

Arbres

1 Arbres et forêts

Un graphe acyclique est un graphe qui ne contient pas un cycle. On cherche à déterminer le nombre d'arête en fonction du nombre de sommet.

Théorème 1

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Si G est connexe alors $|A| \geq |S| - 1$.
- Si G est acyclique alors $|A| \leq |S| - 1$.

Exercice 1. Soit $G = (S, A)$ un graphe, on n le nombre de sommet.

1. Montrer par récurrence sur n que si le graphe est connexe alors il comporte au moins $n - 1$ arêtes.
2. Montrer que si G a tous les sommets de degré supérieur ou égal à 2 alors il possède un cycle. En déduire, qu'un graphe acyclique admet un sommet de degré 0 ou 1.
3. Montrer par récurrence sur n , le nombre de sommet, que si G est acyclique alors il possède au plus $n - 1$ arêtes.

Définition 1. Un **arbre** est un graphe non orienté, connexe, sans cycle.

Une **forêt** est un graphe non orienté sans cycle (chacune de ses composantes connexes est un arbre).

Les sommets de degré 1 ou 0 sont appelés **feuilles**, les autres sommets sont appelés **noeuds**.

Proposition 2

Soit G un graphe non orienté à n sommets. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est connexe sans cycle ;
- G est connexe et a $n - 1$ arêtes ;
- G est connexe et la suppression de n'importe quelle arête le déconnecte ;
- G est sans cycle et a $n - 1$ arêtes ;
- G est sans cycle et l'ajout de n'importe quel arête crée un cycle ;
- entre toute paire de sommets de G il existe une unique chaîne élémentaire ;

Théorème 3

Tout graphe connexe peut s'obtenir par ajout d'un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommets.

- Exercice 2.**
1. Montrer les équivalences dans la proposition 2.
 2. Prouver le théorème 3, on peut faire un raisonnement par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe.

Exercice 3 - Caractérisation de la suite des degré. Soit G un graphe connexe à $n \geq 2$ sommet.

1. Montrer que G est un arbre si et seulement si la suite des degrés $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ vérifie :

$$\sum_i d_i = 2(n - 1).$$

2. Pour $n \in [2, 6]$, écrire toutes les suites de degré possibles pour un arbre à n sommet.
3. A isomorphisme près, donner tous les arbres non orientés d'ordre inférieur à 6.

- Exercice 4 - Un peu de chimie.**
1. Montrer que la représentation graphique des alcanes (hydrocarbures) de formule C_nH_{2n+2} est un arbre (on rappelle que l'atome de carbone est de valence 4 et celui d'hydrogène, de valence 1).
 2. Pour n entier allant de 4 à 7, donner le nombre d'isomères de formule C_nH_{2n+2} et dessiner la représentation graphique de chaque isomère obtenu. On rappelle que deux molécules sont des isomères si elles sont composées des mêmes atomes (elles ont la même formule brute) mais dont la répartition des atomes sont différentes (ils ont des propriétés chimiques, physiques ou autres distinctes).

Exercice 5 - Centre d'un graphe. Un centre d'un graphe G est un sommet u tel que $\max\{d(u, v) : v \in V\}$ est aussi petit que possible.

1. Soit T un arbre sur au moins trois sommets, et soit T' l'arbre obtenu en supprimant de T toutes ses feuilles. Montrer que T et T' ont les mêmes centres.
2. En déduire que tout arbre a soit un unique centre, soit deux centres adjacents.

Exercice 6 - Forêt couvrante maximale. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté (pas forcément connexe). On appelle forêt couvrante maximale tout sous-graphe de G couvrant, sans cycle, et telle que l'ajout quelconque d'une arête de A crée un cycle.

1. Montrer que si G est connexe, toute forêt couvrante maximale est un arbre couvrant.
2. Montrer que le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante maximale est $|S| - k$, où k est le nombre de composantes connexes de G .

2 Graphe orienté sans circuits

Théorème 4

Un graphe orienté G est sans circuit si et seulement si on peut attribuer à chaque sommet s un nombre $r(s)$, appelé le **rang** de s , tel que pour tout arc (s, t) de G on ait $r(s) < r(t)$.

