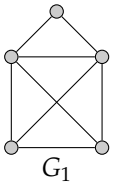
Cheminement eulérien et hamiltonien

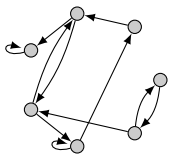
1 Chemins eulériens

Définition 1. Soit G un graphe non orienté. Une chaîne (resp. un cycle) **eulérienne** est une chaîne (resp. un cycle) qui passe une et une seule fois par toutes les arêtes de G.

On définit les mêmes notions pour un graphe orienté G : un chemin (resp. un circuit eulérien) est un chemin (resp. un circuit) passant une et une seule fois par tous les arcs de G.

Exemple 1. Le graphe G_1 admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. Le graphe G_2 admet un chemin eulérien mais pas un circuit.


G_1


G_2

Théorème 1 ***Caractérisation des graphes eulériens***

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. Il admet un cycle eulérien si et seulement si $d(s)$ est pair pour tout $s \in S$.

Si seulement deux sommets ne vérifient pas les conditions précédentes alors G admet une chaîne Eulériene.

Exercice 1.

1. Monter qu'un graphe admettant un cycle eulérien a tout ses sommets de degré pair.
2. Considérons l'algorithme suivant :

Algorithm 1: Algorithme de marquage pour trouver un cycle

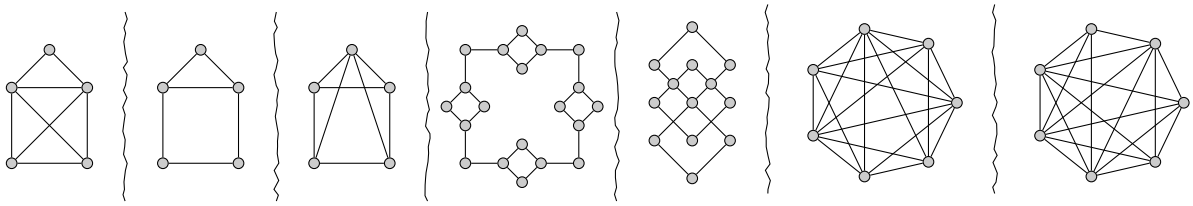
Data: Un graphe $G = (S, E)$
Result: Une liste de sommet qui forme un cycle

$l \leftarrow ()$;
$s \leftarrow$ un sommet quelconque de S;
$s' \leftarrow$ un sommet inexistant;
while *s n'est pas dans l* **do**
  mettre s dans l;
  $s'' \leftarrow s$;
  $s \leftarrow$ choisir un voisin de s différent de s';
  $s' \leftarrow s''$;
Effacer les sommets placer dans la liste avant s;

Montrer que si tous les sommets de G sont de degré plus grand ou égal à 2 alors l'algorithme précédent termine sans problème (la troisième ligne de la boucle while n'est pas vérifié pour tout graphe). En déduire que tout graphe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à 2 possède au moins un cycle.

3. Montrer que si G admet un cycle C et que le graphe $G - C$ admet un cycle eulérien alors G admet un cycle eulérien. On rappelle que $G - C$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le cycle C.
4. Montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes que tout graphe connexe dont les degrés de chaque sommet est pair admet un cycle eulérien.

5. Montrer que si un graphe connexe a tout ses sommets de degré pair sauf deux alors le graphe admet une chaîne eulérienne.
6. Parmis les graphes suivants, lesquels admettent un cycle eulérien. Combien d'arêtes faut il rajouter au minimum pour obtenir un cycle eulérien ?



7. Donner un algorithme pour déterminer si un graphe admet un cycle ou une chaîne eulérienne.

Exercice 2 - Fil de fer. On dispose d'un fil de fer de 120cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimun faut-il couper le fil de fer ?

Exercice 3 - Craquage de digicode. L'accès d'un bâtiment est contrôlé par un digicode dont la combinaison est formée d'une suite de 4 lettres $x_1x_2x_3x_4$, appelé mot, ne pouvant prendre que 2 valeurs $x_i = 0$ ou 1. Pour entrer, sans connaître le code, il faut normalement tenter chacune des combinaisons possibles (1111, 1110, ...). Nous allons voir qu'il est possible d'entrer avec bien moins de tentatives.

