

Résumé de la thèse intitulée : Mouvement brownien branchant et autres modèles hiérarchiques en physique statistique

par Michel Pain, sous la direction de Zhan Shi

Cette thèse de doctorat est composée des 6 articles de recherche ci-dessous :

- [A] Velocity of the L -branching Brownian motion, *Electron. J. Probab.* (2016), Volume 21, Number 28, 1-28.
- [B] The near-critical Gibbs measure of the branching random walk, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* (2018), Volume 54, Number 3, 1622–1666.
- [C] 1-stable fluctuations in branching Brownian motion at critical temperature I: the derivative martingale, avec P. Maillard, *Ann. Probab.* (2019), Volume 47, Number, 2953–3002.
- [D] 1-stable fluctuations in branching Brownian motion at critical temperature II: general functionals, avec P. Maillard, *en préparation*.
- [E] An exactly solvable continuous-time Derrida–Retaux model, avec Y. Hu et B. Mallein, *Communications in Mathematical Physics* (2020) Volume 375, 605–651.
- [F] Absence of temperature chaos for the 2D discrete Gaussian free field: an overlap distribution different from the random energy model, avec O. Zindy, *prépublication* (2018), arXiv:1811.08313.

L’objectif de ce résumé est de présenter les résultats obtenus dans ces articles d’une manière plus accessible que dans l’introduction du manuscrit de thèse, qui est plutôt destinée à un public probabiliste.

Table des matières

1	Le mouvement brownien branchant	2
1.1	Processus de branchement	2
1.2	Lien avec la physique statistique	3
1.3	Universalité des champs log-corrélés	5
1.4	Équation de réaction-diffusion	6
2	Les phases du mouvement brownien branchant	8
2.1	La transition de phase	8
2.2	Mesure de Gibbs presque-critique	9
2.3	Phase sur-critique	10
2.4	Fluctuations de la mesure de Gibbs critique	11
3	Mouvement brownien branchant avec sélection	12
4	Le modèle de Derrida–Retaux	14
4.1	Le modèle discret	14
4.2	Le modèle continu	16

1 Le mouvement brownien branchant

L'objet mathématique au centre de cette thèse est le mouvement brownien branchant. Il fait partie de la famille des processus de branchement, étudiée depuis plus d'un siècle en théorie des probabilités.

1.1 Processus de branchement

Un processus de branchement désigne un modèle décrivant l'évolution aléatoire d'une population dans le temps. Par exemple, on peut s'intéresser au processus suivant. La population est initialement formée d'un seul individu, qui vit pendant une durée aléatoire puis meurt en donnant naissance à un nombre aléatoire d'enfants (possiblement zéro). Ensuite, chacun de ces enfants procède de même, indépendamment des autres mais en se reproduisant toujours selon la même loi de probabilité, et ainsi de suite (voir la Figure 1). La question soulevée dans les travaux de Bienaymé [5] en 1845 et de Galton et Watson [15] en 1874 concernait la survie de la population : est-il possible que la population survive indéfiniment avec une probabilité strictement positive ? La réponse qu'ils apportent est la suivante : la survie a lieu avec probabilité non-nulle si et seulement si le nombre moyen d'enfants par individu est strictement supérieur à 1. Depuis, d'autres questions ont été étudiées, comme l'évolution de la taille de la population en temps long quand elle survit indéfiniment ou la forme de l'arbre généalogique de la population.

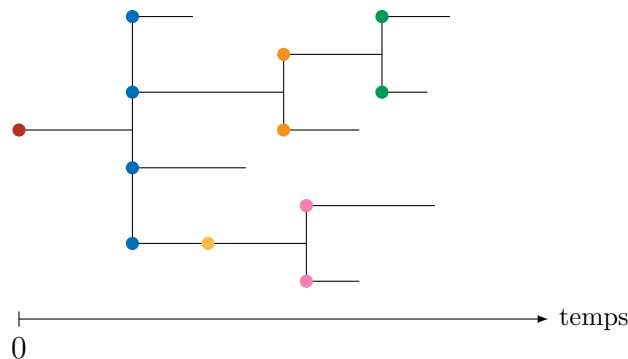


FIGURE 1 – Représentation d'un processus de branchement. Le temps s'écoule de gauche à droite. Les individus sont représentés par des points de couleur à leur instant de naissance, puis par un trait horizontal au cours de leur vie. Les enfants d'un même individu sont représentés de la même couleur. Dans cet exemple, la population finit par s'éteindre.

Pour définir les processus de branchement qui nous intéressent ici, il faut ajouter une caractéristique à chaque individu, représentée par un nombre réel, qui peut varier au cours de la vie de l'individu puis est transmise à ses enfants. Cette caractéristique peut représenter par exemple la capacité de survie de l'individu, sa fortune ou sa position spatiale (dans ce cas, il peut sembler plus naturel que la caractéristique soit donnée par un point du plan ou de l'espace et ce cas de figure est également étudié dans la littérature). Ainsi, le mouvement brownien branchant est défini comme suit. On commence initialement avec un individu avec une caractéristique 0 à l'instant 0.

Cet individu vit pendant un temps aléatoire, distribué selon la loi exponentielle¹, et sa caractéristique varie aléatoirement selon un mouvement brownien². À l’instant de sa mort, cet individu est remplacé par un nombre aléatoire d’enfants (tiré selon une loi fixée, appelée loi de reproduction), qui commencent leur vie avec la même caractéristique que leur parent. Ces enfants procèdent ensuite de même, indépendamment les uns des autres, et ainsi de suite (voir la Figure 2). La Figure 3 montre une simulation de mouvement brownien branchant en temps plus long.

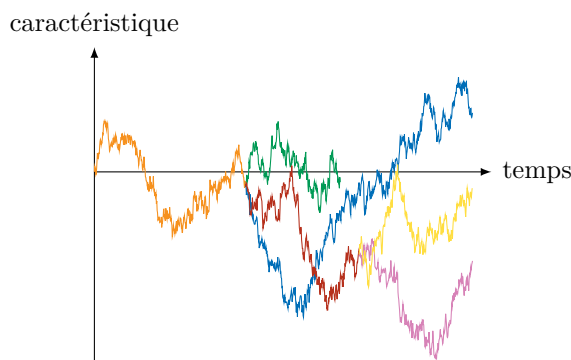


FIGURE 2 – Réalisation d’un mouvement brownien branchant, où le temps s’écoule toujours de gauche à droite, mais à présent la position verticale d’un individu représente l’évolution de sa caractéristique au cours de sa vie. La trajectoire de chaque individu est représentée dans une couleur différente.

Ce modèle soulève de nouvelles questions : dans le cas où la population survit indéfiniment, comment sont réparties les caractéristiques des individus à un instant t grand ? Quel est typiquement la valeur de la caractéristique la plus grande à l’instant t ? À quoi ressemble la trajectoire formée par la lignée ancestrale de cet individu avec la caractéristique la plus grande à l’instant t ? Des réponses à ces questions ont déjà été apportées au cours des cinquante dernières années, mais l’étude de ce modèle reste un domaine de recherche très actif, dans lequel s’inscrit cette thèse en décrivant de manière plus fine la structure de la population près des individus de caractéristiques maximales. L’intérêt suscité par l’étude du mouvement brownien branchant s’explique en grande partie par ses liens avec de nombreux autres modèles en physique statistique, en probabilités et en analyse, comme détaillé dans les sous-sections suivantes.

1.2 Lien avec la physique statistique

Le mouvement brownien branchant peut être vu comme un modèle abstrait (ou “modèle jouet”) de physique statistique, après un léger changement de point de vue. Rappelons tout d’abord quelques principes de la physique statistique. Elle a pour but de décrire le comportement de systèmes formés d’un grand nombre de particules. Le système considéré a tendance à minimiser son énergie, sans pour autant se retrouver dans l’état d’énergie minimale : au lieu de cela, il choisit un des états possibles aléatoirement, proportionnellement à $e^{-E/T}$ où E est l’énergie de cet état et T est la température.

