GRAPHE

Mathieu SABLIK

Table des matières

I Différentes notions de graphes **5**

I.1 Différents problèmes à modéliser 5

I.2 Différentes notions de graphes 6

I.2.1 Graphe orienté ou non 6

I.2.2 Isomorphisme de graphe 8

I.2.3 Degré 8

I.2.4 Construction de graphes à partir d'un autre 10

I.3 Différents modes de représentation d'un graphe 10

I.3.1 Représentation sagittale 10

I.3.2 Définition par propriété caractéristique 10

I.3.3 Listes d'adjacence 11

I.3.4 Matrices d'adjacence 11

I.3.5 Matrice d'incidence 12

I.3.6 Comparaison des différentes méthodes 12

I.4 Quelques classes de graphe importantes 12

I.4.1 Graphes isolés 12

I.4.2 Graphes cycliques 13

I.4.3 Graphes complets 13

I.4.4 Graphe biparti 13

I.4.5 Graphes planaires 13

I.4.6 Arbres 14

II Problèmes de chemins dans un graphe **15**

II.1 Notion de chemin 15

II.1.1 Définitions 15

II.1.2 Longueur d'un chemin 15

II.2 Connexité 16

II.3 Graphe k-connexe 17

II.4 Chemin Eulérien et Hamiltoniens 19

II.4.1 Chemin Eulérien 19

II.4.2 Chemins hamiltonien 21

II.5 Caractérisation des graphes bipartis 22

III Graphes acycliques ou sans-circuits **25**
III.1 Notion d'arbres . . . 25
III.1.1 Nombre d'arêtes d'un graphe acyclique . . . 25
III.1.2 Arbres et forêts . . . 26
III.1.3 Arbres orientés . . . 27
III.1.4 Notion de rang dans un graphe orienté sans circuit . . . 28
III.2 Initiation à la théorie des jeux . . . 28
III.2.1 Jeux combinatoires . . . 28
III.2.2 Modélisation . . . 29
III.2.3 Noyau d'un graphe . . . 29
III.2.4 Exemples de jeux . . . 30
III.3 Parcours dans un graphe . . . 32
III.3.1 Notion générale . . . 32
III.3.2 Parcours en largeur . . . 33
III.3.3 Parcours en profondeur . . . 34

IV Problèmes de coloriages **37**
IV.1 Coloriage de sommets . . . 37
IV.1.1 Position du problème . . . 37
IV.1.2 Exemples d'applications . . . 37
IV.1.3 Nombre chromatique de graphes classiques . . . 38
IV.2 Résolution algorithmique pour le coloriage de sommets . . . 38
IV.2.1 Algorithme glouton . . . 39
IV.2.2 Algorithme de Welsh-Powell . . . 39
IV.2.3 Existe t'il un algorithme pour trouver le nombre chromatique d'un graphe ? . . . 41
IV.3 Encadrement du nombre chromatique . . . 41
IV.4 Coloration des arêtes . . . 43
IV.5 Théorie de Ramsey . . . 44

V Graphes planaires **47**
V.1 Généralités . . . 47
V.2 Le théorème de Kuratowski . . . 48
V.3 Coloration . . . 48
V.4 Croisements, épaisseur et genre . . . 50

VI Un peu de théorie algébrique des graphes **53**
VI.1 Matrice d'adjacence et chemin dans un graphe . . . 53
VI.1.1 Matrice d'adjacence . . . 53
VI.1.2 Nombre de chemin de longueur n . . . 53
VI.1.3 Distance entre deux sommets et diamètre du graphe . . . 53
VI.2 Théorie de Perron-Frobenius . . . 54
VI.3 Deux mots sur le Page-rank . . . 54

VIIProblèmes d'optimisation pour des graphes valués **55**
VII.1 Recherche d'arbre couvrant de poids maximal/minimal . . . 55
VII.1.1 Problème . . . 55
VII.1.2 Algorithme de Prim . . . 56
VII.1.3 Algorithme de Kruskal . . . 57

VII.2 Problème de plus court chemin 58
VII.2.1 Position du problème 58
VII.2.2 Principe des algorithmes étudiés 59
VII.2.3 Algorithme de Bellman-Ford-Kalaba 59
VII.2.4 Algorithme de Bellman 61
VII.2.5 Algorithme de Dijkstra-Moore 62
VII.2.6 Remarques 64
VII.2.7 Ordonnancement et gestion de projet 64
VII.3 Flots dans les transports 65
VII.3.1 Position du problème 65
VII.3.2 Lemme de la coupe 66
VII.3.3 Algorithme de Ford-Fulkerson 67

Chapitre I

Différentes notions de graphes

I.1 Différents problèmes à modéliser

On peut considérer que l'article fondateur de la théorie des graphe fut publié par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1741. Il traitait du problème des sept ponts de Königsberg : est il possible de réaliser une promenade dans la ville de Königsberg partant d'un point donné et revenant à ce point en passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville ?

Cette théorie va connaitre un essor au cours du $XIX^{\text{ème}}$ par l'intermédiaire du problème suivant : quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier une carte géographique de telle sorte que deux régions limitrophe n'ont pas la même couleur ? Le théorème des quatre couleurs affirme que seulement quatre sont nécessaires. Le résultat fut conjecturé en 1852 par Francis Guthrie, intéressé par la coloration de la carte des régions d'Angleterre, mais ne fût démontré qu'en 1976 par deux Américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken. Ce fut la première fois que l'utilisation d'un ordinateur a permis de conclure leur démonstration en étudiant les 1478 cas particulier auxquels ils ont ramené le problème.