En effet lorsqu'on saisit une chaîne de p lettres $x_1x_2x_3 \dots x_p$ le digicode teste successivement les sous-chaînes $x_1x_2x_3x_4$, $x_2x_3x_4x_5$,..., $x_{p-3}x_{p-2}x_{p-1}x_p$ (par exemple taper 111001 revient à tester 1110, 1100, 1001). Pour trouver la chaîne la plus courte possible permettant d'entrer dans le bâtiment sans connaître le code, on représente le problème par un graphe orienté G dont :

— les sommets représentent les mots de trois lettres $x_1x_2x_3$;

— on a un arc du sommet $x_1x_2x_3$ à $y_1y_2y_3$ si $x_2x_3 = y_1y_2$ successivement par ajout d'une lettre à la fin de la combinaison précédente, par exemple en ajoutant 0 à la fin de 111 on obtient une nouvelle chaîne 1110 donc on aura un arc : $111 \to 110$.

1. Quel est le nombre de sommet du graphe ? Quel sont les degrés entrant et sortant de chaque sommet ? En déduire le nombre d'arcs et si le graphe est eulérien.
2. Donner une représentation planaire du graphe G.
3. On cherche un suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 4 caractères apparaît exactement une fois. Que doit vérifier le chemin associé et en déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété.
4. Quel est la longueur minimale lorsque le code est un mot de longueur d sur un alphabet à n symboles ?

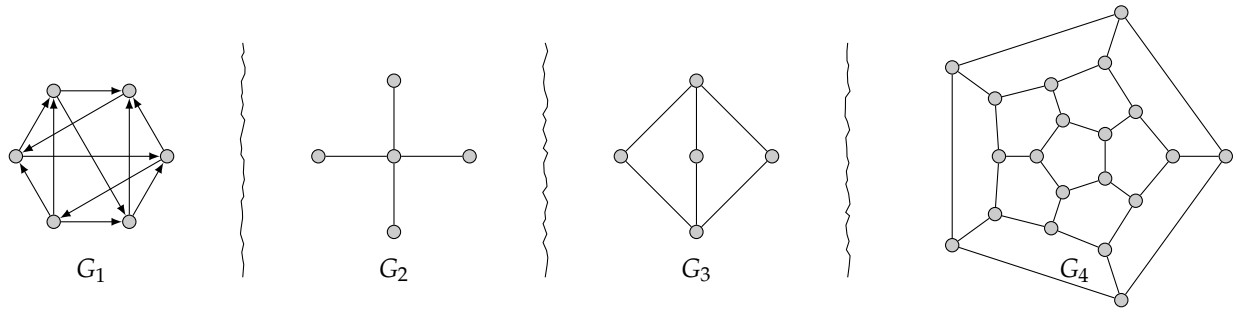
2 Chemin hamiltonien

Définition 2. Soit G un graphe non orienté. Un **cycle** (resp. une **chaîne**) **hamiltonien** est un cycle (resp. une chaîne) qui passe une et une seule fois par tous les sommets de G.

Les mêmes notions peuvent être définis pour un graphe orienté : un **circuit** ou un **chemin hamiltonien** est un circuit ou un chemin passant une et une seule fois par tous les sommets de G.

Un graphe est hamiltonien s'il admet un cycle hamiltonien.

Exemple 2. G_1 admet un circuit hamiltonien, G_2 n'admet ni chaîne ni cycle hamiltoniens, G_3 admet une chaîne hamiltonienne mais pas de cycles hamiltoniens et G_4 admet un cycle hamiltonien.

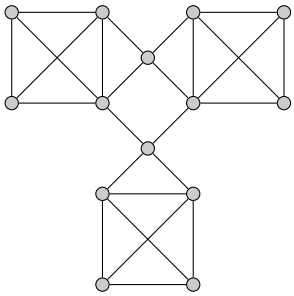


On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante exploitable dans la pratique pour décider si un graphe est hamiltonien ou non. De manière générale, la recherche de cycle, chaîne, circuit ou chemin Hamiltonien est un problème algorithmiquement difficile. En fait, on peut montrer que c'est un problème NP-complet.

Proposition 2

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. S'il existe $X \subset S$ tel que $|X|$ est strictement plus petit que le nombre de composante connexe de $G - X$ alors G n'a pas de cycle Hamiltonien.