¹Cela signifie que tout au long de sa vie, la probabilité de mourir pendant la prochaine seconde est la même.

²Le mouvement brownien est le mouvement continu résultant d’un très grand nombre d’impulsions aléatoires microscopiques successives vers le haut ou vers le bas.

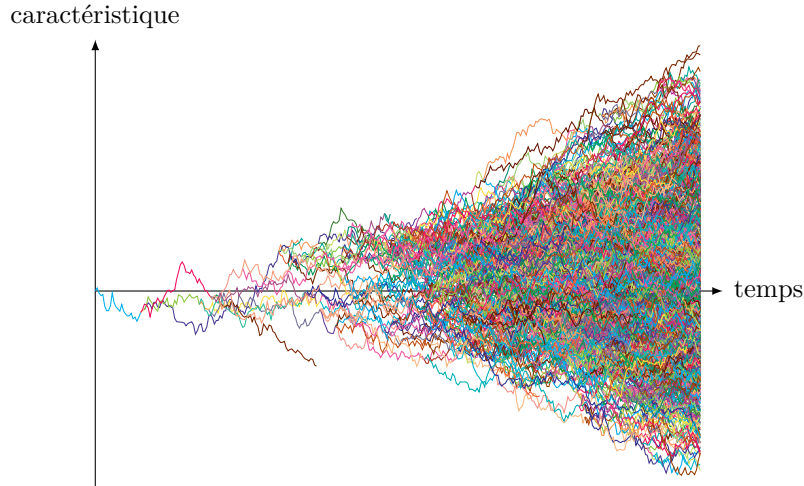


FIGURE 3 – Réalisation d'un mouvement brownien branchant, avec une représentation similaire à la Figure 2, mais pendant une période de temps plus longue.

On note généralement $\beta = 1/T$, appelée température inverse. Ainsi plus β est faible (c'est-à-dire la température est grande), plus le système est désordonné, au sens où il peut se retrouver dans de nombreux états différents, alors que quand β est grand le système a plus tendance à se retrouver dans l'un des états d'énergie minimale. L'un des grands succès de la physique statistique est sa capacité à expliquer les changements de phases qui peuvent avoir lieu dans le système : en variant la température, les propriétés macroscopiques du système peuvent changer drastiquement au franchissement d'un seuil critique. Les exemples les plus célèbres sont les transitions gaz-liquide-solide, mais également la disparition de la propriété ferromagnétique de certains métaux quand ils sont chauffés au delà d'une température critique.

Dans certains types de modèles, décrivant généralement un système de particules dans un milieu contenant des impuretés, dit milieu désordonné, il y a une couche additionnelle d'aléatoire : les énergies des différents états du système, qui dépendent de l'agencement complexe et inconnu des impuretés, sont elles-mêmes considérées comme étant aléatoires. Cette distribution des énergies étant donnée (la répartition des impuretés est fixée), le système choisit son état aléatoirement, proportionnellement à $e^{-E/T}$. Deux exemples de ce type de modèles sont les polymères, de grandes molécules se formant dans un environnement désordonné, et les verres de spin, des alliages métalliques contenant des impuretés dont le spin peut prendre plusieurs valeurs, un état du système correspondant alors à la configuration de ces spins. Ces modèles sont généralement difficiles à comprendre et analyser, car les énergies aléatoires des états sont corrélées de manière complexe.

Pour voir le mouvement brownien branchant comme un modèle de physique statistique, on se place à un instant t fixé et les individus vivant à cet instant forment l'ensemble des états du système, la caractéristique d'un individu étant l'énergie de l'état associé. Nous sommes donc dans le cas où l'énergie d'un état est aléatoire, mais ici les corrélations entre les énergies sont données par l'arbre généalogique de la population : plus deux individus sont proches cousins, plus leurs caractéristiques sont proches. Cette structure hiérarchique des corrélations rend l'analyse mathématique du mouvement brownien branchant beaucoup plus abordable, que celle des modèles évo-

qués ci-dessus.

Ce modèle est purement abstrait et ne décrit pas directement un système physique, mais il apparaît comme simplification de différents modèles de physique statistique. Pour les modèles de polymères, il peut être vu comme la limite quand la dimension de l'espace ambiant tend vers l'infini [12]. Dans le cas des verres de spin à champ moyen, il a été conjecturé en physique, puis démontré récemment, que les états possibles du système présentent une structure hiérarchique quand le nombre de spins tend vers l'infini : le mouvement brownien branchant procure un modèle à comparer, où la structure hiérarchique est présente dès le début [10]. Dans ces deux cas, les résultats obtenus sur le mouvement brownien branchant ne peuvent pas être appliqués directement aux modèles physiques, mais ils ont fourni une intuition et des méthodes utiles à leur étude.

Comme de nombreux modèles de physique statistique, le mouvement brownien branchant exhibe une transition de phase, qui sera discutée en Section 2.1, et la partie [B] de cette thèse a pour but d'en apporter une compréhension plus précise.

1.3 Universalité des champs log-corrélés

Un des objectifs de la théorie des probabilités est de comprendre l'universalité qui apparaît dans les problèmes impliquant un grand nombre de variables aléatoires. L'universalité désigne le fait que, pour toute une famille de modèles, les mêmes phénomènes apparaissent quels que soient les distributions précises des variables aléatoires impliquées. On parle alors de classe d'universalité pour désigner l'ensemble des modèles exhibant ces phénomènes. Un exemple célèbre est le théorème central limite qui stipule qu'une variable aléatoire obtenue comme somme de nombreuses petites variables aléatoires indépendantes est approximativement distribuée selon une loi gaussienne. Ce théorème s'applique sous certaines hypothèses, qui délimitent la classe d'universalité de la convergence vers la loi gaussienne.

Le mouvement brownien branchant fait partie de la classe des champs log-corrélés. Un champ est une famille de variables aléatoires $X(x)$, où x fait partie d'un ensemble donné. Par exemple, on peut considérer une grille carrée en dimension 2 et à chaque nœud x de la grille associer une variable aléatoire $X(x)$ qui prend pour valeur un nombre réel : de manière analogue pour le mouvement brownien branchant, les éléments x seraient les individus à un instant donné et $X(x)$ serait la caractéristique de l'individu x . On dit que le champ est log-corrélé si la corrélation entre les valeurs du champ $X(x)$ et $X(y)$ à deux points distincts x et y décroît proportionnellement au logarithme de la distance entre ces points. C'est le cas du champ libre gaussien en dimension 2, représenté en Figure 4, mais également du logarithme du polynôme caractéristique de grandes matrices aléatoires ou de la fonction zêta de Riemann sur l'axe critique. Le mouvement brownien branchant n'est pas exactement log-corrélé, mais on dit qu'il fait partie de la classe d'universalité des champs log-corrélés car il partage avec eux une phénoménologie commune.