Au $XX^{\text{ème}}$ siècle, la théorie des graphes va connaître un essor croissant avec le développement des réseaux dont il faut optimiser l'utilisation. On peut citer quelques exemples de manière non exhaustive :

- réseaux de transports routier, d'eau, d'électricité : les sommets représentent les carrefours et les arêtes les rues ;
- réseaux informatiques : les sommets représentent les ordinateurs et les arêtes les connexions physiques ;
- réseaux sociaux : les sommets représentent les membres du groupe, deux personnes sont reliées par une arête si elles se connaissent (Facebook : graphe non orienté, twiter : graphe orienté, combien de poignées de main on est du président ?...) ;
- graphe du web : les sommets représentent les pages web et chaque arc correspond a un hyperliens d'une page vers une autre ;
- réseau de transports de données (téléphonie, wifi, réseaux informatique...) ;
- représentation d'un algorithme, du déroulement d'un jeu ;
- réseaux de régulation génétique ;

— organisation logistique : les sommets représentent des évènements, deux évènements sont reliées par une arête s'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps ;
— ordonnancement de projet : les sommets représentent les différentes tâches composant un projet, deux tâches sont reliés par une flèche si la deuxième ne peut pas commencer avant que la première soit terminée ;
— et beaucoup d'autres encore…

L'étude des graphes se réalise sous deux point de vues complémentaire. L'étude de propriétés structurelles de graphes ou de familles de graphes et l'étude algorithmique de certaines propriétés.

I.2 Différentes notions de graphes

I.2.1 Graphe orienté ou non

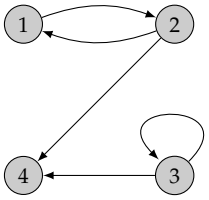
Dans les exemples que l'on a vus, un graphe est un ensemble fini de sommets reliés par des arêtes. Ces arêtes peuvent être orientées ou non, de plus une valeur peut être associée à chaque arête ou aux sommets.

Définition I.1. Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est la donnée :
— d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets ;
— d'un ensemble $A \subset S \times S$ dont les éléments sont les arcs.

Un arc $a = (s, s')$ est aussi noté $s \to s'$, s est l'*origine* de a et s' l'*extrémité*. On dit aussi que s' est le *successeur* de s et s le *prédécesseur* de s'.

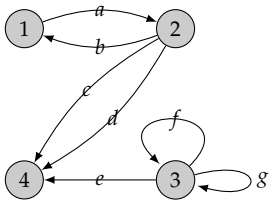
On peut souhaiter qu'il y ait plusieurs arcs entre deux mêmes sommets. On parle alors de graphe orienté *multi-arcs*. Formellement, $G = (S, A, \mathbf{i}, \mathbf{f})$ c'est la donnée :
— d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets ;
— d'un ensemble A dont les éléments sont les arcs ;
— de deux fonctions $\mathbf{i} : A \to S$ et $\mathbf{f} : A \to S$ qui à chaque arcs $a \in A$ associe son prédécesseur $\mathbf{i}(a)$ et son successeur $\mathbf{f}(a)$.

Exemple I.1. Exemple de graphe orienté :



$G = (S, A)$ où
— $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
— $A = \{(1,2), (2,1), (2,4), (3,4), (3,3)\}$.

Exemple de graphe orienté multi-arcs :



$G = (S, A, \mathbf{i}, \mathbf{f})$ où
— $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
— $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
— $\mathbf{i}$: $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$, $c \mapsto 2$, $d \mapsto 2$, $e \mapsto 3$, $f \mapsto 3$, $g \mapsto 3$ et $\mathbf{f}$: $a \mapsto 2$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 4$, $d \mapsto 4$, $e \mapsto 4$, $f \mapsto 3$, $g \mapsto 3$.

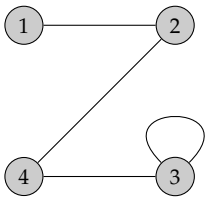
Définition I.2. Un *graphe non orienté* $G = (S, A)$ est la donnée :

— d'un ensemble S dont les éléments sont les sommets du graphe,
— d'un ensemble A dont les éléments, les arêtes du graphe, sont des parties à un ou deux éléments de S.

Le ou les sommets d'une arête sont appelés extrémités de l'arête. Les arêtes n'ayant qu'une seule extrémité sont des boucles.

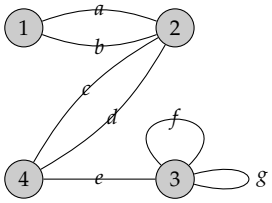
On peut de la même façon un graphe non-orienté *multi-arêtes*. Formellement, $G = (S, A, \alpha)$ est la donnée :
— d'un ensemble S dont les éléments sont des sommets ;
— d'un ensemble A dont les éléments sont les arêtes ;
— d'une fonction α de A dans les parties à un ou deux éléments de S.

Exemple I.2. Exemple de graphe non-orienté :



$G = (S, A)$ où
— $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
— $A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$.

Exemple de graphe non orienté multi-arêtes :



$G = (S, A, \alpha)$ où
— $S = \{1, 2, 3, 4\}$,
— $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
— α : $\begin{array}{ccc} a & \mapsto & \{1,2\} \\ b & \mapsto & \{1,2\} \\ c & \mapsto & \{2,4\} \\ d & \mapsto & \{2,4\} \\ e & \mapsto & \{3,4\} \\ f & \mapsto & \{3\} \\ g & \mapsto & \{3\} \end{array}$.