- Exercice 7.**
1. Montrer que si un graphe admet une fonction rang alors le graphe n'a pas de circuit.
 2. Montrer que l'algorithme suivant termine et que si le graphe n'a pas de circuit il attribue une fonction rang au graphe.

Algorithm 1: Algorithme de calcul du rang

Data: Un graphe orienté sans circuit $G = (S, A)$

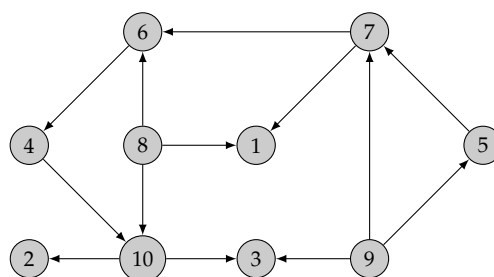
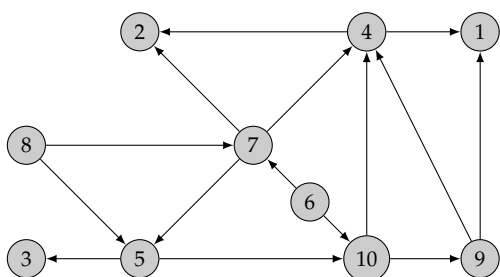
Result: Une fonction rang $r : S \rightarrow \mathbb{N}$ de G

```

rang ← 0;
X ← S;
R ← ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X;
while X ≠ ∅ do
    r(v) ← rang pour tout sommet v ∈ R;
    X ← X \ R;
    R ← les sommets sans prédécesseur du graphe induit par les sommets X;
    rang ← rang + 1;

```

3. Décomposer les graphes suivants en niveaux :



Arbres (Solutions)

Correction 1 1. On montre le résultat récurrence sur l'ordre du graphe n .

Initialisation : Le résultat est évident pour $n = 1$ et $n = 2$.

Induction : Supposons la propriété prouvée sur les graphes connexes d'ordre n . Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe à $n + 1$ sommets. La connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1. On a alors deux cas :

- si chaque sommet est de degré au moins 2, alors le lemme de la poignée de main conduit à $2|A| = \sum_{s \in S} d(s) \geq 2n$ donc $|A| \geq n$;
- s'il existe un sommet s de degré 1 alors, le graphe induit G' obtenu en éliminant s et l'arête dont il est l'extrémité, est un graphe connexe de n sommets qui possède exactement une arête de moins que G . D'après l'hypothèse de récurrence, G' possède donc au moins $n - 1$ arêtes, d'où G en possède au moins n .

2. La preuve utilise un algorithme de marquage. Initialement tous les sommets sont non marqués. Un sommet s_1 est marqué arbitrairement. L'algorithme construit alors une séquence $s_1, \dots, s_k$ de sommets marqués en choisissant arbitrairement pour s_{i+1} un sommet non marqué adjacent à s_i . L'algorithme s'arrête lorsque s_k ne possède plus de voisin non marqué. Puisque ce sommet est de degré au moins 2, il possède un voisin $s_j \neq s_{k-1}$ dans la séquence, $j < k - 1$. On en déduit que $(s_k, s_j, s_{j+1}, \dots, s_{k-1}, s_k)$ est un cycle.

3. On va montrer cette propriété par récurrence sur le nombre de sommets du graphe $G = (S, A)$.

Initialisation : Si G est d'ordre 1, comme G est acyclique il n'y a pas de boucle, il ne possède donc aucune arête et la propriété est vérifiée.

Induction : Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la au rang $n + 1$. Comme G est acyclique, par la question précédente, il existe un sommet s de degré 0 ou 1. Considérons le graphe induit G' par les sommets $S \setminus \{s\}$. Ce graphe est acyclique et possède n sommets, par hypothèse d'induction G' a au plus $n - 1$ arêtes. On en déduit que G a au plus n arêtes car $d(s) \leq 1$.