Les phénomènes communs à cette classe sont entre autres les propriétés de la transition de phase qui a lieu si on les considère d'un point de vue physique statistique (voir la Section 2.1), et le comportement asymptotique de la valeur maximale du champ, ainsi que la manière dont les points x de très haute valeur sont disposés. Une illustration de ce dernier point est le résultat présenté en Section 2.3, qui a été obtenu pour le

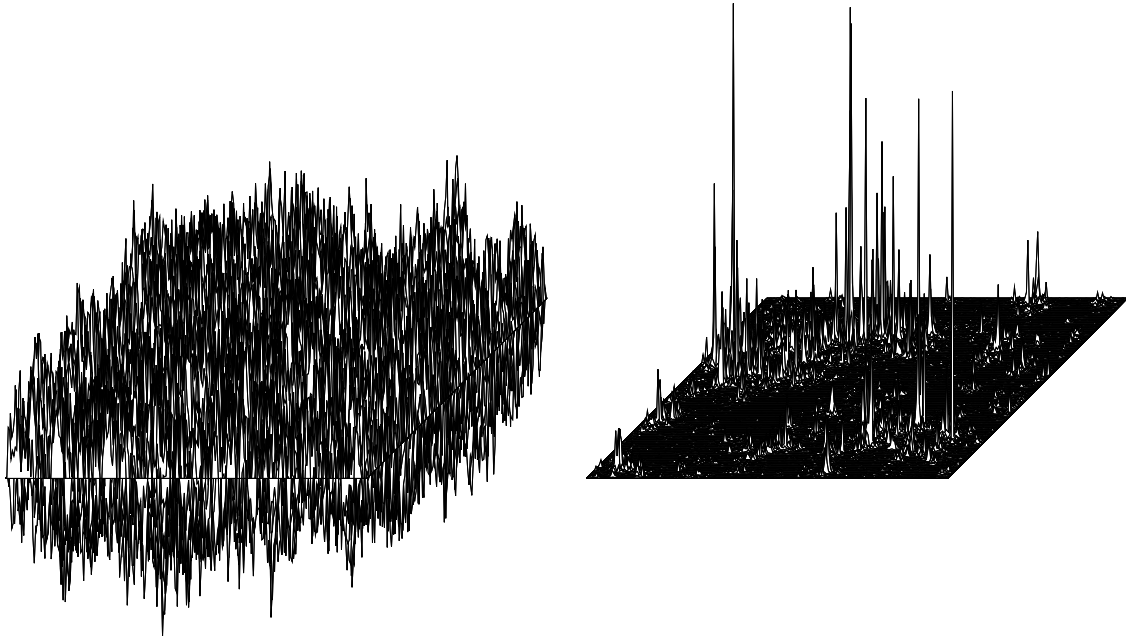


FIGURE 4 – À gauche représentation du champ libre gaussien discret sur une grille carrée de taille 256×256 représentée en perspective. Les valeurs du champ en chaque point de la grille sont représentées verticalement. Ce champ fluctue énormément donc cette représentation est peu lisible. Alternativement, on peut utiliser une approche issue de la physique statistique : si les points x sont les états du système et $X(x)$ est l'énergie de l'état x , alors à température inverse β , la probabilité de se retrouver dans l'état x est proportionnelle à $e^{-\beta X(x)}$. C'est cette mesure de probabilité qui est représentée à droite : les pics correspondent à une très basse énergie donc des états avec une grande probabilité d'avoir lieu. On peut y voir les corrélations : si un état est probable, certains de ses proches voisins le sont aussi.

champ libre gaussien dans l'article [F] de cette thèse, mais qui pourrait être démontré de manière similaire pour le mouvement brownien branchant. De manière générale, le mouvement brownien branchant est l'objet mathématique le plus simple à analyser au sein de cette classe d'universalité. Les méthodes mises en œuvre pour son étude au cours des quatre dernières décennies ont ensuite pu être appliquées pour démontrer des résultats similaires sur les autres champs log-corrélés, avec des progrès fulgurants dans ce domaine pendant les cinq dernières années.

1.4 Équation de réaction-diffusion

Une autre motivation pour l'étude du mouvement brownien branchant (et l'une des premières historiquement) est son lien avec les équations aux dérivées partielles, dites de réaction-diffusion, et plus particulièrement avec l'équation F-KPP (pour Fisher [14] et Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov [16]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u),$$

avec pour inconnue une fonction $u(t, x)$ du temps t et de l'espace x (en dimension 1 ici). Cette équation décrit l'évolution du système suivant. Considérons un gène pour lequel il existe deux allèles A et a et supposons que l'allèle A présente un avantage sélectif

par rapport à l'allèle a (les individus portant l'allèle A se reproduisent plus). En tout point x , il y a un grand nombre d'individus et $u(t, x)$ correspond à la proportion d'individus parmi eux portant l'allèle A . Deux mécanismes jouent un rôle : les individus se déplacent vers la gauche et vers la droite (c'est la diffusion, due au terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) et en chaque point les individus se reproduisent, ceux possédant l'allèle A se reproduisant plus vite (c'est la réaction, due au terme $u(1 - u)$). L'équation décrit alors comment l'allèle A envahit la population quand le temps s'écoule. En partant d'une condition initiale avec uniquement des allèles A aux points $x \leq 0$ et uniquement des allèles a aux points $x > 0$, la solution $u(t, x)$ forme ainsi un front d'onde se propageant de gauche à droite, voir la Figure 5. Les principales questions soulevées sont alors : à quelle vitesse se propage le front d'onde ? Peut-on obtenir un développement asymptotique précis de la position du front d'onde en temps long ?

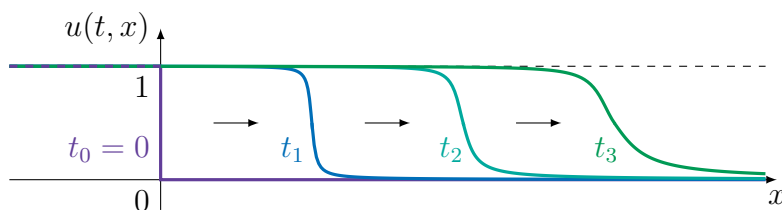


FIGURE 5 – Représentation schématique de la solution $u(t, x)$. La condition initiale vaut 1 pour $x \leq 0$ et 0 pour $x > 0$. L'espace est représenté horizontalement et la solution $u(t, x)$ est représentée comme fonction de x à différents temps $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3$.

Le lien entre l'équation F-KPP et le mouvement brownien branchant a été établi par McKean [18] en 1975. Pour toute condition initiale, on peut exprimer la solution $u(t, x)$ de l'équation F-KPP comme la moyenne d'une quantité dépendant des caractéristiques des individus du mouvement brownien branchant à l'instant t . En particulier, pour la condition initiale évoquée précédemment, $u(t, x)$ est exactement égal à la probabilité que la caractéristique maximale à l'instant t soit supérieure à x . Ainsi les questions de la position du front pour l'équation F-KPP et de la valeur de la caractéristique maximale pour le mouvement brownien branchant sont intimement liées.

Cette connection a tout d'abord été utilisée pour transposer les résultats obtenus sur l'équation F-KPP vers le mouvement brownien branchant, mais, au cours des vingt dernières années, les méthodes probabilistes développées pour étudier le mouvement brownien branchant fournissent une approche alternative aux résultats sur l'équation F-KPP. Le principal exemple est la valeur de la caractéristique maximale au sein du mouvement brownien branchant à l'instant t dont le développement asymptotique en temps long est

$$vt - \frac{3}{2v} \log t + Y_t, \quad (1.1)$$

c'est-à-dire qu'au premier ordre le maximum augmente linéairement à vitesse v (cf. Figure 3, le mouvement brownien branchant a la forme d'un cône), puis il y a un correctif logarithmique et finalement des fluctuations aléatoires : Y_t est une variable aléatoire dont la distribution converge quand $t \rightarrow \infty$. Ce résultat a été démontré par Bramson [6] en 1983 en passant par l'équation F-KPP et une approche purement probabiliste n'a été obtenue que trente ans plus tard par Aïdékon [1]. Le lien entre l'équation F-KPP

et le mouvement brownien branchant est également une des motivations derrière les articles [C] et [D] de cette thèse, voir la Section 2.4.

2 Les phases du mouvement brownien branchant

2.1 La transition de phase

Nous avons vu que le mouvement brownien branchant peut être étudié du point de vue de la physique statistique. Pour cela, on se place à un instant t fixé, les individus forment les états possibles de notre système et leurs caractéristiques donnent leurs énergies respectives. À une température inverse β donnée, le système choisit un des états aléatoirement, proportionnellement à $e^{-\beta E}$, où E est l'énergie de cet état. Cela forme une mesure de probabilité sur les états (donc sur les individus à l'instant t), appelée mesure de Gibbs à température inverse β . Cette mesure se concentre généralement sur les états avec un niveau d'énergie particulier, dépendant de β : ce sont les états dans lesquels le système a une grande chance de se retrouver et notre objectif est de les décrire.

