Université Toulouse III Année 2021-2022
Anneaux-Corps **Feuille n° 4**

Polynômes

Exercice 1 [Arithmétique des anneaux de polynômes]. Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes

1. A est un corps ;
2. $A[X]$ est un anneau euclidien ;
3. $A[X]$ est un anneau principal ;

Exercice 2 [Algorithme d'Euclide].

1. Calculer le pgcd de $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = UP + VQ$. Même question dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer l'inverse de $X^3 - X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$.
3. Calculer $\mathrm{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$.

Exercice 3 [Etude de quotients].

1. Montrer que $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ est principal. On montrera que A est isomorphe à $\mathbb{C}[T]$.
2. Montrer que $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ n'est pas principal. On montrera que A est isomorphe à $\mathbb{C}[T^2, T^3]$.
3. Montrer que $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ est intègre mais non factoriel. On pourra montrer que l'image de y de Y est irréductible mais que l'idéal (y) n'est pas premier.
4. Montrer que $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ est intègre mais non factoriel.

Exercice 4 [Intersection de courbe algébrique]. Soient P, Q des polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$, tels que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$ dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X, Y]$.

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}(X)[Y]$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme $D \in C[X]$ non nul, et des polynômes $A, B \in \mathbb{C}[X, Y]$ tels que $D = AP + BQ$.
3. Montrer que $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$ est fini.

Exercice 5 [Critère d'Eisenstein].

1. Montrer que $X^6 + 30X^5 - 15X^3 + 6X - 120$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Soit p un nombre premier et $\varphi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ le p-ième polynôme cyclotomique. Montrer que φ_p est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. On pourra poser $Y = X + 1$.
3. Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer que $X^2 + Y^2 + Z^2$ est irréductible dans $K[X, Y, Z]$.

Exercice 6 [Racines]. Soit K un corps et $(a, b) \in K^\times \times K$.

1. Montrer que $P \in K[X]$ est irréductible si et seulement si $P(aX + b)$ est irréductible.
2. Soit $P \in Q[X]$ irréductible de degré supérieur à 2. Montrer que si α et α' sont deux racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$, alors $\alpha - \alpha' \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7 [Etude d'un exemple]. 1. Déterminer si le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + 11X - 4$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2. On considère le polynôme P comme un polynôme $\widetilde{P}$ sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en remplaçant ses coefficients par leurs classes modulo 3.
   (a) Décomposer $\widetilde{P}$ en facteurs irréductibles dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
   (b) Est-ce que l'anneau quotient $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\widetilde{P})$ est intègre ? Quel est le nombre d'éléments de A ?
3. (a) Déterminer tous les éléments $a \in A$ tels que $a^2 = 0$.
   (b) Montrer que si $a^3 = 0$, alors $a^2 = 0$.
   (c) Montrer que A n'est pas isomorphe à l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^3 - \overline{1})$.
   (d) Déterminer l'idéal I de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ engendré par les deux polynômes $\widetilde{P}$ et $X^3 - \overline{1}$.
   (e) Déterminer l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/I$.
4. Déterminer l'idéal J de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par P et $X^3 - 1$.

Exercice 8 [Probabilités]. Les probabilités des différents totaux qu'on peut obtenir en lançant deux dés et sommant les résultats obtenus sur les deux faces étonnent les personnes non familière aux probabilités. En effet, par exemple, la probabilité d'obtenir un total de 2 est de $\frac{1}{36}$ alors que la probabilité d'obtenir un total de 4 est de $\frac{1}{12}$, c'est à dire trois fois plus grande ! On peut se poser les deux questions suivantes :

1. Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce que la probabilité d'obtenir chacun des résultats $2, 3, \ldots, 12$, soit égal à $\frac{1}{11}$?
2. Combien y a t'il de façons de truquer deux dés pour que la probabilité des totaux de 2 à 12 soit la même que pour des dés honnêtes.