Université Toulouse III Année 2019-2020
TD Calculabilité et complexité **Feuille n° 1**

Modèles de calcul et complexités en temps et espace

Exercice 1 [Décrire un problème de décision]. Décrivez les problèmes suivants formellement sous forme d'un problème de décision. Présicez l'ensemble $\mathcal{L}$ des instances et la question à laquelle il faut répondre.

1. `PRIME` : Savoir si un entier est premier
2. `BIP` : Savoir si un graphe est biparti.
3. `TAU` : Connaissant une formule booléenne déterminer si elle est toujours vraie.
4. `HAM` : Existence d'un chemin hamiltonien.

Exercice 2 [Exemples de calculs]. Pour les problèmes suivants, donner une description d'une machine de Turing qui le resolve et donner la complexité en temps et en espace.

1. Tester si un entier écris en binaire est un multiple de 2.
2. Tester si un entier écris en binaire est une puissance de 2.
3. Tester si le mot en entrée est dans le langage $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$;
4. Tester si le mot en entrée est un palindrome.

Exercice 3 [Réduction de l'alphabet]. Considérons une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, q_a, q_r, \mathcal{A}, \#, \delta)$. Montrer qu'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}'$ d'alphabet d'entrée $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ et une fonction de codage $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^*$ telle que :

— $\mathcal{M}$ accepte $x \in \mathcal{A}^*$ si et seulement si $\mathcal{M}'$ accepte $\varphi(x) \in \mathcal{B}^*$;
— $\mathcal{M}(x)$ s'arrête en temps t alors $\mathcal{M}'(\varphi(x))$ s'arrête en temps au plus $6t\log(|\mathcal{A}|)$;
— $\mathcal{M}(x)$ utilise un espace s alors $\mathcal{M}'(\varphi(x))$ utilise un espace au plus $2s\log(|\mathcal{A}|)$.

Exercice 4 [Machine à plusieurs rubans]. Montrer qu'une machine de Turing à $k > 1$ rubans de travail fonctionnant en temps t peut être simulée par une machine de Turing à un seul ruban de travail fonctionnant en temps $O(t^2)$. D'où vient la perte de temps ?

Exercice 5 [Accélération]. Considérons une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui s'arrête sur l'entrée x au bout de t étapes de calcul en utilisant s cases mémoires.

1. Montrer qu'il existe une constante $\gamma_{\mathcal{M}}$ dépendante de la machine de Turing telle que :
$$s \leq t \leq \gamma_{\mathcal{M}}^s$$
2. Etant donné un entier entier $c \geq 1$. Montrer qu'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}'$ qui accepte les même entrées que $\mathcal{M}$ et telle que si $\mathcal{M}$ s'arrête sur l'entrée x en utilisant $s + |x|$ cases mémoires alors $\mathcal{M}'$ s'arrête sur la même entrée en $(1 + \frac{1}{c})|x| + \frac{s}{c}$ étapes au plus.
3. Etant donné un entier entier $c \geq 1$. Montrer qu'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}'$ qui accepte les même entrées que $\mathcal{M}$ et telle que si $\mathcal{M}$ s'arrête sur l'entrée x en t étapes alors $\mathcal{M}'$ s'arrête sur la même entrée en $(1 + \frac{1}{c})|x| + \frac{t}{c}$ étapes au plus.

Exercice 6 [Machine Universelle]. Montrer qu'il existe une machine de Turing universelle $\mathcal{U}$ sur l'alphabet $\{0,1\}$ sur qui prend en argument le code $\langle \mathcal{M} \rangle$ de la machine de Turing $\mathcal{M}$ et le code $\langle x \rangle$ d'une entrée x de $\mathcal{M}$ en binaire telle que :

- $\mathcal{M}(x)$ s'arrête si et seulement si $\mathcal{U}(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle x \rangle)$ s'arrête ;
- $\mathcal{U}(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle x \rangle)$ est un codage de $\mathcal{M}(x)$;
- si $\mathcal{M}(x)$ s'arrête en temps t et espace s alors $\mathcal{U}(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle x \rangle)$ s'arrête en temps inférieur à $\alpha_{\mathcal{M}}(1 + st)$ et utilise un espace inférieur à $\alpha_{\mathcal{M}}(s + 1)$.

$\alpha_{\mathcal{M}}$ est une constante dépendant de la machine $\mathcal{M}$ simulée.
Comment améliorer cette construction pour gagner en vitesse et espace de calcul ? Il est possible d'améliorer la construction pour que $\mathcal{U}$ utilise au plus un temps $\alpha_{\mathcal{M}}(1 + t \log(t))$ et un espace $\alpha_{\mathcal{M}}(s + \log(t))$.