La recherche du niveau d'énergie sur lequel se concentre la mesure de Gibbs illustre le problème habituel en physique statistique de compétition entre énergie et entropie. Le poids sous la mesure de Gibbs d'un niveau d'énergie E est proportionnel à

$$e^{-\beta E} \times \text{nombre d'états avec une énergie proche de } E.$$

D'un côté, on veut maximiser le poids $e^{-\beta E}$ en allant chercher un niveau d'énergie le plus bas possible, et de l'autre, on veut maximiser le nombre d'états à ce niveau (l'entropie), cela impliquant généralement de ne pas prendre une énergie trop basse.

Dans le cas du mouvement brownien branchant, la majorité des états ont une énergie proche de 0 et plus on considère des énergies plus basses (ou plus hautes symétriquement), moins il y a d'états à ce niveau. Ainsi, si $\beta = 0$, il n'y a aucun intérêt à aller chercher des énergies basses pour augmenter le facteur $e^{-\beta E}$ et donc la mesure de Gibbs est concentrée sur les états d'énergie $E \approx 0$. Ensuite, si l'on augmente β , alors la mesure de Gibbs est supportée par un niveau d'énergie plus bas, en $-\beta t$. Cela reste vrai tant que $\beta < v$ où v est la vitesse de la caractéristique maximale du mouvement brownien branchant. En effet, la caractéristique la plus basse à l'instant t est approximativement $-vt$, donc il n'y pas d'état avec une énergie plus basse. Ainsi, dans le cas $\beta \geq v$, la mesure de Gibbs se concentre sur les états d'énergie $E \approx -vt$ indépendamment de β , voir la Figure 6. Pour être plus précis, si $\beta = v$, les niveaux d'énergies probables sont ceux à une distance d'ordre \sqrt{t} au-dessus de l'énergie minimale, alors que pour $\beta > v$, ce sont l'état d'énergie minimale et ses quelques proches voisins qui sont probables (le système est alors localisé). Ce changement de comportement indique qu'une transition de phase a lieu à la température inverse critique $\beta = v$. On parle de phase sous-critique pour $\beta < v$, critique pour $\beta = v$ et sur-critique pour $\beta > v$.

Cette transition de phase se manifeste par différents changements de comportement. Tant que $\beta < v$, le nombre d'états sur lesquels est concentrée la mesure de Gibbs est de taille exponentielle en t (le système est désordonné), alors que pour $\beta > v$, la mesure de Gibbs est supportée par un nombre borné d'états. Dans le cas $\beta = v$, la situation est intermédiaire : le nombre d'états diverge mais de manière sous-exponentielle. On

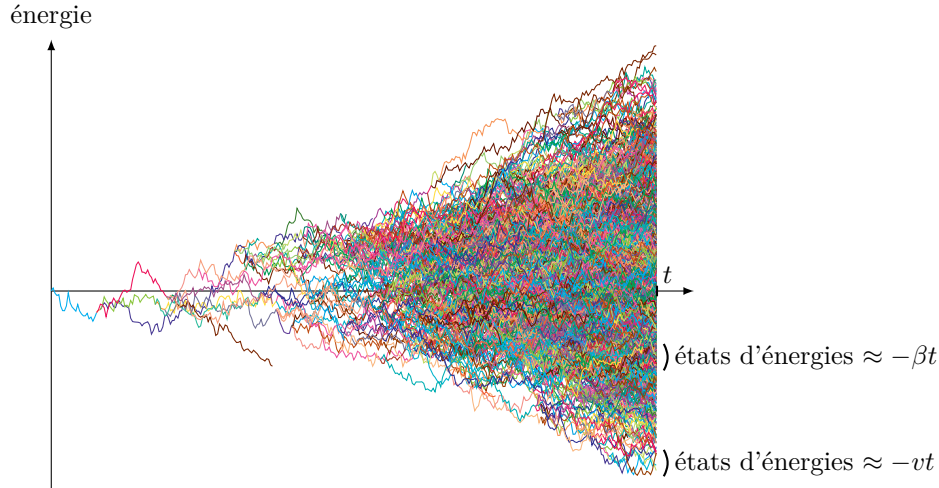


FIGURE 6 – Réalisation du mouvement brownien branchant identique à la Figure 3, s’arrêtant au temps t . Les individus en vie à cet instant forment les états possibles du système et leurs positions verticales indiquent leurs énergies. Si $\beta < v$, les états dans lesquels se trouve avec grande probabilité le système sont ceux avec une énergie proche de $-\beta t$. Si $\beta \geq v$, ce sont ceux avec une énergie proche de $-vt$, donc proche de l’énergie minimale.

peut également s’intéresser à la trajectoire typique de la lignée d’un individu tiré selon la mesure de Gibbs. Après renormalisation et quand $t \rightarrow \infty$, on obtient trois limites différentes, qui sont trois processus aléatoires classiques : un mouvement brownien dans la phase sous-critique, un méandre brownien dans la phase critique et une excursion brownienne dans la phase sur-critique. Finalement, la fonction de partition du système, c’est-à-dire la somme sur tous les états de $e^{-\beta E}$, où E est l’énergie de l’état, présente aussi un changement dans son comportement asymptotique quand $t \rightarrow \infty$. Pour toutes ces propriétés, il y a une discontinuité quand le paramètre β franchit le seuil critique.

2.2 Mesure de Gibbs presque-critique

Une manière de comprendre plus en détails comment les propriétés évoquées ci-dessus changent brusquement au passage de la transition de phase est de se placer dans le cas dit presque-critique : on considère une température inverse $\beta(t)$ qui dépend de t et qui converge plus ou moins vite vers la valeur critique (ici v) quand $t \rightarrow \infty$ par valeurs supérieures ou inférieures. Cette étude est menée dans le cas du mouvement brownien branchant (ou plus précisément d’une version en temps discret plus générale du modèle) dans l’article [B].

Pour chacune des propriétés variant de manière discontinue à la température inverse critique, le cas presque-critique permet d’exhiber des comportements intermédiaires interpolant ceux présents dans les phases sous-critique, critique et sur-critique. C’est le cas pour le niveau d’énergie sur lequel se concentre la mesure de Gibbs, le nombre d’états mis en jeu et la taille de la fonction de partition. Pour la trajectoire typique d’un individu tiré selon la mesure de Gibbs, cela fait apparaître une famille de processus aléatoires variant continûment du mouvement brownien à l’excursion brownienne en passant par le méandre brownien. Ces résultats fournissent une compréhension complète des niveaux d’énergie près du minimum, alors qu’une étude à β fixée ne permet par exemple pas de voir les niveaux compris entre ceux à une distance d’ordre \sqrt{t}

au-dessus de l'énergie minimale (phase critique) et ceux proches voisins du minimum (phase surcritique).

2.3 Phase sur-critique

Les niveaux d'énergie du système dans la phase sur-critique, c'est-à-dire ceux proches de l'énergie minimale, peuvent être décrits de manière plus détaillée. Cela s'inscrit dans le domaine des probabilités de l'étude des valeurs extrémales : après avoir obtenu la valeur du minimum (ou du maximum) d'un grand nombre de variables aléatoires, on s'intéresse généralement au processus extrémal, c'est-à-dire à la distribution des autres valeurs proches du minimum. Sont-elles regroupées en paquets ou leur distribution est-elle le résultat de variables indépendantes les unes des autres ?

Pour le mouvement brownien branchant, rappelons que la position du minimum a été obtenue par Bramson en 1983 (voir l'équation (1.1)). La description du processus extrémal a quant à elle été obtenue plus récemment [2, 3] et présente une phénoménologie intéressante : les individus avec une caractéristique proche du minimum à l'instant t peuvent être réunis en groupes de proches cousins (deux individus au sein d'un même groupe ont un ancêtre commun à un instant proche de t) tels que deux individus de deux groupes différents ont leur plus proche ancêtre commun qui remonte quasiment au début du processus, voir la Figure 7.