Si un arc ou une arête à ses deux extrémités constituées du même sommet, on dit que c'est une *boucle*.

Un graphe est *simple* s'il est non-orienté, s'il a au plus une arête entre deux sommets et s'il n'a pas de boucle.

L'*ordre* d'un graphe est le nombre de sommets $|S|$ et la *taille* d'un graphe est le nombre d'arêtes ou d'arcs.

On appèle *valuation* sur les sommets (resp. sur les arcs ou arêtes) toutes fonctions prenant en argument les sommets (resp. sur les arcs ou arêtes) et renvoyant un réels ou élément dans un ensemble donné.

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, on associe le graphe non orienté $G' = (S, A')$ ayant le même ensemble de sommets S et dont l'ensemble d'arêtes A' vérifie $\{x, y\} \in A' \iff (x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$.

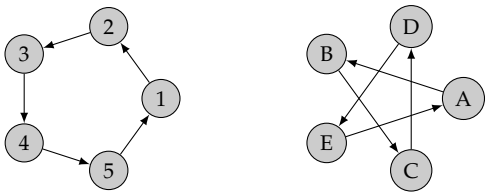
Exemple I.3. Les trois graphes suivants

sont associés au graphe non orienté suivant

I.2.2 Isomorphisme de graphe

Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* s'il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que pour tout $s, s' \in S$ on $(s, s') \in A \iff (\varphi(s), \varphi(s')) \in A$. L'application φ est alors un *isomorphisme de graphes orientés*.

Exemple I.4. Les deux graphes suivants sont isomorphes par l'isomorphisme $\varphi : 1 \mapsto A, 2 \mapsto B, 3 \mapsto C, 4 \mapsto D, 5 \mapsto E$.



De même, deux graphes non-orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* s'il existe une application bijective $\varphi : S \to S'$ telle que pour tout $s, s' \in S$ on $\{s, s'\} \in A \iff \{\varphi(s), \varphi(s')\} \in A$. L'application φ est alors un *isomorphisme de graphes non-orientés*.

I.2.3 Degré

Pour un graphe orienté, on appèle *degré entrant* d'un sommet s, noté $d_-(s)$ (resp. *degré sortant* d'un sommet s, noté $d_+(s)$) le nombre d'arcs dont le sommet est successeur (resp. prédécesseur).

Pour un graphe non-orienté, on appelle *degré* d'un sommet s, noté $d(s)$ le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Théorème I.1 Lemme de la poignée de main

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On alors les égalités suivantes :

$$\sum_{s \in S} d_+(s) = \sum_{s \in S} d_-(s) = |A|.$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On a alors l'égalité suivante :

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|.$$

Démonstration : Pour un graphe orienté $G = (S, A)$, chaque arc a un successeur et un prédécesseur d'ou la première égalité.

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'orienté le graphe non-orienté et remarquer que pour chaque sommet $d(s) = d_+(s) + d_-(s)$. ■

Une conséquence directe de ce théorème est que dans un graphe, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.

Corollaire I.2

Dans un graphe non orienté, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.

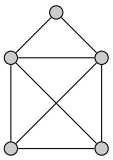
Démonstration : Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté, on note S_1 l'ensemble des sommets impairs et S_2 l'ensemble des sommets pairs. Par le lemme de la poignée de main, on a

$$\sum_{s \in S_1} d(s) + \sum_{s \in S_2} d(s) = 2|A|.$$

Ainsi $\sum_{s \in S_1} d(s)$ doit être pair. Comme chaque $d(s)$ est impair pour $s \in S_1$, on en séduit que $|S_1|$ est pair ■

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté défini à partir de l'ensemble de sommet $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. On note $d(v_i)$ le degré de v_i. La *suite des degrés* de G est la suite $(d(v_1), \ldots, d(v_n))$. En général, on ne tient pas compte de l'ordre des termes dans cette suite, et par convention, on écrira ses termes dans l'ordre décroissant.

La suite des degrés du graphe suivant est $(4, 4, 3, 3, 2)$.



Étant donnée une suite d'entiers naturels $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ telle que $d_1 \geq \cdots \geq d_n$, il est naturel de se demander s'il existe un graphe simple dont la suite des degrés est $\mathbf{d}$. Lorsque c'est le cas, on dira que la suite $\mathbf{d}$ est *graphique*. Par exemple, la suite $(4, 4, 3, 3, 2)$ est graphique. Le théorème suivant donne un algorithme récursif pour déterminer si une suite est graphique.

Théorème I.3 (Havel et Hakimi)

Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ une suite décroissante. La suite $\mathbf{d}$ est graphique si et seulement si $\mathbf{d}' = (d'_2, \ldots, d'_n) = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ est graphique.

Démonstration : ($\Leftarrow$) Supposons que la suite à $n-1$ termes définie par $\mathbf{d}' = (d'_2, \ldots, d'_n) = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ est graphique. Il existe un graphe $G' = (S', A')$ dont les sommets $S' = \{v_2, \ldots, v_n\}$ vérifient $d(v_i) = d'_i$. On considère le graphe $G = (S, A)$ qui vérifie

$$S = S' \cup \{v_1\} \text{ et } A = A' \cup \{\{v_1, v_i\} : i \in [\![2, d_1 + 1]\!]\}.$$

La suite associé à G est la suite $\mathbf{d} = (d_1, \ldots d_n)$, la suite est donc graphique.