Exemple 3. On peut utiliser ce théorème pour montrer que le graphe suivant n'a pas de cycle hamiltonien.



Exercice 4 - Condition nécessaire pour être Hamiltonien. Pour montrer la proposition précédente, on considère un graphe simple non orienté $G = (S, A)$ qui admet un cycle Hamiltonien C. Soit $X \subset S$, montrer que $G \setminus X$ admet au plus $|X|$ composantes connexes.

Proposition 3

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. Si pour toute paire de sommets non adjacent $u, v \in S$ on a $d(u) + d(v) \geq |S|$ alors G admet un cycle hamiltonien.

Corollaire 4

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. Si pour toute paire de sommets non adjacent $u, v \in S$ on a $d(u) + d(v) \geq |S| - 1$ alors G admet une chaîne hamiltonienne.

Exercice 5 - Condition suffisante pour être Hamiltonien. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté et on pose $n = |S|$.

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut avoir G.
2. Supposons que pour toute paire de sommets $u, v \in S$ on a $d(u) + d(v) \geq n$. En utilisant une récurrence sur $t = t = C_n^2 - |A|$, montrer que G admet un cycle Hamiltonien.
3. En déduire que si G vérifie que pour toute paire de sommets $u, v \in V$, on a $d(u) + d(v) \geq n - 1$ alors G admet une chaîne Hamiltonienne (indication : ajouter un sommet annexe à G et le relier à tous les sommets de G).
4. Le roi Arthur fait s'asseoir ses $2n$ chevaliers autour de la Table Ronde. Chacun des chevaliers possède au plus $n - 1$ ennemis parmi les autres chevaliers. Prouver que Merlin l'Enchanteur peut trouver un arrangement des $2n$ chevaliers de sorte qu'aucun ne soit assis à côté d'un de ses ennemis (bien sûr, l'animosité est réciproque, et seuls les chevaliers s'assoient autour de la table).

Exercice 6 - Réunions dans un club.

1. Un club de 9 personnes se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin ?
2. Généraliser la question précédentes au cas où le club à n personnes.
3. Le club de 9 personnes à cette fois deux tables, l'une de 4 places, l'autre de 5. Combien y a t'il de jours de réunion possibles ? Et avec trois tables de 3 places ?

Exercice 7. Vingt équipes de football participent à un tournoi. Le premier jour, chacune dispute un match. Le second jour, chaque équipe joue un autre match, contre une équipe différente de celle de la veille. Prouver qu'après ce second jour, il est possible de trouver un groupe de 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore rencontrées.

Cheminement eulérien et hamiltonien (Solutions)

Correction 1 1. Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe. Pour qu'il admette un cycle Eulérien il faut qu'en chaque sommet lorsqu'on arrive par une arête on puisse repartir par un autre arête. On obtient donc que $d(s)$ est pair si le graphe est orienté pour chaque sommet $s \in S$.

2. L'algorithme proposé est un algorithme de marquage, chaque sommet visité étant placé dans la liste l . Initialement tous les sommets sont non marqués. Un sommet s_1 est marqué arbitrairement. L'algorithme construit alors une séquence $s_1, \ldots, s_k$ de sommets marqués en choisissant arbitrairement pour s_{i+1} un sommet non marqué adjacent à s_i. L'algorithme s'arrête lorsque s_k ne possède plus de voisin non marqué. Puisque ce sommet est de degré au moins 2, il possède un voisin $s_j \neq s_{k-1}$ dans la séquence, $j < k-1$. On en déduit que $(s_k, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{k-1}, s_k)$ est un cycle.

3. Supposons que G admet un cycle $C = (s_0, \ldots, s_k, s_0)$ et que $G - C$ admet un cycle Eulérien noté $C' = (s'_0, s'_1, \ldots, s'_n, s'_0)$. Comme G est connexe, il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que le sommet s_i soit dans C'. On peut supposer que s_i est s'_0. Ainsi on peut considérer le cycle $(s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{i-1}, s_i = s'_0, s'_1, \ldots s'_n, s'_0)$, il passe une et une seule fois par toutes les arêtes de C et une et une seule fois par toutes les arêtes de $G - C$. On en déduit que c'est un chemin eulérien de G.

4. On démontre par récurrence sur le nombre d'arcs que pour un graphe connexe G, si chaque sommet $s \in S$ est de degré pair alors G admet un cycle eulérien.