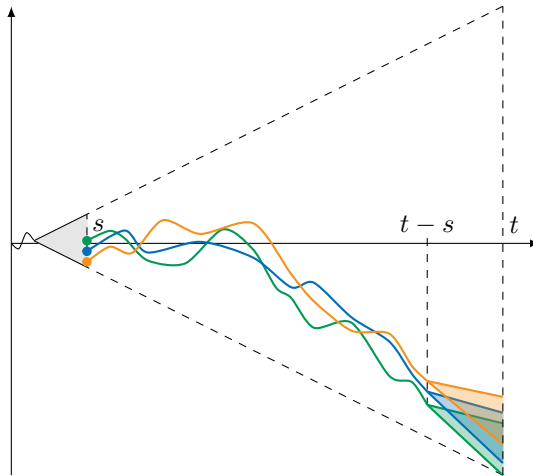


FIGURE 7 – Schéma représentant la trajectoire de particules arrivant près du minimum à l'instant t , amenant avec elles leurs proches cousins. Le cône en pointillés schématise l'espace que remplit le mouvement brownien branchant. Si l'on considère une durée de temps s grande mais fixée, par rapport à t qui tend vers l'infini, alors toute paire d'individus choisis près du minimum à l'instant t a avec grande probabilité un plus proche ancêtre commun soit avant l'instant s (ils sont dans deux groupes différents), soit après l'instant $t - s$ (ils sont dans le même groupe).

Une des conséquences de ce résultat est la suivante : les poids de ces différents groupes sous la mesure de Gibbs dans la phase surcritique $\beta > v$ sont distribués à la limite selon la loi de Poisson–Dirichlet de paramètre v/β . Cette loi classique apparaît ainsi dans de nombreux modèles de verre de spin, ce qui lui confère un caractère universel. Le représentant le plus simple de cette classe d'universalité est tout simplement le cas où les énergies sont données par un grand nombre de variables indépendantes : dans ce cas, les groupes sont des singletons contenant une seule variable et les poids des

groupes sous la mesure de Gibbs surcritique convergent aussi vers une loi de Poisson–Dirichlet. Autrement dit, dans le cas du mouvement brownien branchant, la structure plus complexe des groupes, au sein desquels il est difficile de décrire la distribution des énergies, ne joue aucun rôle pour la question du poids de ces groupes sous la mesure de Gibbs surcritique.

Cette remarque est l’un des points de départ de l’article [F], écrit avec Olivier Zindy. Supposons que l’on considère deux températures inverses sur-critiques $\beta, \beta' > v$, et que l’on tire un premier individu selon la mesure de Gibbs à température inverse β puis indépendamment un second individu selon la mesure de Gibbs à température inverse β' , alors quelle est la probabilité que les deux individus soient dans le même groupe ? La discussion qui précède indique que cette probabilité est la même pour de nombreux modèles si $\beta = \beta'$. Il est alors naturel de se demander si cette propriété reste vraie pour $\beta \neq \beta'$. Dans l’article [F], nous montrons que ce n’est pas le cas. Plus précisément, la structure des groupes dans le mouvement brownien branchant joue cette fois un rôle dans le calcul et nous montrons que la probabilité que les deux individus soient dans le même groupe est plus faible pour le mouvement brownien branchant que dans le cas des énergies indépendantes (sans structure hiérarchique). Cet article est en réalité écrit dans le cadre du champ libre gaussien discret, un exemple de champ log-corrélé mentionné en Section 1.3, mais la méthode s’applique directement à tout autre représentant de la classe d’universalité des champs log-corrélés, dont le mouvement brownien branchant, dès lors que l’on a une description précise de leur processus extrémal.

Enfin, cette question s’inscrit dans le problème plus général du chaos en température pour les modèles de verre de spin. On dit qu’il y a chaos en température pour un modèle si, quand on tire deux états selon les mesures de Gibbs à températures inverses différentes β et β' , leurs énergies sont complètement décorréelées (ce qui revient à dire qu’ils sont toujours dans deux groupes distincts avec la terminologie utilisée précédemment). Certains modèles présentent ce phénomène de chaos en température et d’autres non, et les modèles évoqués ci-dessus sont dans la deuxième catégorie. Cependant, on peut s’intéresser plus généralement à l’influence d’un changement de température sur la géométrie de la mesure de Gibbs et c’est dans ce cadre que s’inscrit la partie [F].

2.4 Fluctuations de la mesure de Gibbs critique

Les parties [C] et [D] de cette thèse, écrites avec Pascal Maillard, sont focalisées sur la phase critique. Rappelons que les états typiques du système sous la mesure de Gibbs critique sont ceux avec une énergie à distance d’ordre \sqrt{t} au-dessus de l’énergie minimale. Une quantité essentielle pour décrire cette phase critique est la martingale dérivée, introduite par Lalley et Sellke [17] : à tout instant t , on définit une quantité Z_t dépendant des caractéristiques des individus en vie à l’instant t (obtenue en dérivant la fonction de partition par rapport à β au point critique). Cela forme une famille de variables aléatoires $(Z_t)_{t \geq 0}$, appelée la martingale dérivée, qui converge quand $t \rightarrow \infty$ vers une limite notée Z_∞ . Cette variable aléatoire Z_∞ est strictement positive dès que la population survit indéfiniment et décrit la croissance du mouvement brownien branchant dans la direction du minimum : plus Z_∞ est grand, plus le minimum du mouvement brownien branchant est bas et plus il y a d’individus près du minimum.

Ainsi, Z_∞ intervient dans la description de la limite de la variable Y_t qui apparaît dans le développement asymptotique de la position du minimum (voir l'équation (1.1) qui est valide au signe près pour le minimum). D'autre part, Z_∞ apparaît aussi comme limite de la fonction de partition du système au point critique et, plus généralement, la distribution des énergies à distance d'ordre \sqrt{t} au-dessus du minimum (donc celles supportant la mesure de Gibbs critique) est donnée au premier ordre par une distribution déterministe multipliée par Z_∞ .

Notre objectif dans les articles [C] et [D] est de décrire les fluctuations qui ont lieu dans les propriétés limites énoncées ci-dessus, c'est-à-dire d'explicitier les termes d'ordres plus petits. Ainsi, la partie [C] se concentre sur les fluctuations qui ont lieu dans la convergence de la martingale dérivée $Z_t \rightarrow Z_\infty$ et nous y obtenons le deuxième et le troisième ordre en montrant que

$$Z_t = Z_\infty + \frac{\log t}{\sqrt{2\pi t}} Z_\infty + \frac{S}{\sqrt{t}} + \dots,$$

où S est une variable aléatoire, répondant ainsi à une conjecture des physiciens Mueller et Munier [19]. Dans la seconde partie [D], nous utilisons ce premier résultat pour obtenir un développement asymptotique analogue pour la convergence de la distribution des énergies à distance d'ordre \sqrt{t} au-dessus du minimum évoquée ci-dessus, ce qui s'applique en particulier à la convergence de la fonction de partition critique.

Un des points frappants de ce résultat est que la variable aléatoire S est universelle, alors que Z_∞ ne l'est pas. En effet, la distribution de Z_∞ n'est pas explicite et dépend entre autres de la manière dont les individus se reproduisent (la loi de reproduction). Ainsi, le comportement du maximum ou du minimum présenté en (1.1) est universel pour la classe des champs log-corrélés jusqu'au terme Y_t , car sa limite fait intervenir Z_∞ qui n'est pas universelle. Cependant, notre résultat montre que les fluctuations de la martingale dérivée autour de sa limite, et plus généralement de la distribution des énergies sous la mesure de Gibbs critique, sont universelles : à une accélération par Z_∞ près, les fluctuations sont données par une loi dite 1-stable, qui joue un rôle analogue à la loi gaussienne pour les variables aléatoires prenant régulièrement des valeurs très élevées.