($\Rightarrow$) Soit $d = (d_1, \ldots, d_n)$ une suite graphique. On veut montrer qu'il existe un graphe simple $G = (S, A)$ où $S = \{v_1, ..., v_n\}$ tel que $d(v_i) = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et telle que v_1 soit adjacent à tous les sommets dans $\{v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}\}$.

Supposons par l'absurde qu'un tel graphe n'existe pas. Considérons alors un graphe simple $G = (S, A)$ et une numérotation des sommets $S = \{v_1, ..., v_n\}$ telle que $d(v_i) = d_i$ et telle que v_1 soit adjacent à un maximum de sommets dans $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$ sans que ce soit tous. Il existe donc $k \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ et $l \in \{d_1 + 2, d_1 + 3, \ldots, n\}$ tel que $\{v_1, v_k\} \notin A$ et $\{v_1, v_l\} \in A$. On a deux cas

— Si $d(v_k) = d(v_l)$, il suffit de permuter les sommets, et obtient une numérotation des sommet qui n'est pas maximale et qui vérifie la propriété.

— Si $d(v_k) > d(v_l)$, il existe $m \notin \{k, l\}$ tel que v_m soit adjacent à v_k mais pas à v_l. En particulier $v_1 \neq v_k$. Maintenant on considère le graphe $G' = (S, A')$ obtenu à partir de $G = (S, A)$ tel que

$$A' = (A \setminus \{\{v_1, v_l\}, \{v_k, v_m\}\}) \cup \{\{v_1, v_k\}, \{v_m, v_l\}\}$$

On obtient un graphe simple G' ayant pour suite des degré $\mathbf{d}$ tel que v_1 soit adjacent à strictement plus de sommets dans $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$ ce qui est une contradiction ■

I.2.4 Construction de graphes à partir d'un autre

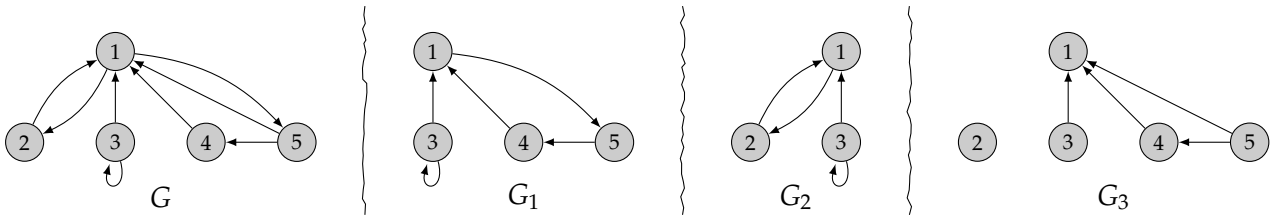
Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non).

Un *sous-graphe* de G est un graphe $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A$.

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe $G = (S, A)$ est un *sous-graphe induit* si A' est formé de tous les arcs (ou arêtes) de G ayant leurs extrémités dans S' (c'est à dire $\forall s, s' \in S', (s, s') \in A'$ si et seulement si $(s, s') \in A$).

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe $G = (S, A)$ est *couvrant* s'il contient tous les sommets de G (c'est à dire $S' = S$).

Exemple I.5. On considère un graphe G, un sous-graphe quelconque G_1, un sous-graphe induit G_2 et un sous-graphe couvrant G_3.



Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non). On note $G' = G - v$ le graphe induit lorsqu'on supprime de sommet v. Si $e \in E$ on note $G' = G - E$ le graphe G auquel on a supprimer l'arête e et $G = G' + e$.

I.3 Différents modes de représentation d'un graphe

Compte tenu de l'essor des graphes en informatique, il est naturel de s'intéresser aux différentes manières de les représenter. Différents modes de représentation peuvent être envisagées suivant la nature des traitements que l'on souhaite appliquer aux graphes considérés.

I.3.1 Représentation sagittale

La représentation sagittale est la représentation sous forme d'un dessin. Un même graphe peut avoir des représentations sagittales en apparence très différentes.

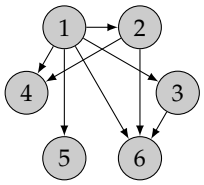
I.3.2 Définition par propriété caractéristique

Une même propriété caractérise les relation entre les différents sommets.

Exemple I.6. On considère le graphe $G = (S, A)$ avec $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour tout $s, s' \in S$ on a

$$(s, s') \in A \iff s \text{ divise strictement } s'.$$

Sa représentation sagittale est :



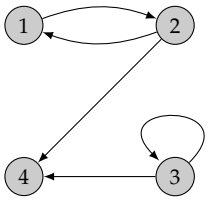
I.3.3 Listes d'adjacence

Un graphe peut être représenté à l'aide d'un *dictionnaire* : il s'agit d'une table à simple entrée où chaque ligne correspond à un sommet et comporte la liste des successeurs (ou des prédécesseurs) de ce sommet.