   Initialisation : Si $|A| = 0$, on a un graphe connexe sans arêtes, c'est à dire un seul sommet isolé qui admet un cycle eulérien.

   Induction : On suppose que le théorème est vrai pour tout graphe ayant un nombre d'arêtes inférieur ou égal à n (hypothèse de récurrence forte). Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe tel que $|A| = n + 1$ et pour chaque sommet $s \in S$ est de degré pair. Comme le graphe est connexe et que le degré de chaque sommet est pair, on en déduit que G admet un cycle élémentaire $C = (s_1, s_2, \ldots, s_k, s_1)$.

   Soit G' le sous-graphe de G auquel on a supprimé les arêtes de C. Le graphe G' n'est pas forcément connexe mais vérifie $d(s)$ pairs pour chacun de ses sommet s. On applique l'hypothèse de récurrence sur chacune de ses composantes qui admettent donc des cycles eulériens. On combine alors ces différents cycles eulériens avec le cycle C, pour former un cycle eulérien sur G de la façon suivante : on parcourt C depuis un sommet initial arbitraire et, à chaque fois que l'on rencontre une des composantes connexes de G' pour la première fois, on insère le cycle eulérien considéré sur cette composante. S'agissant d'un cycle, on est assuré de pouvoir poursuivre le parcours de C après ce détour. Il est facile de vérifier qu'on a ainsi bien construit un cycle eulérien sur G.

5. Si G admet une chaîne Eulérienne et admet un sommet de degré impair, soit c'est le point de départ de la chaîne, soit il arrive un moment où l'on ne pourra plus repartir ce qui constitue le sommet terminal de la chaîne. Ainsi, si seulement deux sommets sont de degré impair il peuvent servir de point de départ et d'arrivé d'un chemin passant par tous les arêtes du graphe, le graphe peut donc admettre une chaîne Eulérienne.

6. Il faut compter les degrés des sommets : Si tous les degrés sont pairs le graphe admet un cycle eulérien. Avec deux sommets impairs seulement il admet un chemin eulérien.

7. La preuve donne l'algorithme suivant :

Correction 3

Correction 4 Soit C un cycle Hamiltonien du graphe G. Alors pour tout ensemble de sommet $X \subset S$ on a $\text{comp}(C - X) \geq \text{comp}(G - X)$ puisque tout les sommet de X apparaissent dans C et G a plus d'arêtes que C.

De plus $|X| \geq \text{comp}(C - X)$. En effet si $|X| = 1$ on a $\text{comp}(C - X) = 1 = |X|$, ensuite, le retrait d'un sommet dans une chaîne laisse la chaîne connexe s'il s'agit d'une extrémité ou bien le coupe en deux s'il s'agit d'un sommet intérieur. Par récurrence on a $|X| \geq \text{comp}(C - X)$.

On a donc $|X| \geq \text{comp}(C - X) \geq \text{comp}(G - X)$.

Algorithm 2: Algorithme de recherche de cycle eulérien

Data: Un graphe $G = (S, E)$
Result: Une liste de sommet qui forme un cycle ou une chaîne eulérienne

---

if *G a deux sommets de degré impair* **then**
  écrire une chaîne C joignant les deux sommets;
else
  écrire un cycle C partant d'un sommet quelconque
while *C ne contient pas toutes les arêtes de G* **do**
  pour chaque sommet de C remplacer si possible le sommet par un cycle de début ce sommet ne contenant que des arêtes non prises dans C;