La question qui reste en suspens est celle des fluctuations pour la position du minimum à l'instant t , c'est-à-dire de l'ordre suivant dans le développement asymptotique (1.1). L'analogue de cette question pour l'équation F-KPP a été étudié par les physiciens Ebert et van Saarloos [13] en 2000 et ils ont conjecturé que le terme suivant pour la position du front à l'instant t pour une grande famille d'équations de réaction-diffusion devait être de la forme c/\sqrt{t} , avec c une constante universelle et explicite. Des progrès ont été faits récemment dans cette direction par des méthodes analytiques, mais nous espérons que nos travaux permettront de fournir une approche probabiliste à ce type de résultats dans de futurs travaux.

3 Mouvement brownien branchant avec sélection

Jusqu'ici, l'interprétation que l'on se fait de la caractéristique d'un individu ne jouait aucun rôle dans la définition du processus. Cependant, dans le cas où la caractéristique

représente la capacité de survie de l'individu, il est assez naturel d'introduire un phénomène de sélection, en éliminant au fil du temps les individus avec les caractéristiques les plus basses, c'est-à-dire les individus les plus faibles.

Un de ces modèles est le L -mouvement brownien branchant introduit par Derrida *et al.* [7] en 2006. On se donne une distance $L > 0$ fixée et on ajoute la règle de sélection suivante à la définition du mouvement brownien branchant : dès qu'un individu possède une caractéristique qui est à une distance supérieure à L de la caractéristique maximale au sein de la population à cet instant, il meurt (sans donner naissance à des enfants), voir la Figure 8.

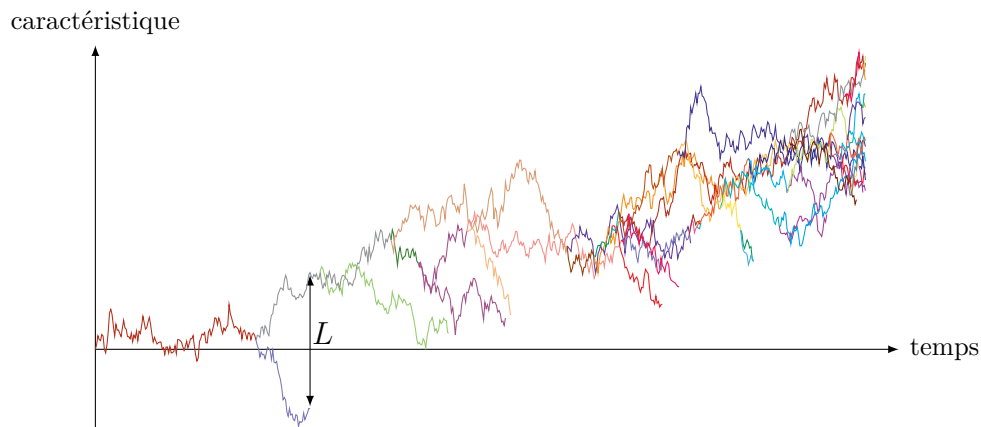


FIGURE 8 – Réalisation du L -mouvement brownien branchant avec $L = 3$, jusqu'à l'instant $t = 12$. La trajectoire de chaque individu est représentée dans une couleur différente.

Au sein de ce processus, les caractéristiques de la population ont tendance à augmenter car les individus les plus faibles sont éliminés au fur et à mesure. On s'intéresse donc naturellement à la vitesse à laquelle ces caractéristiques augmentent. Le premier résultat de l'article [A] montre l'existence de cette vitesse : pour tout $L > 0$ fixé, il existe une constante v_L , qui n'est pas aléatoire, telle que les caractéristiques augmentent à vitesse v_L . Autrement dit, à un instant t grand, les caractéristiques les plus hautes et les plus basses au sein du L -mouvement brownien branchant sont approximativement égales à $v_L t$, voir la Figure 9.

La question soulevée en physique, entre autres dans Derrida *et al.* [7], porte sur l'effet de ce phénomène de sélection sur la vitesse à laquelle augmente la caractéristique maximale. En effet, nous avons vu que dans le mouvement brownien branchant la caractéristique maximale au sein de la population augmente à vitesse v . La règle de sélection n'ayant fait qu'éliminer des individus, on a nécessairement $v_L \leq v$. La vitesse v_L est en réalité strictement inférieure à la vitesse v , mais on s'attend à ce qu'elle en soit de plus en plus proche quand l'effet de la sélection s'amenuise, c'est-à-dire quand $L \rightarrow \infty$. Le principal résultat de la partie [A] estime précisément la taille de la différence entre v_L et v quand L est grand : plus précisément, on a le développement asymptotique suivant

$$v_L = v - \frac{\pi^2}{2vL^2} + o\left(\frac{1}{L^2}\right).$$

Un résultat analogue a été obtenu par Bérard et Gouéré [4] pour une autre règle de sélection, où l'on limite la taille totale de la population plutôt que la distance maximale

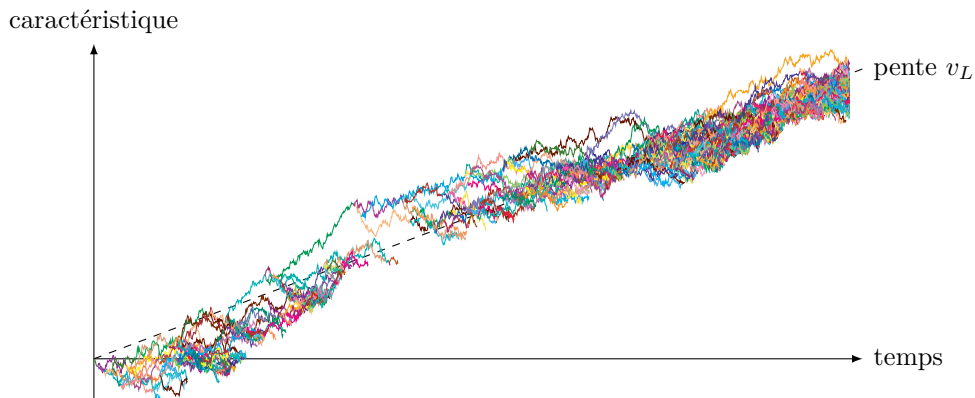


FIGURE 9 – Réalisation du L -mouvement brownien branchant avec $L = 5$, jusqu'à l'instant $t = 20$. Malgré des fluctuations aléatoires, le comportement au premier ordre du L -mouvement brownien branchant consiste à suivre la droite en pointillés de pente v_L .

possible entre les caractéristiques. Il était conjecturé par Derrida *et al.* [7] que ces deux modèles devaient présenter des propriétés similaires, avec une correspondance explicite, et l'article [A] confirme cette conjecture.

4 Le modèle de Derrida–Retaux

4.1 Le modèle discret

Le dernier chapitre de cette thèse [E], écrit avec Yueyun Hu et Bastien Mallein, ne concerne pas le mouvement brownien branchant, mais un autre modèle de physique statistique, possédant également une structure hiérarchique : le modèle de Derrida–Retaux. Ce modèle a d'abord été introduit en temps discret par Derrida et Retaux [11] en 2014 et est défini comme suit. La condition initiale est une variable aléatoire positive X_0 , puis on obtient la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ par la formule de récurrence suivante

$$X_{n+1} = \max(X_n + \widetilde{X}_n - 1, 0), \quad (4.1)$$

où \widetilde{X}_n est une copie indépendante de la variable aléatoire X_n . On s'intéresse alors au comportement asymptotique de X_n en fonction de la condition initiale X_0 . Ce modèle apparaît comme simplification de modèles de polymères interagissant avec une interface (comme par exemple une branche d'ADN interagissant avec l'autre branche de la double hélice). Dans l'étude de ces modèles, on peut utiliser une méthode dite de renormalisation : on exprime la fonction de partition du système à partir des fonctions de partition de deux systèmes plus petits. La relation de récurrence ainsi obtenue n'est pas exacte et donc très difficile à analyser, mais après simplification, on peut se ramener à la relation de récurrence (4.1).