En pratique pour stocker un graphe orienté $G = (S, A)$, on ordonne les sommets $s_1, \dots, s_n$ et le graphe G est représenté par deux listes d'adjacences (LS, TS) définies par :

- LS : liste de longueur $|A|$ appelé *liste des successeurs*, elle contient les successeurs du sommets s_1, puis ceux de s_2 jusqu'à ceux de s_n, si un sommet n'a pas de successeur, on passe au sommet suivant.
- TS : liste de longueur $|S| + 1$ appelé *liste des têtes successeurs* qui indique la position du premier successeur de chaque sommet dans LS. La liste TS est définit comme suit :
  - $TS(1) = 1$;
  - pour $s_i \in S$, si s_i a un successeur alors $TS(s_i)$ est le numéro de la case de LS du premier successeur de s_i, sinon $TS(s_i) = TS(s_{i+1})$;
  - $TS(n+1) = |A| + 1$

Exemple I.7. Pour décrire un graphe, il suffit de donner le dictionnaire des successeurs ou bien le dictionnaire des prédécesseurs.



Sommets	Successeurs
1	2
2	1,4
3	3,4
4	∅

Sommets	Prédecesseurs
1	2
2	1
3	3
4	2,3

La représentation sous forme de liste est :
$LS = (2, 1, 4, 3, 4) \qquad TS = (1, 2, 4, 6, 6)$

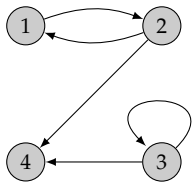
I.3.4 Matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice carrée $(m_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ définie par

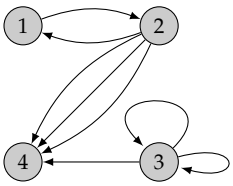
$$m_{i,j} = \begin{cases} k \text{ s'il y a } k \text{ arêtes allant de } i \text{ à } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si le graphe n'est pas orienté, la matrice est symétrique.

Exemple I.8. Exemples de matrices d'adjacence de graphes orientés :

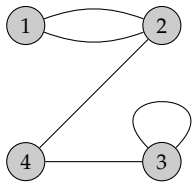


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

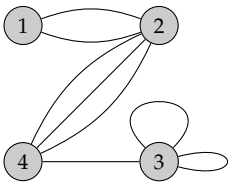


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et de graphes non orientés associés :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.3.5 Matrice d'incidence

La *matrice d'incidence* d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est une matrice à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ indicée par l'ensemble $S \times A$ tel que pour $(i, j) \in S \times A$ on a $m_{i,j} = 1$ si le sommet i est l'extrémité de l'arête j, $m_{i,j} = -1$ si i est l'origine de j, et 0 sinon. On remarque que, puisque chaque colonne correspond à une arête, il doit y avoir exactement un 1 et un -1 sur chaque colonne.

I.3.6 Comparaison des différentes méthodes

On s'intéresse ici à l'espace nécessaire pour stocker un graphe $G = (S, A)$, les différentes méthodes ont leurs avantages et inconvénients. En voici un aperçu :

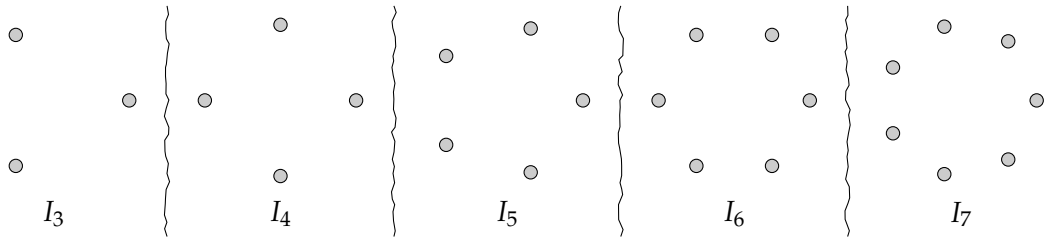
Méthode de représentation	Espace de stockage	Autre avantage
Liste des arcs	$2\|A\|$	
Liste d'adjacence	$\|S\| + \|A\| + 1$	- efficace pour stocker des graphes creux - efficace pour implémenter des algorithmes de parcours (section III.3)
Matrice d'adjacence	$\|S\|^2$	- efficace pour stocker des graphes denses - donne des informations sur la longueur d'un chemin (section II.1.2)
Matrice d'incidence	$\|S\| \times \|A\|$	- utiliser pour le calcule de circuit électique

I.4 Quelques classes de graphe importantes

On s'intéresse ici à définir quelques classes de graphes non-orientés dont la plupart sont simple (non multi-arête et sans boucle).

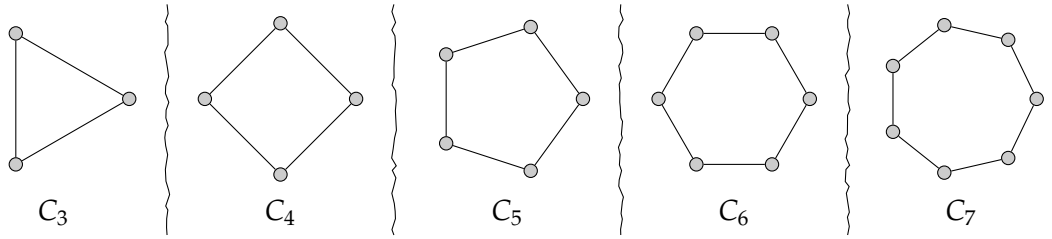
I.4.1 Graphes isolés

Le *graphe isolé d'ordre n* est un graphe à n sommets sans arête, on le note I_n.



