x_2$.

***Correction 25*** 1. Soit $X \subset E$ tel que $f(X) = \emptyset$. On a $A\cap X^c = \emptyset$ et $B\cap X = \emptyset$. Donc $A\subset X$ et $X\subset B^c$ donc $A\subset X\subset B^c$. On a donc

$$\{X\in\mathcal{P}(E) : f(X) = \emptyset\} \subset \{X\in\mathcal{P}(E) : A\subset X\subset B^c\}.$$

Réciproquement, on fait la distinction suivante :
— Si $A\cap B\neq\emptyset$ on n'a pas $A\subset B^c$ donc $\{X\in\mathcal{P}(E) : f(X)=\emptyset\} = \emptyset$.
— Si $A\cap B = \emptyset$ on a $A\subset B^c$. Soit $X\in\mathcal{P}(E)$ tel que $A\subset X\subset B^c$ et montrons que $X$ est solution de $f(X)=\emptyset$. On a $f(X) = (A\cap X^c)\cup(B\cap X) = \emptyset\cup\emptyset$.
On en déduit que

$$\{X\in\mathcal{P}(E) : f(X) = \emptyset\} = \{X\in\mathcal{P}(E) : A\subset X\subset B^c\}.$$

2. Pour que $\emptyset$ ait un seul antécédent il faut que $A = B^c$.
3. On a $f(X) = (A\cap X^c)\cup(A^c\cap X) = A\Delta X$.
4. On a $f(f(X)) = (A\cap(A\Delta X)^c)\cup(A^c\cap(A\Delta X)) = (A\cap X)\cup(A^c\cap X) = X$.
5. On en déduit que $f$ est bijective et que la fonction réciproque de $f$ est $f$.

***Correction 26*** Soient $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Par definition des rationnels, il existe $p,p'\in\mathbb{N}$ et $q,q'\in\mathbb{N}^*$ tels que $a=\frac{p}{q}$ et $b=\frac{p'}{q'}$. On a alors

$$a+b = \frac{p}{q}+\frac{p'}{q'} = \frac{pq'+p'q}{qq'}.$$

Or $p'' = pq'+p'q\in\mathbb{N}$ et $q''=qq'\in\mathbb{N}^*$, on en déduit que $a+b=\frac{p''}{q''}\in\mathbb{Q}$.

***Correction 27*** • <u>Premier cas : $x\geq 1$.</u> Alors $|x-1| = x-1$. On a donc

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-2x+2 = (x-1)^2+1\geq 1>0.$$

Ainsi $x^2-x+1>|x-1|$.
• <u>Deuxième cas : $x\geq 1$.</u> Alors $|x-1| = -x-+1$. On a donc

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(-x+1) = x^2\geq 0.$$

Ainsi $x^2-x+1>|x-1|$.
• <u>Conclusion</u> Dans tous les cas on a $x^2-x+1>|x-1|$.

***Correction 28*** Nous supposons que $n$ n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors $n^2$ n'est pas pair. Comme $n$ n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2l+1$ avec $l=2k^2+2k\in\mathbb{N}$. On en déduit que $n^2$ est impair.
<u>Conclusion :</u> Nous avons montré que si $n$ est impair alors $n^2$ est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

***Correction 29*** Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a\neq b$. Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$ .Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$. Comme $a\neq b$ alors $a-b\neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ onobtient $a+b=-1$. La somme des deux nombres positifs $a$ et $b$ ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.
<u>Conclusion :</u> si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a=b$.

***Correction 30*** Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0 ,1 ,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

***Correction 31***