Comme ici X_{n+1} est une fonction de deux copies indépendantes de X_n , on parle de renormalisation hiérarchique : en effet, on peut construire X_n à partir d'un arbre. Pour cela, on considère un arbre binaire de hauteur n et, sur les 2^n feuilles, on place des copies indépendantes de X_0 . On applique ensuite la procédure déterministe suivante : on descend des feuilles vers la racine de l'arbre, et, si les deux enfants d'un nœud

portent les valeurs a et b , alors on attribue à ce noeud la valeur $\max(a + b - 1, 0)$. La valeur ainsi attribuée à la racine définit X_n , voir la Figure 10.

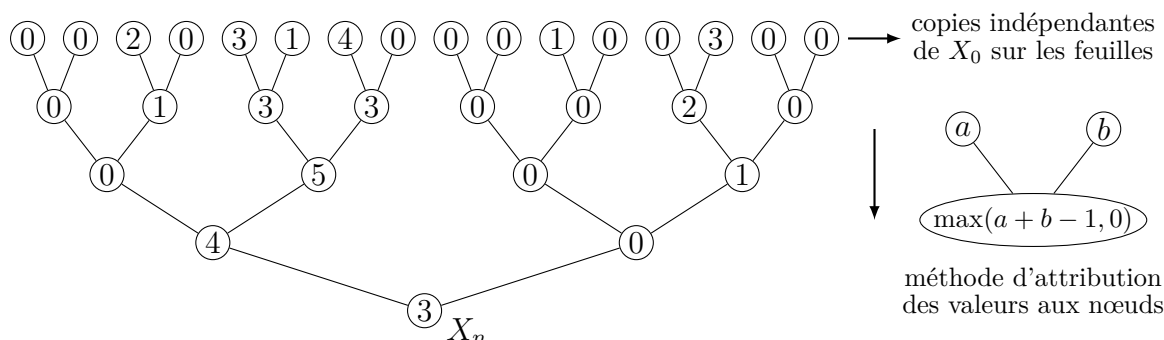


FIGURE 10 – Illustration de la définition du modèle de Derrida-Retaux à partir d'un arbre binaire.

Deux phénomènes entrent en compétition dans ce modèle : le fait d'additionner deux copies de X_n fait croître la suite, mais le fait de soustraire 1 la fait décroître. En outre, la non-linéarité introduite par le fait que l'on interdit les valeurs négatives en prenant le maximum avec 0, rend le comportement de ce modèle beaucoup plus riche mais aussi plus complexe à analyser. On peut classer les conditions initiales X_0 dans deux catégories. Dans une première phase, dite sur-critique, c'est le phénomène de croissance qui domine et X_n croît comme $F \times 2^n$, où $F > 0$ est appelée énergie libre. Dans la seconde phase, dite sous-critique, la décroissance prend le dessus et X_n tend vers 0. La classification des conditions initiales dans l'une ou l'autre de ces phases a été obtenue dans le cas où X_0 prend des valeurs entières par Collet *et al.* [9], mais reste une question ouverte dans le cas général.

Derrida et Retaux s'intéressent à la transition qui a lieu entre les deux phases : en partant d'une condition initiale sur-critique, on augmente peu à peu la proportion de 0 dans les valeurs initiales jusqu'à obtenir une condition initiale sous-critique. Ils conjecturent précisément le comportement de l'énergie libre F à la transition et étonnamment la transition est d'ordre infini, c'est-à-dire que F et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand on approche du changement de phase. Ce résultat a été démontré récemment par Chen *et al.* [8]. Derrida et Retaux considèrent également le comportement au point critique, c'est-à-dire au point qui délimite le passage d'une phase à l'autre. Le point critique joue un rôle important dans les structures de renormalisation, car c'est généralement là qu'apparaissent des comportements universels. Dans ce cas, X_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini mais beaucoup plus lentement que dans le reste de la phase sous-critique. Derrida et Retaux ont conjecturé le comportement asymptotique de la probabilité que X_n soit non nul, mais cela n'a pas encore été démontré mathématiquement.

Afin de mieux comprendre ce qu'il se passe dans le cas critique quand X_n est non-nul, on peut s'intéresser à la manière dont la masse est amenée depuis les feuilles jusqu'à la racine de l'arbre. Pour cela, on colorie en rouge les chemins des feuilles jusqu'à la racine le long desquels on ne passe pas "en-dessous de 0", au sens où le fait de prendre le maximum avec 0 n'est nécessaire à aucune des étapes. L'ensemble de ces sommets rouges forme un sous-arbre de l'arbre binaire, que l'on appelle l'arbre rouge, voir la Figure 13. L'article de Chen *et al.* [8] présente quelques résultats sur l'arbre rouge qui

permettent d'étudier la transition de phase pour l'énergie libre. Cependant, il serait intéressant d'avoir des résultats plus précis, comme une description limite de l'arbre rouge quand $X_n > 0$, ainsi qu'une estimation du nombre de feuilles dans cet arbre, et l'article [E] permet de conjecturer la réponse à ces questions.

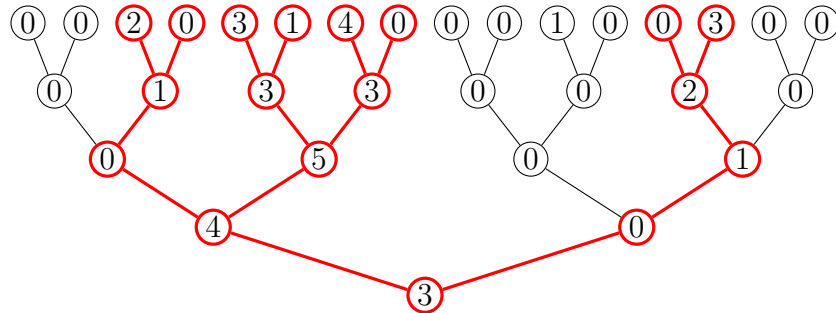


FIGURE 11 – Illustration de la définition de l'arbre rouge sur l'exemple de la Figure 10.

4.2 Le modèle continu

Dans la partie [E], nous introduisons une version en temps continu du modèle de Derrida–Retaux. Pour cela, on se donne également comme condition initiale une variable aléatoire X_0 à valeurs positives, et on définit X_t à un instant $t > 0$ à partir d'une procédure sur un arbre. On considère un arbre de Yule : un arbre binaire dans lequel les branches ont des longueurs aléatoires tirées indépendamment les unes des autres selon la loi exponentielle. On coupe cet arbre à la hauteur t et on dispose sur chacune des feuilles un peintre avec une quantité de peinture tirée selon la loi de X_0 . Ensuite, chaque peintre descend le long de sa branche en la peignant, dépensant une unité de peinture pour peindre une unité de longueur de branche. Si un peintre n'a plus de peinture, il arrête de peindre, mais continue à descendre. Lorsque deux peintres se rencontrent à un point de fusion de deux branches, ils mettent en commun leur peinture restante puis continuent comme s'ils ne faisaient plus qu'un. La quantité de peinture restante lorsque les peintres atteignent la racine définit X_t . La Figure 12 illustre cette définition. Ce processus présente les mêmes caractéristiques que le modèle discret : la décroissance des quantités due à l'utilisation de la peinture, la croissance en additionnant deux copies indépendantes lors de la mise en commun de la peinture, et l'impossibilité de prendre des valeurs négatives.

