L3 ESR Année 2021-2022
TD Graphes **feuille n° 9**

Théorie algébrique des graphes (dose homéopathique)

Exercice 1 - Matrice d'adjacence. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté à n sommets que l'on notera $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La *matrice d'adjacence* M_G est définit de telle sorte que $m_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes de i à j.

1. Pourquoi la matrice d'adjacence est symétrique ?
2. Donner le graphe obtenu à partir de la matrice suivante :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $G = (S, A)$ un graphe de matrice d'adjacence M_G. Montrer que le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommets i au sommet j correspond au coefficient d'indice (i, j) de M_G^n.
4. Montrer qu'un graphe simple G est biparti si et seulement si pour tout entier impair positif k, la diagonale de M_G^k est nulle.
5. Montrer que le diamètre de G est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que tous les coefficients de $(M_G + Id)^n$ soient non nul.
6. Donner la matrice d'adjacence de $K_{n,n}$ le graphe biparti complet à n sommets.
7. A l'aide de la matrice d'adjacence, calculer le nombre de cycles de longueur k dans $K_{n,n}$.
8. Etant donné un graphe $G = (S, A)$, on note $P_G(X) = \det(M_G - X\mathrm{Id})$ le polynôme caractéristique de la matrice d'adjacence associée à G. Montrer que si G et G' sont isomorphe alors $P_G = P_{G'}$.
9. On suppose qu'il est de la forme $P_G(X) = (-X)^n + c_1(-X)^{n-1} + \cdots + c_n$. Si G est un graphe non orienté, montrer que :
   — c_1 est le nombre de boucle ;
   — si G est simple, $-c_2$ est le nombre d'arête ;
   — si G est simple, c_3 est le double du nombre de triangle.
10. Soit G un graphe simple. Montrer que si G est un graphe biparti alors pour toutes valeurs propres λ de M_G, $-\lambda$ est aussi une valeur propre de M_G avec la même multiplicité.