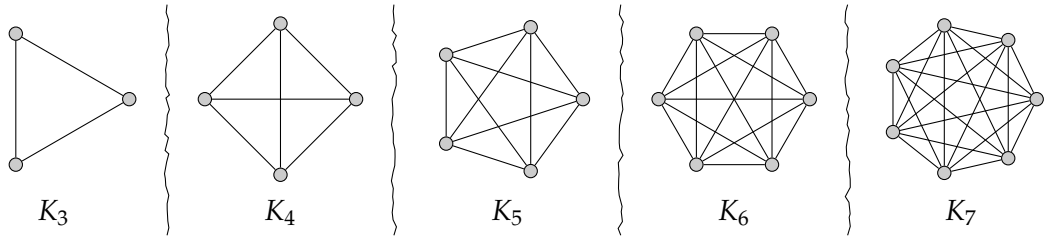
I.4.2 Graphes cycliques

Le *graphe cyclique d'ordre n* est le graphe à n sommets $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ tels que les arêtes sont $A = \{\{s_i, s_{i+1}\} : i \in [1, n]\} \cup \{\{s_n, s_1\}\}$, on le note C_n.



I.4.3 Graphes complets

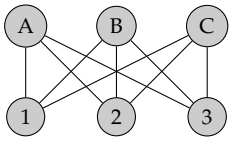
Le *graphe complet d'ordre n* est le graphe simple à n sommets dont tous les sommets sont reliés deux à deux, on le note K_n.



I.4.4 Graphe biparti

Un graphe est *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête ait une extrémité dans X et l'autre dans Y.

On définit le *graphe biparti complet* entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets comme le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet su deuxième ensemble. On le note $K_{n,m}$.

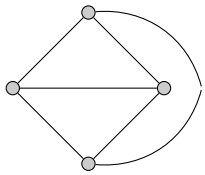


$K_{3,3}$

I.4.5 Graphes planaires

Un graphe non-orienté (pas forcément simple) est *planaire* s'il admet une représentation sagittale dans un plan sans que les arêtes se croisent.

Exemple I.9. K_4 est planaire puisque on peut le représenter de la façon suivante :



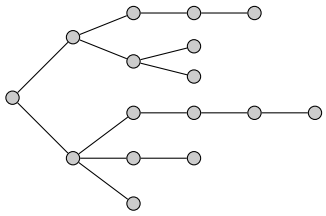
K_4

Est ce que K_5 et $K_{3,3}$ sont planaires ?

I.4.6 Arbres

Définition I.3. Un *arbre* se définit de manière inductive par :
- le graphe formé par un sommet est un arbre ;
- si $G = (S, A)$ est un arbre, alors pour $s \in S$ et x un élément quelconque n'appartenant pas à S, le graphe $G' = (S \cup \{x\}, A \cup \{\{x, s\}\})$ est un arbre.

Un exemple d'arbre :



Remarque I.1. Au chapitre III on verra une définition équivalente liée à la connexité.

Chapitre II

Problèmes de chemins dans un graphe

II.1 Notion de chemin

II.1.1 Définitions

Définition II.1. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté (resp. non-orienté). Un *chemin* (resp. une *chaîne*) dans G est une suite de sommets $C = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k)$ telle qu'il existe un arc (resp. une arête) entre chaque couple de sommets successifs de C. Ce qui s'écrit :

— si $G = (S, A)$ est orienté alors pour tout $i \in [0, k-1]$ on a $(s_i, s_{i+1}) \in A$,

— si $G = (S, A)$ est non-orienté alors pour tout $i \in [0, k-1]$ on a $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$,

On appellera :

Chemin (resp. chaîne) simple **:** un chemin (resp. chaîne) dont tous les arcs (resp. arêtes) sont différents.

Chemin (resp. chaîne) élémentaire **:** un chemin (resp. chaîne) dont tous les sommets sont différents sauf peut être le départ et l'arrivée (pour autoriser les circuits ou cycles).

Circuit dans un graphe orienté **:** un chemin simple finissant à son point de départ.

Cycle dans un graphe non-orienté **:** une chaîne simple finissant à son point de départ.

II.1.2 Longueur d'un chemin

Longueur du chemin (de la chaîne) **:** nombre d'arcs (ou arêtes) du chemin.

Distance entre deux sommets **:** longueur du plus petit chemin (chaîne) entre ces deux sommets.

Diamètre d'un graphe **:** plus grande distance entre deux sommets de ce graphe.

Remarque II.1. Dans le cas d'un graphe valué où l'on associe un réel à chaque arcs (ou arêtes), la longueur d'un chemin correspond à la somme des valeur de chaque arcs (ou arêtes) du chemin.

Exemple II.1. On peut calculer le diamètre des graphes classiques :

— diamètre de K_n : 1 ;

— diamètre de $K_{n,m}$: 2 ;

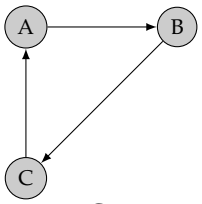
— diamètre de C_n : $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

II.2 Connexité

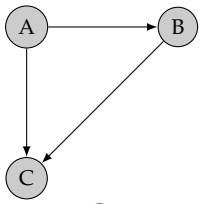
Définition II.2 (Connexité et forte connexité)**.** Un graphe non-orienté est *connexe* si pour tout couple de sommets s et s', il existe une chaîne reliant s à s'.

Un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté associé est connexe. Un graphe orienté est *fortement connexe* si pour tout couple de sommets s et s', il existe une chemin reliant s à s'.