L'intérêt principal de ce modèle est que pour certaines conditions initiales, données par un mélange entre une masse de Dirac en 0 et une loi exponentielle, nous montrons que les lois des variables X_t gardent cette forme particulière au cours du temps. Cela réduit l'analyse du processus dans ce cas à un couple intégrable d'équations différentielles ordinaires et nous permet de démontrer des résultats très précis. Ainsi, nous obtenons une démonstration simple pour le comportement de l'énergie libre à la transition de phase, comme conjecturé par Derrida et Retaux pour le modèle discret. Dans la phase critique, nous pouvons également décrire précisément le comportement asymptotique de X_t et la manière avec laquelle la peinture est amenée jusqu'à la racine de l'arbre quand $X_t > 0$. Pour cela, nous introduisons de nouveau la notion de l'arbre rouge : à présent, c'est le sous-arbre obtenu en ne gardant dans l'arbre que les chemins des

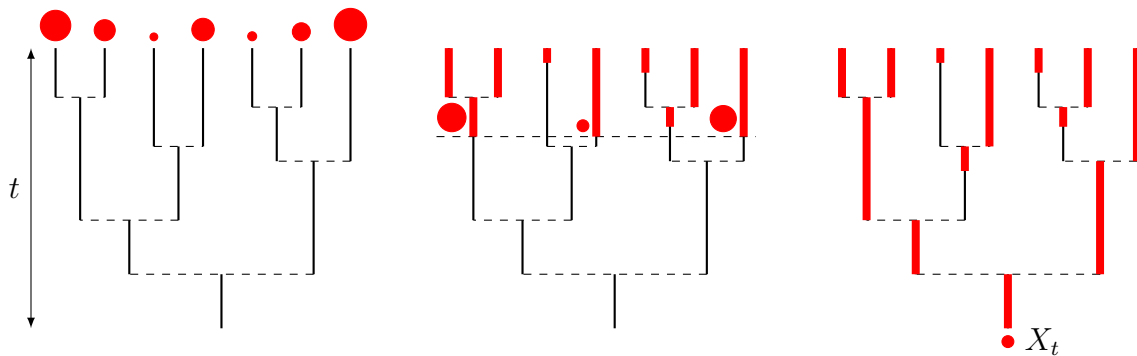


FIGURE 12 – Illustration de la définition du modèle de Derrida–Retaux continu. Les trois parties de la figure montrent le même arbre de Yule coupé à la hauteur t , où seule la partie verticale des branches indique leur longueur, les parties horizontales en pointillés indiquant où les branches sont attachées. La figure de gauche représente l’initialisation, où différentes quantités de peinture (en rouge) ont été disposées sur les feuilles. La figure du milieu représente l’état de l’arbre pendant la procédure : les peintres ont commencé à descendre et, certains n’ayant plus de peinture, certaines branches n’ont pas été peintes complètement. La figure de droite montre la situation finale, où la quantité restante de peinture donne X_t .

feuilles à la racine qui sont entièrement peints (en rouge donc, si l’on suppose que la peinture est rouge). Nous donnons une description de la construction de l’arbre rouge, en partant de la racine vers les feuilles, comme un processus markovien et cela nous permet de démontrer l’existence d’un arbre rouge limite après renormalisation, voir la Figure 13. Cet objet limite devrait être universel dans la phase critique, au moins pour les modèles de Derrida-Retaux discrets, comme le supportent des simulations numériques. En outre, nous montrons que le nombre de feuilles dans l’arbre rouge de hauteur t , ainsi que la masse totale de peinture qu’elles portent initialement, se comportent asymptotiquement en t^2 . Cette propriété devrait également rester vraie pour le modèle discret.

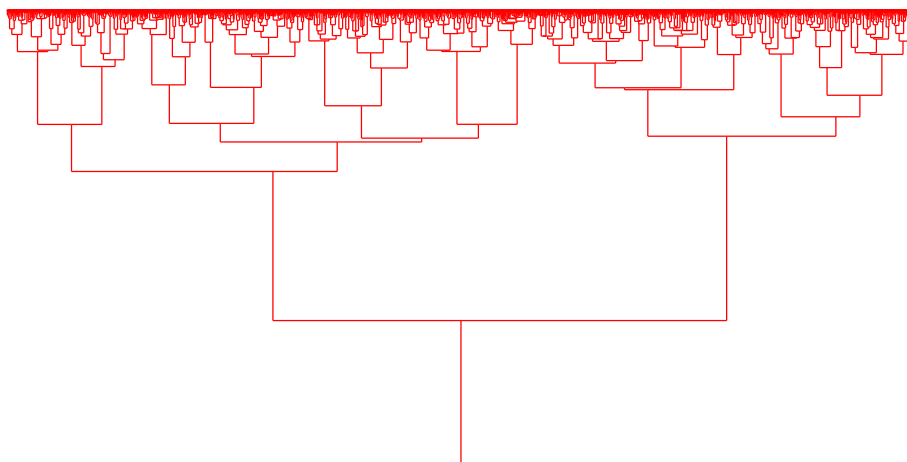


FIGURE 13 – Simulation de l’arbre rouge pour le modèle de Derrida–Retaux continu, avec $t = 200$. L’arbre se densifie énormément près des feuilles : il en possède 8336. Ainsi, l’arbre rouge limite est un arbre avec une infinité de feuilles.

References

- [1] E. Aïdékon. Convergence in law of the minimum of a branching random walk. *Ann. Probab.*, 41(3A):1362–1426, 2013.
- [2] E. Aïdékon, J. Berestycki, E. Brunet, and Z. Shi. Branching Brownian motion seen from its tip. *Probab. Theory Related Fields*, 157(1):405–451, 2013.
- [3] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. The extremal process of branching Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, 157(3-4):535–574, 2013.
- [4] J. Bérard and J.-B. Gouéré. Brunet-Derrida behavior of branching-selection particle systems on the line. *Comm. Math. Phys.*, 298(2):323–342, 2010.
- [5] I.-J. Bienaymé. De la loi de multiplication et de la durée des familles. *Soc. Philomat. Paris Extraits*, 5:37–39, 1845.
- [6] M. Bramson. Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 44(285):iv+190, 1983.
- [7] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller, and S. Munier. Phenomenological theory giving the full statistics of the position of fluctuating pulled fronts. *Phys. Rev. E*, 73(5):056126, 2006.
- [8] X. Chen, V. Dagard, B. Derrida, Y. Hu, M. Lifshits, and Z. Shi. The Derrida-Retaux conjecture for recursive models. *arXiv:1907.01601*, 2019.
- [9] P. Collet, J.-P. Eckmann, V. Glaser, and A. Martin. Study of the iterations of a mapping associated to a spin glass model. *Comm. Math. Phys.*, 94(3):353–370, 1984.
- [10] B. Derrida. A generalization of the Random Energy Model which includes correlations between energies. *J. Physique Lett.*, 46(9):401–407, 1985.
- [11] B. Derrida and M. Retaux. The Depinning Transition in Presence of Disorder: A Toy Model. *J. Stat. Phys.*, 156(2):268–290, 2014.
- [12] B. Derrida and H. Spohn. Polymers on disordered trees, spin glasses, and traveling waves. *J. Statist. Phys.*, 51(5):817–840, 1988.
- [13] U. Ebert and W. van Saarloos. Front propagation into unstable states: Universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts. *Phys. D*, 146(1-4):1–99, 2000.
- [14] R. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7(4):355–369, 1937.
- [15] F. Galton and H. W. Watson. On the probability of the extinction of families. *J. Roy. Anthropol. Inst.*, 4:138–144, 1874.
- [16] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. État Moscou*, 1:1–26, 1937.
- [17] S. P. Lalley and T. Sellke. A conditional limit theorem for the frontier of a branching Brownian motion. *Ann. Probab.*, 15(3):1052–1061, 1987.
- [18] H. P. McKean. Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(3):323–331, 1975.
- [19] A. H. Mueller and S. Munier. Phenomenological picture of fluctuations in branching random walks. *Phys. Rev. E*, 90(4):042143, 2014.