Correction 5

1. Le graphe simple a n sommet qui a le plus d'arête est le graphe complet K_n, le nombre d'arête correspond au nombre de façon de choisir deux sommets parmi n de manière non ordonné et sans remise. Il y a donc C_n^2 possibilités.
2. On procède par induction sur $t = C_n^2 - |A|$ où $n = |V|$. Si $t = 0$ alors G est complet donc il a un cycle Hamiltonien.
   Si $t > 0$ on choisit deux sommets u, v non relié et on considère $G' = G + \{u, v\}$. Par induction G' admet un cycle hamiltonien C. Si $\{u, v\} \notin C$, alors c'est aussi un cycle hamiltonien de G. Sinon, $u = v_1, v_2 \dots v_n = v$ forme un chemin hamiltonien. Soit $P = \{i : v_i \text{ et } v_1 \text{ adjacent}\}$ et $Q = \{i : v_{i-1} \text{ et } v_n \text{ adjacent}\}$ respectivement les ensemble de sommets respectivement adjacent à u et v. On a $|P| + |Q| = d(u) + d(v) \geq n$. Comme $P \cup Q = \{v_2, \dots, v_n\}$ on en déduit qu'il exist i tel que v_1 adjacent à v_i et v_n à v_{i-1}. On construit alors un cycle Hamiltonien.
3. Soit $x \notin V$, alors on considère le graphe G' qui correspond au graphe G où on rajoute le sommet x et toutes les arêtes entre x et tous les sommets de G. Soit u, v deux sommets de G non adjacent alors ils sont dans V, on a $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) = d_G(u) + d_G(v) + 2 \geq n + 1$. Ainsi G' admet un cycle hamiltonien C et $C - x$ sera une chaîne hamiltonienne de G.
4. Il suffit de montrer qu'un graphe simple de $k \geq 3$ sommets, chacun de degré supérieur ou égal à $\frac{k}{2}$, est hamiltonien. C'est une conséquence de la deuxième question.

Correction 6

1. Considérons le graphe complet K_9 à 9 sommets. Une composition de la table correspond à un cycle hamiltonien de K_9. Si deux compositions de table correspondent à deux cycles ayant une arête commune, cela signifie que les deux personnes reliées par cette arête se retrouvent côte à côte, le problème revient donc à déterminer le nombre de cycles hamiltoniens disjoints de K_9.
   Le graphe K_9 possédant $9 \times 8/2 = 36$ arêtes. Chaque cycle utilisant 9 arêtes, le nombre de cycle hamiltonien disjoint est au maximum égal à 4. Il vaut effectivement 4, comme le prouvent les 4 cycles hamiltoniens disjoints suivants :

   $$1,2,3,9,4,8,5,7,6 \qquad 1,3,4,2,5,9,6,8,7 \qquad 1,4,5,3,6,1,7,9,8 \qquad 1,5,6,4,7,2,8,1,9$$

2. En règle générale, k solutions sont possibles pour un graphe à $n = 2k + 1$ ou $n = 2k + 2$ sommets. Le même argument que précédemment donne cette valeur maximale, pour trouver une solution il faut construire les différents cycles hamiltoniens. Pour cela, on regarde les cycles de la forme $(\{i, i + j\})_{i \in [1,n]}$ avec $j \in [1, k]$.
3. Il s'agit toujours de décomposer le graphe complet en ensembles disjoints de 9 arêtes, mais cette fois, chaque ensemble doit correspondre à un cycle de 4 arêtes et un cycle de 5 arêtes. Avec trois tables de 3, chaque ensemble doit correspondre à trois tirangles. Le nombre maximum de solutions discuté précédemment reste donc valable dans ces deux situations : nous aurons au plus 36 / 9 = 4 solutions. Là encore, on peut trouver 4 solutions :
   — une table de 4 et une table de 5 :

   $$(1,2,3,4)(5,6,7,8,9) \qquad (2,4,6,8)(1,3,5,7,9) \qquad (...) \qquad (...)$$

   — trois tables de 3 :

   $$(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9) \qquad (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \qquad (1,5,9)(2,6,7)(3,4,8) \qquad (1,6,8)(2,4,9)(3,5,7)$$

Pour chacune des situations de cet exercice, plusieurs solutions sont possibles.

Correction 7 On construit un graphe G dont les sommets sont les 20 équipes, en reliant deux sommets par une arête rouge si et seulement s'ils correspondent à deux équipes qui se sont affrontées le premier jour, et par une arête verte pour le second jour. Ainsi, chaque sommet est l'extrémité d'exactement une arête rouge et une arête verte, et donc a pour degré 2. Dans chaque composante connexe, en partant d'un sommet arbitraire, et en suivant alternativement une arête rouge et une arête verte, on parcourt ainsi un cycle eulérien, qui est également un cyle hamiltonien. La bicoloration assure que ce cycle est de longueur paire. En choisissant un sommet sur deux dans chacun de ces cycles, on obtient ainsi 10 sommets indépendants, qui représentent bien 10 équipes dont deux quelconques ne se sont pas encore affrontées.