Anneaux

Exercice 1 [Diviseurs de 0]. Quelques questions autour des diviseurs de 0.

1. Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Si a est un diviseur de 0 montrer que si $ab = ac$ alors $b = c$.
3. Dans un anneau commutatif, montrer que le produit ab n'est pas un diviseur de 0 si et seulement si a et b ne le sont pas.
4. Soit k un corps et $P \in k[X]$. Déterminer les diviseurs de 0 dans $k[X]/(P)$.

Exercice 2 [Eléments inversibles]. Soit A un anneau.

1. Montrer que l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles de A est un groupe.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si u est inversible et x nilpotent et $ux = xu$ alors $u + x$ est inversible. En particulier, quel est l'inverse de $1 + x$?
4. Montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux alors f induit par restriction un morphisme $\widetilde{f}$ de groupes de A^* dans B^*. Si f est surjectif, est ce que $\widetilde{f}$ est surjectif ?
5. Montrer que : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre $\iff$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\iff$ n est premier.
6. Soit k un corps et $P \in k[X]$. Déterminer les éléments inversibles de $k[X]/(P)$. En déduire que $k[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est irréductible.

Exercice 3 [Éléments nilpotents et radical]. Soient A un anneau.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Soit k un corps et $P \in k[X]$. Déterminer les éléments nilpotents de $k[X]/(P)$.
3. On suppose que A est un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A ? Le résultat s'étend-il à un anneau non commutatif ?
4. On suppose encore que A est commutatif. On considère un idéal I de A. Montrer que l'ensemble suivant est un idéal contenant I :
$$\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que }, x^n \in I\}$$
5. Que vaut $\sqrt{0}$? Calculer $\sqrt{\sqrt{I}}$.
6. Décrire l'idéal de A/I correspondant à $\sqrt{I}$.
7. Montrer que $A/\sqrt{0}$ est un anneau réduit (c'est-à-dire n'a pas d'élément nilpotent non nul).
8. Déterminer $I + J$, $I \cap J$, IJ, $\sqrt{I}$, $\sqrt{J}$ pour
   (a) $I = 8\mathbb{Z}$, $J = 12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$;
   (b) $I = (X - 1)$ et $J = (X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$,
   (c) $I = (X^2 + 1)$ et $J = (X + 2)$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
9. Montrer que l'intersection des idéaux premiers de A contenant I est $\sqrt{I}$ (on pourra montrer que si $x \notin \sqrt{I}$, l'ensemble des idéaux contenant I ne rencontrant pas l'ensemble $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et admet un élément maximal qui est un idéal premier de A).

Exercice 4 [Matrice triangulaire]. Soit k un corps. On considère le sous-anneau de $\mathcal{M}_2(k)$:
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ tel que } a, b, c \in k \right\}$$

1. Déterminer les éléments nilpotents de A ?

2. Déterminer les inversibles de A ?
3. Déterminer les éléments réguliers à droite, à gauche ?
4. Déterminer les idéaux de A et les quotients correspondants.

Exercice 5 [Anneau de fonction]. Soit A un anneau et I un ensemble.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(I, A)$ des fonctions de I dans A est un anneau (commutatif si A l'est). Quel est l'élément neutre pour l'addition, la multiplication ?
2. On suppose que I est un espace métrique et $A = \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions continues sur I forment un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, A)$.
3. Pour $x \in I$, montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ev}_x : & \mathcal{F}(I, A) & \longrightarrow & A \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux appelé morphisme d'évaluation en x.
4. Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est ce que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est intègre ?
5. Déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{F}(I, A)$? de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
6. Existe-t-il des éléments nilpotents non nuls dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $I_{x_0} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } f(x_0) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est-il principal ? Que se passe-t-il si on remplace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
8. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sont de la forme I_x.
9. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et H l'anneau des fonctions holomorphes sur U. Montrer que H est intègre si et seulement si U est connexe.

Exercice 6 [Caractéristique]. Soit A un anneau.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux unitaires $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$. Vérifier qu'il est donné par $f(k) = k1_A$.
2. Le noyau de l'unique morphisme $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un unique $n \in \mathbb{N}$. Cet entier n est appelé la caractéristique de l'anneau A. C'est le plus petit entier non nul (s'il existe) tel que $n1_A = 0$. Vérifier que $na = 0$ pour tout $a \in A$.
3. Montrer que tout sous-anneau premier de A est isomorphe à $\mathbb{Z}/car(A)\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si A est un sous-anneau de B alors $car(A) = car(B)$.
5. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau, comparer la caractéristique de A et celle de B. En déduire que si $car(A)$ et $car(B)$ sont premiers entre eux alors il n'y a pas de morphisme d'anneaux entre A et B.
6. Quelle sont les caractéristiques de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?
7. Quelle est la caractéristique de $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
8. Quelle peut être la caractéristique d'un anneau intègre ? d'un corps ? En déduire qu'il n'existe pas de morphisme de corps entre deux corps n'ayant pas la même caractéristique.
9. Montrer qu'un anneau de caractéristique p (premier) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
10. Montrer qu'il n'existe aucun morphisme d'anneaux unitaires de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{Z}$.
11. Montrer que si A et B sont deux anneaux de caractéristique p et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux alors f est $\mathbb{F}_p$ linéaire pour la structure définie dans la question précédente.
12. Montrer que l'unique morphisme d'anneaux unitaires $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ vérifie que pour tous morphismes d'anneaux unitaires $g, h : \mathbb{Q} \longrightarrow A$ tel que $g \circ f = h \circ f$, on a $h = g$.

Exercice 7 [Anneaux finis]. 1. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

2. Donner des exemples d'anneaux non intègres et finis.
3. Déterminer les anneaux à 2, 3 et 4 éléments.