Exemple II.2 (Graphe connexe et fortement connexe). G_1 est fortement connexe tandis que G_2 est connexe mais non fortement connexe.



G_1



G_1

Une arrête e d'un graphe connexe $G = (S, A)$ est un *pont* ou *isthme* si $X - e$ (graphe obtenu en supprimant l'arête e) n'est pas connexe.

Proposition II.1

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe, une arête est un pont si elle ne se trouve sur aucun cycle.

Démonstration : $\Leftarrow$: Soit s et s' les extrémités de e. Si e n'est pas un pont, il existe une chaîne $s = s_0, s_1, s_2, \dots s_n = s'$ allant de s à s' dans $G - e$. Ainsi en rajoutant e on obtient un cycle sur G.

$\Rightarrow$: Supposons que e est sur un cycle C, on va montré que $G - e$ est connexe. Soit s, s' deux sommets de $G - e$, comme G est connexe il existe une chaîne reliant s à s' dans G. Si e n'apparait pas dans cette chaîne alors on a une chaîne dans $G - e$. Si e apparait dans cette chaîne, il suffit d'enlever l'arête e et la remplacer par la partie du cycle C qui ne contient pas e. ■

Pour un graphe quelconque, on peut le décomposé en sous graphe connexe. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté, on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_G$ sur S par

$$s\mathcal{R}_G s' \iff \text{il existe une chaîne reliant } s \text{ à } s'.$$

Définition II.3. Etant donné un graphe $G = (S, A)$, un sous-graphe induit par les sommet d'une classe d'équivalence est une composante connexe de G.

Autrement dit, une composante connexe C d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble maximal de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par une chaîne. Formellement, si $s \in C$ alors on a :

— pour tout $s' \in C$ il existe une chaîne reliant s à s',
— pour tout $s' \in S \setminus C$, il n'existe pas de chaîne reliant s à s'.

De même pour un graphe orienté, soit $\vec{G} = (S, A)$ un graphe orienté, on définit la relation $\vec{\mathcal{R}}_{\vec{G}}$ sur S par

$$s\vec{\mathcal{R}}_{\vec{G}}s' \iff \text{il existe un circuit allant de } s \text{ à } s' \text{ et un circuit de } s' \text{ à } s.$$

Définition II.4. Etant donné un graphe orienté $\vec{G} = (S, A)$, un sous-graphe induit par les sommet d'une classe d'équivalence de $\vec{\mathcal{R}}_{\vec{G}}$ est une composante connexe de G.

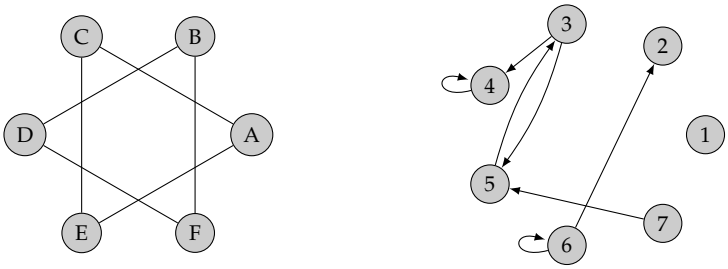
Quelques propriétés :
— Les composantes connexes (resp. fortement connexe) d'un graphe $G = (S, A)$ forment une partition de S.
— Un graphe est connexe (resp. fortement connexe) si et seulement s'il a une seule composante connexe (resp. fortement connexe).
— Le sous-graphe induit par une composante connexe (resp. fortement connexe) est connexe (resp. fortement connexe).
— La composante connexe C qui contient un sommet $s \in S$ est

$$C = \{s' \in S : \text{il existe une chaîne reliant } s \text{ à } s'\}$$

— La composante fortement connexe C qui contient un sommet $s \in S$ est

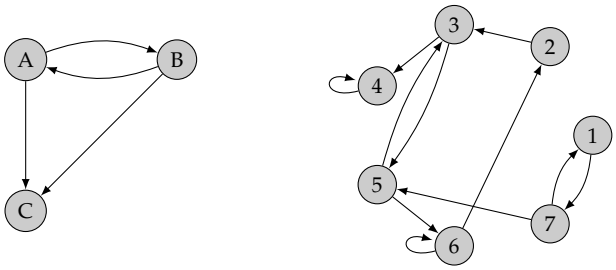
$$C = \{s' \in S : \text{ il existe un chemin reliant } s \text{ à } s' \text{ et un chemin reliant } s' \text{ à } s\}$$

Exemple II.3 (Composantes connexes). Les composantes connexes de G_1 sont $\{A, C, E\}$ et $\{B, D, F\}$ tandis que celles de G_2 sont $\{1\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5, 7\}$ et $\{4\}$.



G_1 G_2

Exemple II.4 (Composantes fortement connexes). Les composantes fortement connexes de G_1 sont $\{A, B\}$ et $\{C\}$ tandis que celles de G_2 sont $\{1, 7\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$ et $\{4\}$.



G_1 G_2

II.3 Graphe k-connexe

Définition II.5 (Coupe de sommet)**.** Soit $G = (S, A)$ un graphe. Un *ensemble d'articulation* est un ensemble de sommets $S' \subset S$ tel que $G - S'$ ne soit pas connexe.