Correction 2 1.

2. On raisonne par récurrence sur le nombre n de cycles élémentaires du graphe.

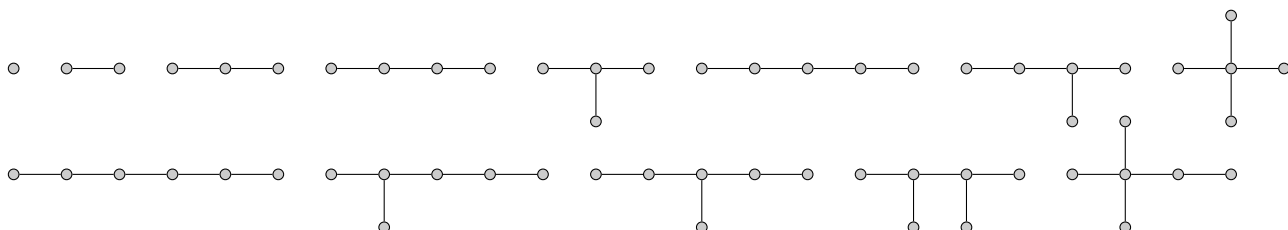
Initialisation : Si $n = 0$, le graphe est connexe et sans cycle, c'est donc un sommet isolé, il s'agit donc d'un arbre.

Induction : Supposons que le résultat soit établi pour tout graphe connexe n'ayant pas plus de n cycles élémentaires. Soit G un graphe connexe avec $n + 1$ cycles élémentaires. On considère alors le sous-graphe G' obtenu en enlevant uniquement une arête (s_1, s_2) qui appartient à un cycle $(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Il est clair qu'ainsi on brise au moins un cycle élémentaire parmi ceux de G . De plus, tous les cycles de G' sont des cycles de G , donc G' possède au plus n cycles élémentaires (peut-être en a-t-on brisé plus d'un). De plus, le graphe G' est encore connexe, puisque si l'on veut passer de s_1 à s_2 , il suffit de faire le tour via le chemin $(s_2, s_3, \dots, s_k, s_1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que G' peut-être obtenu à partir d'un arbre T par ajout d'un certain nombre d'arêtes. Il suffit alors d'ajouter l'arête (s_1, s_2) pour retrouver G , ce qui achève la démonstration.

Correction 3 1.

2.

3. Les arbres non orienté d'ordre inférieur à 6 à isomorphisme près sont :



- Correction 6**
1. Soit $G' = (S, A')$ une forêt couvrante maximale de G . On va montrer par l'absurde que G' est connexe. Soient $s, s' \in S$, comme G est connexe, il existe un chemin $s = s_0, \dots, s_n = s'$ allant de s à s' . Soit i le premier entier tel que $\{s_i, s_{i+1}\} \notin A'$. Si on rejoue cette arête à A' , on obtient un cycle donc il existe un chemin dans G' allant de s_i à s_{i+1} . En raisonnant de proche en proche, on réalise un chemin allant de s à s' dans G' .
 2. D'après la question précédente, une forêt couvrante maximale est composée d'arbre sur chacune de ses composantes connexes. Le nombre d'arête d'un arbre est égal au nombre de sommet moins 1, on en déduit le résultat.

- Correction 7**
1. Si $G = (S, A)$ comporte un circuit C , il n'est pas possible de trouver une telle fonction $r : S \rightarrow \mathbb{R}$. Sinon, il existe $t \in S$ tel que $r(t) = \max\{r(s) : s \in C\}$ et en considérant l'arc $(t, u) \in C$, on aurait $r(t) \leq r(u)$ ce qui est en contradiction avec la définition du rang.
 2. Réciproquement, si G n'a pas de circuit, il existe au moins un sommet sans prédécesseur dans G (sans cela, en remontant successivement d'un sommet à un prédécesseur, on finirait par fermer un circuit). Ainsi, on peut attribuer séquentiellement des valeurs aux sommets du graphe à l'aide de l'algorithme 1, ce qui conclura la démonstration.