On note $\kappa(G)$ la taille minimale d'un ensemble d'articulation d'un graphe G :

$$\kappa(G) = \min\{|S'| : S' \subset S \text{ tel que } G - S' \text{ n'est pas connexe ou réduit à un sommet}\}$$

Un graphe G est k-connexe si $\kappa(G) \geq k$.

Si G n'est pas connexe, on a $\kappa(G) = 0$. On a $\kappa(K_n) = n - 1$ et si $n \geq 3$ $\kappa(C_n) = 2$.

Définition II.6 (Coupe d'arête)**.** Soit $G = (S, A)$ un graphe. Un *ensemble de coupure* est un ensemble d'arête $A' \subset A$ tel que $G - A'$ ne soit pas connexe.

On note $\lambda(G)$ la taille minimale d'un ensemble de coupure d'un graphe G :

$$\lambda(G) = \min\{|A'| : A' \subset A \text{ tel que } G - A' \text{ n'est pas connexe}\}$$

Un graphe G est l-connexe par arête si $\lambda(G) \geq l$.

Exemple II.5. Si G n'est pas connexe, on a $\lambda(G) = 0$.

On a $\lambda(K_n) = n - 1$ et si $n \geq 3$ $\lambda(C_n) = 2$.

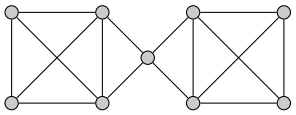
Théorème II.2

On a $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Démonstration : Si le degré minium est $\delta(G)$ alors les $\delta(G)$ d'un sommet réalisant ce minimum réalise une coupe. On a donc $\lambda(G) \leq \delta(G)$

La deuxième inégalité est une conséquence du Théorème de Menger. En effet, si un ensemble $A' \subset A$ déconnecte G, on prend deux sommet s et s' dans des composantes connexes de $G \setminus A$. Il y a moins de $|A'|$ chemin distinct allant de s à s' donc $|A'| \geq \kappa(G)$. ■

Exemple II.6. Le graphe suivant vérifie $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$ et $\delta(G) = 3$.



G

Proposition II.3

Soit S_1 et S_2 deux sous-ensemble de S d'un graphe $G = (S, A)$ simple. Le nombre maximal de chemin disjoints allant de S_1 est égal au cardinal du plus petit ensemble séparant S_1 et S_2.

Démonstration : Soit n le cardinal d'un ensemble maximal noté N de chemins disjoints allant de S_1 à S_2 et m le cardinal d'un ensemble de sommets séparant S_1 et S_2.

Pour séparer S_1 et S_2, il est nécessaire de supprimer un sommet sur chacun des n chemins. On a donc $n \leq m$.

On raisonne par récurrence sur $|A|$. Si $|A| = 0$, alors N est égal à $S_1 \cap S_2$. Ainsi N est un ensemble séparant donc $m = n$.

Supposons que A contient une arête $e = \{u, v\}$ et que tout graphe avec strictement moins d'arête vérifie le théorème. On considère le graphe $G.e$, appelé contraction de G pour l'arête e, obtenu en supprimant l'arête e et en identifiant les extrémités de celle ci, on note v_e ce sommet. Soit $S_1' = S_1 \cap V(G.e)$ et $S_2' = S_2 \cap V(G.e)$ auquel on a éventuellement rajouter v_e suivant que u ou v appartient à S_1 ou S_2. Soit m' le cardinal d'un ensemble S' de taille minimale séparant S_1' et S_2' dans $G.e$. Par hypothèse de récurrence, il existe m' chemin intérieur disjoint de S_1' à S_2'. Ces chemins induisent m' chemins disjoints de S_1 à S_2 dans G donc $n \geq m'$.

Si $v_e \notin S'$ alors S' est un ensemble séparant dans G donc $m' \geq m$ donc $n \geq m$.

Si $v_e \in S'$, alors $S'' = S' - \{v_e\} \cup \{u, v\}$ est un sous ensemble de S formé de $m' + 1$ sommets qui sépare S_1 et S_2. Donc $m' + 1 \geq m$. Tout chemin de S_1 à S_2 dans G passe par un sommet de S'' donc tout ensemble de sommets séparant S_1 et S'' sépare S_1 et S_2 et

contient donc au moins m sommets. Par hypothèse de récurrence, le nombre n'' de chemins disjoints de S_1 à S'' dans $G - e$ est au moins m. Soit P l'ensemble de cardinal au moins m des extrémités de ces chemins. Un ensemble séparant S_2 de P dans $G - e$ sépare S_2 de S_1 dans $G - e$ donc est de cardinal au moins m. Il existe donc m chemins disjoints de S_2 à P. On a construit ainsi m chemins distincts de S_1 à S_2. Donc $n \geq m$. ■

Théorème II.4 Théorème de Menger

Un graphe est k-connexe par les sommets si et seulement si toute paires de noeuds distincts est reliée par au moins k chaînes dont les noeuds internes sont tous disjoints.

Démonstration : $\Leftarrow$: Si toute paire de sommet est connectée par k chemins indépendant alors si on enlève $k - 1$ sommet, tout paire reste connectée. On en déduit que $\kappa(G) \geq k$.

$\Rightarrow$: Si un graphe est k connexe, lorsqu'on enlève $k - 1$ sommets, le graphe reste connexe. Ainsi pour toute paire de sommet, d'après le résultat précédent, on peut trouver k chaines distinctes les reliant. ■

Proposition II.5

On peut orienter un graphe de telle sorte qu'il soit fortement connexe si et seulement si il est 2-connexe par les arêtes.